

MATEMÁTICAS (II) Modelo 2007 (MADRID)

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

**INSTRUCCIONES:** El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

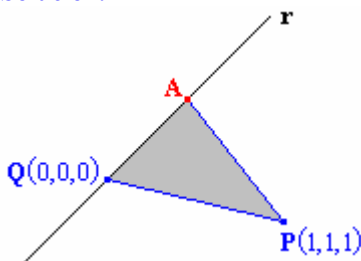
**PUNTUACIÓN:** La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

**TIEMPO:** 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Se consideran la recta  $r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$  y el punto  $P(1,1,1)$ . Dado el punto  $Q(0,0,0)$  de  $r$ , hallar todos los puntos  $A$  contenidos en  $r$  tales que el triángulo de vértices  $A, P$  y  $Q$  tenga área 1.

**Solución.**



El punto  $A$  que se pide debe cumplir dos condiciones:

- $A(a_1, a_2, a_3)$  pertenecer a la recta  $r$ , por lo tanto sus coordenadas deben cumplir las ecuaciones paramétricas de  $r$ .

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} x = \lambda \\ x + 3z = -2\lambda \end{cases}; r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$r \equiv \text{Si } A \in r \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_2 = \lambda \\ a_3 = -\lambda \end{cases} : A = (\lambda, \lambda, -\lambda)$$

- El triángulo  $APQ$  debe tener de área 1.

$$\frac{1}{2} |\overline{QA} \times \overline{QP}| = 1$$

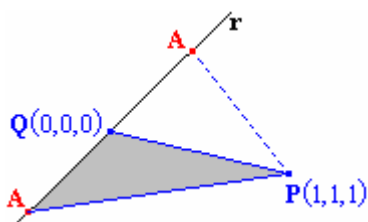
$$\overline{QA} = \vec{a} - \vec{q} = (\lambda - 0, \lambda - 0, -\lambda - 0) = (\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\overline{QP} = \vec{p} - \vec{q} = (1 - 0, 1 - 0, 1 - 0) = (1, 1, 1)$$

$$\overline{QA} \times \overline{QP} = (\lambda, \lambda, -\lambda) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2\lambda, -2\lambda, 0)$$

$$|\overline{QA} \times \overline{QP}| = \sqrt{(2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + 0^2} = \sqrt{8\lambda^2}$$

Sustituyendo en la expresión del área se despeja el parámetro



$$\frac{1}{2} \sqrt{8\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{\pm\sqrt{2}}{2} : \begin{cases} A = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ A' = \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

Existen dos posibles soluciones para el punto  $A$  como puede observarse en la imagen.

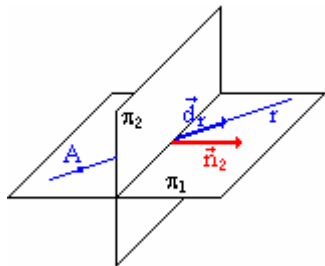
2. (2 puntos).

a) (1,5 puntos). Calcular la ecuación general del plano  $\pi_1$  que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

y es perpendicular al plano  $\pi_2: 2x + y - z = 2$ .

Solución.



El plano  $\pi_1$  se obtiene con la mínima determinación lineal, un punto del plano y dos vectores paralelos al plano.

Por estar la recta  $r$  contenida en el plano  $\pi_1$ , cualquier punto de  $r$  pertenece al plano, y el vector de dirección es paralelo al plano, por otro lado, el vector normal de un plano es perpendicular al plano, por lo tanto puesto que el plano  $\pi_2$  es perpendicular al  $\pi_1$ , el vector normal de  $\pi_2$  es paralelo al plano  $\pi_1$ .

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} A(1, -1, 0) \in r \\ \vec{d}_r = (1, 2, 1) \\ \vec{n}_2(2, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la 1ª fila y ordenando se obtiene la ecuación general de  $\pi_1$ .

$$\pi_1: -3x + 3y - 3z + 6 = 0$$

Simplificando

$$\pi_1: x - y + z - 2 = 0$$

b) (0,5 puntos). Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

Solución.

La recta buscada, intersección de dos planos, se obtiene resolviendo el sistema compatible indeterminado que forman las ecuaciones generales de los dos planos.

$$s = \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Para resolver el sistema hay que considerar a una de las tres variables como constante, transformarla en parámetro, llevarla al 2º miembro y resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que queda en función del parámetro, obteniendo como solución la ecuaciones paramétricas de la recta. En principio se puede tomar como constante cualquiera de las tres variables, siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes del sistema que queda sea distinto de cero.

En el caso de la recta  $s$  buscada, se puede transformar en parámetro la  $y$  ó la  $z$ .

$$s = \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} 2x + y = 2 + \lambda \\ x - y = 2 - \lambda \end{cases} : x = \frac{\begin{vmatrix} 2 + \lambda & 1 \\ 2 - \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-3} : y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 + \lambda \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 3\lambda}{-3}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{-2}{3} + \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

En este caso en particular el sistema se puede resolver muy fácilmente por el método de reducción, si se suman las dos ecuaciones se obtiene  $x$ , conocido  $x$  se calcula  $y$

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ky + k^2z = 1 \\ x + ky - kz = k^2 \\ -x + ky - k^2z = k^2 \end{cases}$$

a) (2 puntos). Discutirlo según los distintos valores de  $k$ .

**Solución.**

Se pide discutir el tipo de solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en función de un parámetro  $k$ .

El sistema viene descrito por dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & -k \\ -1 & k & -k^2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{pmatrix}$$

$$A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \leq \text{rg } A^* \leq n = 3$$

Si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, los rangos de las dos matrices y el número de incógnitas coinciden. El sistema es compatible determinado. Teniendo en cuenta esto, se discute el sistema para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & -k \\ -1 & k & -k^2 \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 2k^2(k+1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2k^2(k+1) = 0 : \begin{cases} k = 0 \\ k = -1 \end{cases}$$

**Discusión:**

I. Si  $k \neq 0, -1$ . En estos casos  $|A| \neq 0$ , por lo tanto  $\text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3$ . Sistema compatible determinado. La solución se puede obtener por el método de Cramer.

II. Si  $k = 0$ .  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  En este caso  $|A| = 0$ , todos los menores

de orden 2 también son nulos (cualquier menor de orden dos que escojamos tendrá una columna de ceros) y solo existen menores de orden 1 distintos de cero, por lo tanto  $\text{rg } A = 1$ . En la ampliada existen menores de orden 2 distintos de cero, por ejemplo el formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 4,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ,  $\text{rg } A^* = 2$ . Como los rangos son distintos, sistema incompatible (no tiene solución).

III. Si  $k = -1$ .  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$   $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  En este caso  $|A| = 0$ , por lo tanto

$\text{rg } A < 3$ . Buscamos un menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo el formado por la  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $C_1$  y  $C_2$ :  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , por lo tanto  $\text{rg } A = 2$ . Para calcular el rango de la ampliada solo nos queda por comprobar un menor de orden dos, el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ por lo tanto, } \operatorname{rg} A^* = 2 = \operatorname{rg} A < n = 3. \text{ Sistema compatible indeterminado.}$$

La solución del sistema se obtiene con dos ecuaciones, para asegurarnos que escogemos las linealmente independientes se toman las ecuaciones que contengan al menor de orden 2

distinto de cero, en este caso la 2ª y la 3ª, obteniendo el sistema  $S'$ : 
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x - y - z = 1 \end{cases}$$

**b) (1 punto).** Resolverlo para  $k = -1$ .

**Solución.**

$$S': \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x - y - z = 1 \end{cases}$$

Para resolver el sistema se transforma  $z$  en un parámetro  $\lambda$  y se resuelve  $x$  e  $y$  en función de  $\lambda$ .

$$S': \begin{cases} x - y = 1 - \lambda \\ -x - y = 1 + \lambda \end{cases}$$

Aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 + \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda}{-2} = -\lambda \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - \lambda \\ -1 & 1 + \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-2} = -1$$

Solución:  $(-\lambda, -1, \lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

**4. (3 puntos).**

**a) (1 punto).** Si  $f$  es una función continua, obtener  $F'(x)$  siendo:

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$$

**Solución.**

Si  $F$  es una primitiva de  $f$ :

$$F(t) = \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x) \cdot dx = F(x) \Big|_{g_1(t)}^{g_2(t)} = F(g_2(t)) - F(g_1(t))$$

derivando la expresión de  $F(t)$  mediante la regla de la cadena:

$$F'(t) = F'(g_2(t)) \cdot g_2'(t) - F'(g_1(t)) \cdot g_1'(t)$$

teniendo en cuenta el teorema fundamental del cálculo integral, si  $F$  es primitiva de  $f$ , entonces, la derivada de  $F$  es igual a  $f$

$$\text{Si } \int f = F \Rightarrow F' = f$$

sustituyendo en la expresión de  $F'(t)$   $F'$  por  $f$

$$F'(t) = f(g_2(t)) \cdot g_2'(t) - f(g_1(t)) \cdot g_1'(t)$$

En este caso el límite inferior de integración es constante ( $g_1(x) = 0$ ), la expresión se simplifica ya que la derivada de una constante es cero, anulando el 2º término.

$$F'(t) = f(g_2(t)) \cdot g_2'(t) - f(0) \cdot 0' = f(g_2(t)) \cdot g_2'(t)$$

Aplicando a la función propuesta  $F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$  :

$$F'(x) = (f(x) + x^2 + x^3) \cdot (x)' + (f(0) + 0^2 + 0^3) \cdot (0)' = f(x) + x^2 + x^3$$

- b) (2 puntos). Si  $f(1) = 1$  y además  $\int_0^1 f(t) dt = 1$ , hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $F(x)$  en el punto  $(1, F(1))$ .

**Solución.**

Teniendo en cuenta que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, la ecuación de la recta tangente a una función  $y = F(x)$  en un punto  $x = a$  en forma punto pendiente es:

$$y - F(a) = F'(a) \cdot (x - a)$$

Donde  $(a, F(a))$  es el punto y  $F'(a)$  es la pendiente.

Aplicado a  $F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3) dt$  en  $x = 1$ :

$$y - F(1) = F'(1) \cdot (x - 1)$$

$$F(1) = \int_0^1 (f(t) + t^2 + t^3) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 (t^2 + t^3) dt = 1 + \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = 1 + \left( \frac{1^3}{3} + \frac{1^4}{4} \right) - \left( \frac{0^3}{3} + \frac{0^4}{4} \right) = \frac{19}{12}$$

$$F'(x) = f(x) + x^2 + x^3 \Rightarrow F'(1) = f(1) + 1^2 + 1^3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

Sustituyendo:

$$x - \frac{19}{12} = 3 \cdot (x - 1)$$

**OPCIÓN B**

1. (2 puntos). Dada la función  $f(x) = 6x^2 - x^3$ , se pide:

- a) (1 punto). Hallar un valor  $a > 0$  tal que la recta tangente a la gráfica en el punto  $(a, f(a))$  sea paralela a la recta  $y = -15x$ .

**Solución.**

Dos rectas paralelas tienen igual pendiente. Por definición, la pendiente de la recta tangente a una función en un punto es la derivada de la función particularizada en el punto.

$$f'(a) = m_r : \begin{cases} f'(x) = 12x - 3x^2 \Rightarrow f'(a) = 12a - 3a^2 \\ r: y = -15x \Rightarrow m_r = -15 \end{cases}$$

Igualando:

$$12a - 3a^2 = -15 \quad \text{ordenando} \quad 3a^2 - 12a - 15 = 0 \quad \text{resolviendo} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = 5 \end{cases}$$

Como  $a > 0$ ,  $a = 5$

- b) (1 punto). Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de  $f$  y la parte positiva del eje OX.

**Solución.**

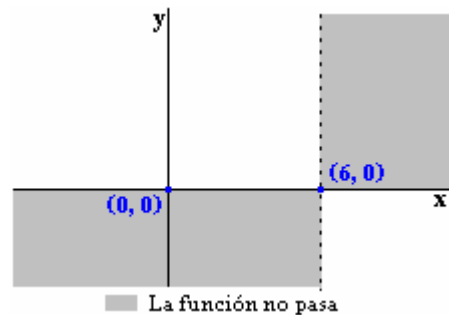
Para calcular el área comprendida entre una función y el eje OX es conveniente (no necesario) esbozar la gráfica de la función.

Puntos de corte con los ejes y signo de la función:

Se factoriza y se estudia las regiones.

$$f(x) = 6x^2 - x^3 = x^2(6-x) = 0 : \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0,0) \\ x = 6 \Rightarrow (6,0) \end{cases}$$

$$\text{Signo}(f(x)) \begin{cases} (-\infty, 6): f(x) > 0 \\ (6, +\infty): f(x) < 0 \end{cases}$$

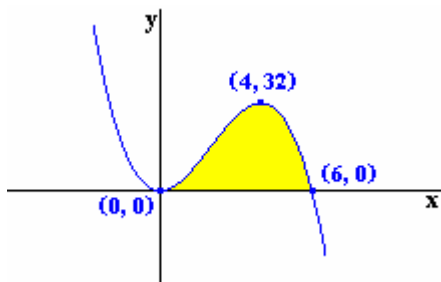
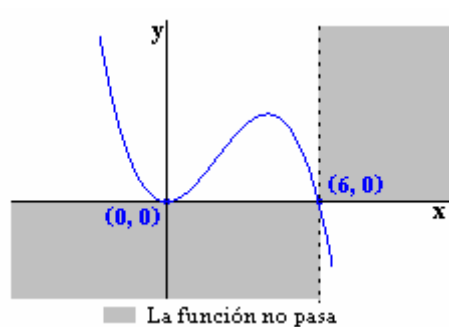


Estudio de 1ª derivada:  $f'(x) = 12x - 3x^2 = 3x(4-x)$

$$f'(x) = 0 : 3x(4-x) = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\infty, 0): f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente} \\ (0, 4): f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es creciente} \\ (4, +\infty): f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente} \end{cases}$$

En  $(0, 0)$  la función presenta un mínimo relativo y en  $(4, f(4))$  un máximo relativo.  $f(4) = 32$



El área pedida es:

$$\begin{aligned} \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx &= \left( \frac{6x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^6 = \\ &= \left( 2 \cdot 6^3 - \frac{6^4}{4} \right) - \left( 2 \cdot 0^3 - \frac{0^4}{4} \right) = 108 u^2 \end{aligned}$$

2. (2 puntos). Obtener el valor de k sabiendo que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^2$$

**Solución.**

Se resuelve el límite en función de k y se iguala a  $e^2$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (kx+5) = \infty \end{array} \right\} = 1^\infty$$

Indeterminación del número e. Por definición  $e = \lim_{S_n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{S_n} \right)^{S_n}$ , por lo tanto cualquier

límite de la forma  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)}$  que responda a la indeterminación  $1^\infty$  se puede expresar en función

de e, según la expresión:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x)(f(x)-1)]}$$

Aplicando al límite propuesto y operando:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{kx+5} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ (kx+5) \left( \frac{x+3}{x} - 1 \right) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ (kx+5) \frac{3}{x} \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3kx+15}{x}} = e^{3k}$$

Igualando los resultados:

$$e^{3k} = e^2 \rightarrow 3k = 2 \rightarrow k = \frac{2}{3}$$

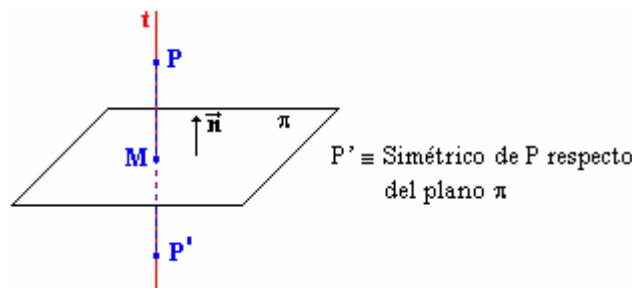
3. (3 puntos). Se consideran el punto P (1, 0, 1), la recta:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano  $\pi: x + y + z = 0$ . Se pide:

a) (1,5 puntos). Obtener el punto P', simétrico de P respecto del plano  $\pi$ .

**Solución.**



P' se calcula conocido M, teniendo en cuenta que M es el punto medio del segmento  $\overline{PP'}$ .

$$x_m = \frac{x_p + x_{p'}}{2} \Rightarrow x_{p'} = 2x_m - x_p$$

$$y_m = \frac{y_p + y_{p'}}{2} \Rightarrow y_{p'} = 2y_m - y_p$$

$$z_m = \frac{z_p + z_{p'}}{2} \Rightarrow z_{p'} = 2z_m - z_p$$

El punto M que también es la proyección ortogonal de P sobre  $\pi$ , se calcula como intersección de t y  $\pi$ , siendo t la recta perpendicular (ortogonal) a  $\pi$  que pasa por el punto P.

$$t: \left\{ \begin{array}{l} t \perp \pi \Rightarrow \vec{d}_t = \vec{n}_\pi = (1, 1, 1) \\ P(1, 0, 1) \in r \end{array} \right\} : t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 + 1\lambda \\ z = 1 + 1\lambda \end{cases}$$

Conocidas las ecuaciones de  $t$  y  $\pi$ , se calcula  $M$  sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación general del plano. Se obtiene una ecuación en función del parámetro que al resolver nos da el valor del parámetro ( $\lambda_M$ ) que permite calcular las coordenadas de  $M$  sustituyéndolo en las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$M \equiv \left\{ \begin{array}{l} t: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \\ \pi: x + y + z = 0 \end{array} \right\} : (1 + \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) = 0 \quad : \quad 3\lambda + 2 = 0 \quad : \quad \lambda_M = -\frac{2}{3}$$

$$M: \begin{cases} x_M = 1 - \frac{2}{3} \\ y_M = -\frac{2}{3} \\ z_M = 1 - \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow M = \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

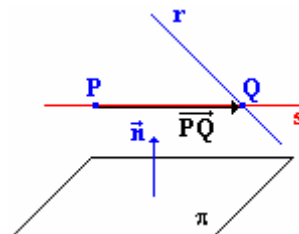
Conocidas las coordenadas de  $M$  se calculan las de  $P'$ .

$$\left. \begin{array}{l} x_{p'} = 2x_m - x_p = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \\ y_{p'} = 2y_m - y_p = 2 \cdot -\frac{2}{3} - 0 = -\frac{4}{3} \\ z_{p'} = 2z_m - z_p = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \end{array} \right\} : P' = \left( -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

**b) (1,5 puntos).** Determinar la ecuación de la recta  $s$  que contiene al punto  $P$ , corta a la recta  $r$  y es paralela al plano  $\pi$ .

**Solución.**

La recta  $s$  buscada se calcula mediante el punto  $P$  (dato) y un punto  $Q$  (genérico) de la recta  $r$ , para asegurarnos que la corta, como además nos piden que sea paralela al plano  $\pi$ , el vector  $\overline{PQ}$  debe ser perpendicular al vector  $\vec{n}$  (normal del plano  $\pi$ ) y por tanto su producto escalar debe ser nulo.



$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1} : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Cualquier punto genérico  $Q$  de  $r$  debe tener la forma:  $Q = (1 + \lambda, 2\lambda, -1 - \lambda)$ , por lo tanto el vector  $\overline{PQ}$  será:

$$\overline{PQ} = (1 + \lambda, 2\lambda, -1 - \lambda) - (1, 0, 1) = (\lambda, 2\lambda, -2 - \lambda)$$

El parámetro  $\lambda$  se determina con la condición de que el vector  $\overline{PQ}$  debe ser paralelo al plano  $\pi$ , y por tanto perpendicular al vector normal de  $\pi$  ( $\vec{n}$ ), por lo que su producto escalar debe ser nulo.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} \circ \vec{n} &= 0 : (\lambda, 2\lambda, -2 - \lambda) \circ (1, 1, 1) = 0 \\ \lambda \cdot 1 + 2\lambda \cdot 1 + (-2 - \lambda) \cdot 1 &= 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

Conocido  $\lambda$ , la recta  $s$  se calcula con el punto  $P$  y el vector  $\overline{PQ}$ .

$$s: \begin{cases} P = (1, 0, 1) \\ \overline{PQ} = (1, 2 \cdot 1, -2 - 1) = (1, 2, -3) \\ s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{-3} \end{cases}$$

4. (3 puntos). Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos). Determinar el rango de M según los valores del parámetro  $\lambda$ .

**Solución.**

El rango de una matriz (número de vectores fila o columna linealmente independientes), es el orden del mayor menor distinto de cero que exista en la matriz, teniendo en cuenta esto, la discusión del rango de una matriz cuadrada en función de un parámetro se hace en función de los valores del parámetro que anulen el determinante de la matriz, para los demás valores que no lo anulen se generarán matrices de rango el orden del determinante.

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda - 2\lambda - 2\lambda - (-2\lambda^3 - 2 - 2) = 2\lambda^3 - 6\lambda + 4 = 2(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

$$|M| = 0 \Rightarrow 2(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0: \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

**Discusión:**

1. Si  $\lambda \neq 1, -2$ .  $|M| \neq 0$ ,  $\text{rg } M = 3$

2. Si  $\lambda = 1$ .  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ :  $|M| = 0 \Rightarrow \text{rg } M < 3$ . Buscamos un menor de orden 2 no nulo, en este

caso no existen, por lo tanto  $\text{rg } M < 2$ . Buscamos menores de orden 1 no nulos, en este caso cualquier término de la matriz no nulo, como por ejemplo el 1.1.  $|2| \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 1$

3. Si  $\lambda = -2$ .  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ :  $|M| = 0 \Rightarrow \text{rg } M < 3$ . Buscamos un menor de orden 2 no nulo,

por ejemplo el formado por las filas 1ª y 2ª y las columnas 1ª y 2ª.  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2$

b) (1,5 puntos). Determinar para qué valores de  $\lambda$  existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para  $\lambda = 0$ .

**Solución.**

La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero. A las matrices que tienen inversa y por tanto su determinante es distinto de cero se las denominan regular. Teniendo en cuenta el apartado a, la matriz M tendrá inversa para cualquier valor de  $\lambda$  distinto de 1 ó -2.

$$\text{Inversa para } \lambda = 0. \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}: |M| = 2(0-1)^2(0+2) = 4$$

$$\begin{aligned}
 M^{-1} &= \frac{(\text{adj } M)^t}{|M|} = \frac{\left( \text{adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^t}{4} = \frac{\left( \begin{array}{c} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right)^t}{4} = \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^t}{4} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$