MATEMÁTICAS (II)
Modelo 2005

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta a eje *OX* al menos una vez en el intervalo [−1, 1].

Solución.

Por ser f(x) una función polinómica, es continua en toda la recta real por lo que también es continua en el intervalo [−1, 1]; como además alcanza valores de signo opuesto en dicho intervalo,

$$f(-1) = (-1)^{15} + (-1) + 1 = -1$$
$$f(1) = 1^{15} + 1 + 1 = 3$$

según el teorema de Bolzano, existe un valor c, del intervalo (−1, 1) en el que la función se anula.

$$c \in (-1, 1) \ / \ f(c) = 0$$

El teorema de Bolzano es una aplicación del teorema de Darboux. *"Toda función continua en un intervalo* [a, b]*, toma todos lo valores comprendidos entre f (a) y f (b)".*

b) Determinar razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje *OX* cuando *x* recorre toda la recta real.

Solución.

Por ser una función polinómica, f (x) es continua y derivable en todo $\Re$. Si f (x) corta en más de un punto al eje OX, significa que existe más de un valor de x en los que la función se anula y por tanto toma igual valor, por lo que la función se anula y por tanto toma igual valor, por lo que en cualquiera de los intervalos entre dos cortes consecutivos sería aplicable el teorema de Rolle, según el cual, debería existir algún punto interior del intervalo donde se anulase la derivada.

Derivando la función se puede observar fácilmente que no tiene solución

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$
$$f'(x) = 15x^{14} + 1 = 0 \ ; \quad x = \sqrt[14]{-\frac{1}{15}} \notin \Re$$

por lo que no se cumple el teorema de Rolle. De las tres condiciones, continuidad derivabilidad e igualdad en los extremos, la única que puede fallar es la tercera por ser f(x) un polinomio. Por lo tanto solo corta al eje OX una vez.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determinar el punto *P,* contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$

Solución.

El punto de corte de dos funciones, es la solución del sistema que se plantea entre las dos expresiones.

$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{x^2}{2} \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array}\right\}$$

Resolviendo por sustitución:

$$x^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=8\ :\ x^4+4x^2-32=0:\begin{cases}x^2=4\\x^2=-8\end{cases}$$

la única solución aceptable en el campo Real es la positiva.

$$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2:\begin{cases}\text{Si } x=2\ ;\ y=\dfrac{2^2}{2}=2\ :\ P=(2,2)\\ \text{Si } x=-2\ ;\ y=\dfrac{(-2)^2}{2}=2\ :\ Q=(-2,2)\end{cases}$$

El punto buscado, por ser del 1º cuadrante, debe tener las componentes positivas.

$$P=(2,2)$$

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y=\dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Solución.

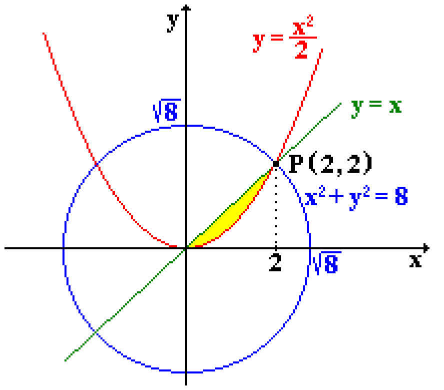
La recta que pasa por el origen y el punto P, tendrá como vector de dirección el vector de posición del punto $(\bar{p})$.

$$\bar{d}_r=\bar{p}=(2,2).$$

$$r:\begin{cases}0.0.=(0,0)\\ \bar{d}r=(2,2)\end{cases}\ :\ \frac{x}{2}=\frac{y}{2}\ :\ y=x$$

Representando las tres funciones, se obtiene el área pedida

- $x^2+y^2=0$. Circunferencia de centro (0, 0) y radio $\sqrt{8}$
- $y=\dfrac{x^2}{2}$. Parábola abierta hacia $+\infty$ de vértice (0, 0)
- $y = x$. Bisectriz de primer u tercer cuadrante



El área se calcula mediante la integral:

$$A=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\left(\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{6}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{6}\right)=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\ u^2$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro A el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda + 2y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda - z = 1 \\ 4x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$$

Solución.

El sistema viene definido por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2\lambda & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Por las dimensiones de las dos matrices: $A \subset A^*$; $\text{rg } A \le \text{rg } A^* \le n = 3$

El sistema se discute para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficiente, ya que para todos los demás el sistema será compatible determinado.

$$A = \begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0 : \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

Discusión:

I) Si $a \ne \frac{5}{2}, 2$. El $|A| \ne 0$ y por tanto $\text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3$. Sistema compatible determinado. Solución por el método de Cramer

II) Si $a = \frac{5}{2}$; $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5/2 \\ 1 & 5/2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$: $|A| = 0$; $\text{rg } A < 3$. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \ne 7 \Rightarrow \text{rg } A = 2$. El único menor de orden 3 que resta por estudiar en la matriz ampliada es: $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5/2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{77}{2} \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A^* = 3$. $\text{rg } A \ne \text{rg } A^*$.

Sistema incompatible

III) Si $a = 2 : A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$: $|A| = 0 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$. $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$: $\text{rg } A^* \ge 2$. El único menor de orden 3 que resta por estudiar es: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A^* = 3$. $\text{rg } A \ne \text{rg } A^*$.

Sistema incompatible

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Solución.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-(2\lambda - 5)(\lambda - 2)} = \frac{1 - 2\lambda^3}{-(2\lambda - 5)(\lambda - 2)} = \frac{2\lambda^3 - 1}{(2\lambda - 5)(\lambda - 2)}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 2\lambda & 1\end{vmatrix}}{-(2\lambda-5)\cdot(\lambda-2)}=\frac{6\lambda^2-2\lambda-5}{-(2\lambda-5)\cdot(\lambda-2)}$$

$$z=\frac{\|A_z\|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2\lambda & 2 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 4 & 3 & 2\lambda\end{vmatrix}}{-(2\lambda-5)\cdot(\lambda-2)}=\frac{4\lambda^3-14\lambda+11}{-(2\lambda-5)\cdot(\lambda-2)}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos A(-1, 1, 1), B(1, -3, -1) y C(1, O, 3), hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r \equiv x-1=\frac{y-1}{-1}=z-1$$

de manera que el tetraedro ABCD tenga un volumen igual a 2.

Solución.

La ecuación de r en paramétricas es:

$$r\equiv\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases}$$

por lo que el punto D será de la forma:

$$D=(1+t,1-t,1+t)\ \forall t\in\Re$$

El volumen del tetraedro ABCD es:

$$V=\frac{1}{6}\ \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}x\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\overline{AB}=\bar{b}-\bar{a}=(2,-4,-2)$$

$$\overline{AC}=\bar{c}-\bar{a}=(2,-1,2)$$

$$\overline{AD}=\bar{d}-\bar{a}=(2+t,-t,t)$$

$$V=2=\frac{1}{6}\cdot(2,-4,-2)\cdot((2,-1,2)\cdot(2+t,-t,t))=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & -4 & -2\\ 2 & -1 & 2\\ 2+t & -t & t\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 4(t-5)$$

$$2=\frac{1}{6}\cdot 4(t-5)\rightarrow t=8\Rightarrow D=(9,7,9)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2 puntos.
Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que *a* es un parámetro real:

$$\begin{cases} -ax+4y+az=-a \\ 4x+ay-az=a \\ -x-y+z=1 \end{cases}$$

Se pide:
a) (1 punto) Discutir el sistema.

Solución.
El sistema viene definido por las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -a & 4 & a \\ 4 & a & -a \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\subset A^* \Rightarrow \text{rg } A\le \text{rg } A^*\le n=3$$

Si el determinante de la matriz de coeficiente es distinto de cero, el sistema es compatible determinado, por lo que se discute las soluciones del sistema en función de los valores del parámetro que anulan el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} -a & 4 & a \\ 4 & a & -a \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} c_1=c_1+c_3 \\ c_2=c_2+c_3 \end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 4+a & a \\ 4-a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 4+a \\ 4-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A|=-(4+a)(4-a)=a^2-4^2=0:\begin{cases} a=-4 \\ a=4 \end{cases}$$

Discusión:

I) Si $a\ne\pm4 \Rightarrow |A|\ne0 \Rightarrow \text{rg } A=\text{rg } A^*=n=3$ S.C.D.

II) Si $a=4$. $|A|=0:\text{rg } A<3$

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}:\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}\ne0;\ \text{rg } A=2$$

$$A^*=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}:\text{rg } A\ge2:\begin{vmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\ne0;\ \text{rg } A^*=3$$

rg A ≠ rg A*. Sistema incompatible

III) Si $a=-4:|A|=0;\ \text{rg } A<3$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}:\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}\ne0;\ \text{rg } A=3$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}:\ \text{rg } A^*\ge2:\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\ne0;\ \text{rg } A^*=3$$

rg A ≠ rg A*. Sistema incompatible

b) (1 punto) Resolver el sistema para a = l.

Solución.

$$a=1:\begin{cases}-x+4y+z=-1\\ 4x+y-z=1\\ -x-y+z=1\end{cases} : |A|=1^2-4^2=-15$$. Aplicando el método de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-15}=\frac{-10}{-15}=\frac{2}{3}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-15}=\frac{6}{-15}=-\frac{2}{5}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 4 & -1\\ 4 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-15}=\frac{-19}{-15}=\frac{19}{15}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3-2A^2=0$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix} : A^2=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+2\cdot2+(-2)\cdot2 & 2\cdot2+2\cdot2+(-2)\cdot2 & 2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)\\ 2\cdot2+2\cdot2+(-2)\cdot2 & 2\cdot2+2\cdot2+(-2)\cdot2 & 2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)\\ 2\cdot2+2\cdot2+(-2)\cdot2 & 2\cdot2+2\cdot2+(-2)\cdot2 & 2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 4 & -4\\ 4 & 4 & -4\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}=2A$$

$$A^2=2A$$

$$A^3=A^2\cdot A=2A\cdot A=2A^2=2\cdot2\cdot A=2^2\cdot A$$

Sustituyendo en la expresión se demuestra lo que se pide.

$$A^3-2A^2=2^2\cdot A-2\cdot 2A=4A-4A=0$$

b) (1 punto) Hallar A^n.

Solución.

$$\text{Si}:\begin{cases}A^2=2A\\ A^3=2^2A\\ \vdots\\ A^n=2^{n-1}\cdot A\end{cases}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 3 puntos.

Sea la función $f(x)=\mathrm{Ln}(1+x^2)$, donde Ln significa *Logaritmo Neperiano.*

a) (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

Solución.

La monotonía de la función se estudia en el signo de la primera derivada, con el siguiente criterio:

$$\text{Si } f'(x)>0\Rightarrow f(x)\text{ es creciente}$$
$$\text{Si } f'(x)<0\Rightarrow f(x)\text{ es decreciente}$$

Sea:

$$f(x)=\mathrm{Ln}(1+x^2) \qquad ; \qquad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

Signo de f '(x): Los puntos donde puede cambiar el signo una expresión son los ceros y polos.

$$\text{Ceros: } 2x=0 : x=0$$
$$\text{Polos}: 1+x^2=0 : \text{No tiene}$$

Se generan dos intervalos:

$$(-\infty,0):\ f'(x)<0\Rightarrow f(x)\ \text{Decreciente}$$
$$(0,+\infty):\ f'(x)>0\Rightarrow f(x)\ \text{Creciente}$$

La curvatura de una función se estudia en el signo de la segunda derivada, con el signo criterio.

$$\text{Si } f''(x)<0\text{. La función esta por debajo de la tangente. CONCAVA}$$
$$\text{Si } f''>0\text{. La función está por encima de la tangente. CONVEXA}$$

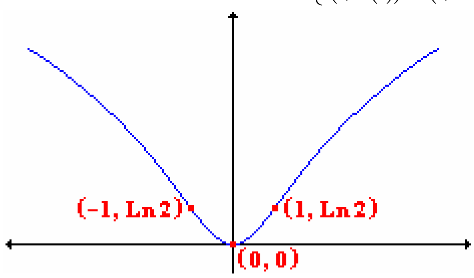
$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2} \quad : \quad f''(x)=\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{Signo } f''(x):\begin{cases}\text{Ceros}: 2-2x=0 : x=\pm 1\\ \text{Polos}: \text{No tiene}\end{cases} \qquad \text{Intervalos}:\begin{cases}(-\infty,-1): f''(x)<0\Rightarrow f(x)\text{ es CONCAVA}\\ (-1,1): f''(x)>0\Rightarrow f(x)\text{ es CONVEXA}\\ (1,+\infty): f''(x)<0\Rightarrow f(x)\text{ es CONCAVA}\end{cases}$$

b) (1 punto) Dibujar la gráfica de la f.

Solución.

- $D(f(x))=\Re$
- Función par $f(-x)=f(x)$. Simétrica resoecto a OY.
- Cortes con los ejes. OX: y = f (0) = Ln (1 + 0^2) = 0. (0, 0)
- Ramas en el infinito: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{lu}(1+x^2)=\mathrm{lu}\,\infty=\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{lu}(1+x^2)=\mathrm{lu}\,\infty=\infty\end{cases}$
- Máximos y mínimos: En $x=0 : f'(0)=0 : \begin{Bmatrix}\text{signo } f'(0^-)<0\\ \text{signo } f'(0^+)>0\end{Bmatrix}\Rightarrow (0,0)$ mínimo
- Punto de inflexión: En $x=\pm 1 : f''(\pm 1)=0 : f'''(\pm 1)\neq 0$ $\begin{cases}(-1, f(-1))=(-1,\mathrm{Ln}2)\\ (1, f(1))=(1,\mathrm{Ln}2)\end{cases}$



c) (1 punto) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f sus puntos de inflexión.

Solución.

Ecuación de la tangente a una función en un punto:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = x_o \end{array}\right\} : r_{tg} \equiv y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \mathrm{Ln}\left(1 + x^2\right) \\ x_o = -1 \end{array}\right\} : r_{tg} \equiv y - f(-1) = f'(-1)\cdot(x - (-1)) : \left\{\begin{array}{l} f(-1) = \mathrm{lu}\left(1 + (-1)^2\right) = \mathrm{lu}\,2 \\ f'(-1) = \dfrac{2\cdot(-1)}{1 + (-1)^2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{array}\right.$$

$$r_{tg} \equiv y - \mathrm{lu}\,2 = -1\cdot(x + 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \mathrm{Ln}\left(1 + x^2\right) \\ x_o = 1 \end{array}\right\} : r_{tg} \equiv y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1) : \left\{\begin{array}{l} f(1) = \mathrm{lu}\left(1 + 1^2\right) = \mathrm{lu}\,2 \\ f'(1) = \dfrac{2\cdot 1}{1 + 1^2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}\right.$$

$$r_{tg} \equiv y - \mathrm{lu}\,2 = 1\cdot(x - 1)$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 3 puntos.

Se considera la recta $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{2}$, y la familia de rectas dependiente del parámetro m:

$$s \equiv \left\{\begin{array}{l} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{array}\right.$$

a) (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y *s* se cortan.

Solución.

El problema se puede resolver de dos formas diferentes:

1ª. Expresando las dos rectas en forma de ecuaciones reducidas y discutiendo el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = -8 \\ x - 2 = -5 \end{array}\right. \\ s \equiv \left\{\begin{array}{l} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{array}\right. \end{array}\right\} S_{4x3}$$

Si el determinante de A^* es distinto de cero, el sistema no tiene solución, las rectas se cruzan pero no cortan, por lo que se estudia la posición relativa a partir de los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz ampliada.

$$A^* = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 0 & 8-12m \\ 0 & 1 & -3 & 7-3m \end{vmatrix} = \{F_4 = F_4 - 3F_2\} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 0 & 8-12m \\ -3 & 1 & 0 & 22-3m \end{vmatrix} =$$

$$= -1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & 8-12m \\ -3 & 1 & 22-3m \end{vmatrix} = 45(2 - m) = 0 : m = 2$$

Discusión de la posición relativa:

I) Si $m \neq 2$. Las rectas se cruzan y no se cortan.

II) Si $m = 2$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -3 & 16 \end{pmatrix} : A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = 3 = n$$

Las rectas se cortan en un punto

2ª. Estudiando el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{d}_r, \vec{d}_s$ y $\overrightarrow{AB}$ siendo A y B puntos de r y s respectivamente.

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{2} : \begin{cases} A = (0,4,5) \\ \vec{d}_r = (2,3,2) \end{cases}$$

Para obtener los elementos de la recta s se pasa a paramétricas:

$$s \equiv \begin{cases} x = \left(\frac{8}{3} - 4m\right) + \frac{1}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \left(-\frac{7}{3} + m\right) + \frac{1}{3}\lambda \end{cases} \quad \text{elementos} : \begin{cases} B = \left(\frac{8}{3} - 4m, 0, \frac{-7}{3} + m\right) \\ \vec{d}_s = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,3,1) \end{cases}$$

Con los elementos obtenidos, se plantea el determinante

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{8}{3} - 4m, -4, \frac{-22}{3} + m\right) \\ \vec{d}_s = (1,3,1) \\ \vec{d}_r = (2,3,2) \end{array}\right\} : \begin{vmatrix} \frac{8}{3} - 4m & -4 & \frac{-22}{3} + m \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15 \cdot (2 - m) = 0 : m = 2$$

Discusión de la posición relativa de las dos rectas.

I) Si $m \neq 2 \Rightarrow \text{rg}\left\{\overleftrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s\right\} = 3$. Las rectas se cruzan y no se cortan.

II) Si $m = 2$ $\text{rg}\left\{\overleftrightarrow{AB}, \vec{d}_r, \vec{d}_s\right\} = 2$. Los vectores son coplanarios, como además $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ no son proporcionales, las rectas se cortan.

b) (1 punto) Para el caso m = 0, hallar la distancia entre las dos rectas.

Solución.

Para $m = 0 : \begin{cases} r \equiv \begin{cases} A = (0,4,5) \\ \bar{d}_r = (2,3,2) \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} B = \left(8/3, 0, -7/3\right) \\ \bar{d}_s = (1,3,1) \end{cases} \end{cases}$. La mínima distancia entre dos rectas que se cruzan y no se cortan se puede calcular como una aplicación del producto mixto de tres vectores y el módulo del producto vectorial de dos vectores

$$d(r-s)=\frac{V(\text{paralilepipedo})}{A(\text{base})}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right)\right|}{\left|\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right|}$$

Producto vectorial de los vectores de dirección de ambas rectas:

$$\bar{d}_r\times\bar{d}_s=(2,3,2)\times(1,3,1)=\left(\begin{vmatrix}3&2\\3&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix}\right)=(-3,0,3)$$

Módulo del vector producto vectorial

$$\left|\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right|=\sqrt{(-3)^2+0^2+3^2}=\sqrt{18}$$

Producto mixto de tres vectores:

$$\overrightarrow{AB}\circ\left(\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right)=\begin{vmatrix}8/3&-4&-22/3\\2&3&2\\1&3&1\end{vmatrix}=-30$$

Distancia entre las rectas.

$$d(r-s)=\frac{|-30|}{\sqrt{18}}=\frac{30}{\sqrt{18}}=5\sqrt{2}\ u$$