

MATEMÁTICAS (II)
Modelo 2008

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones, A y B. El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas, y resolver los cuatro ejercicios de que consta. No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Se considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$

- a) (1 punto). Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.
- b) (1 punto). Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución.

a. **Asíntotas:**

- Verticales ($x = x_0; x_0 \notin D[f(x)]$). No tiene porque el dominio es todo \mathbb{R}

$$D\left[\frac{x}{e^x}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} / e^x \neq 0\right\} \quad \left. \vphantom{D\left[\frac{x}{e^x}\right]} \right\} : D[f]_x = \mathbb{R}$$

Por definición : $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

- Horizontales ($y = L; L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$).

$$L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{0/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0} = -\infty \end{cases}$$

La función tiene una asíntota horizontal hacia $+\infty$ de ecuación $y = 0$

- Oblicuas ($y = mx + n$). Hacia $+\infty$ no puede tener asíntota oblicua por tener horizontal. Hacia $-\infty$ existe la posibilidad y que comprobarlo.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{-\infty}} = \frac{1}{0} = \infty$$

No tiene asíntota oblicua hacia $-\infty$

Extremos locales (máximo y mínimos relativos).

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto, la primera derivada de la función en el punto debe ser cero y la segunda distinta de cero.

$$x = x_0 \exists \text{Máximo} \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) < 0$$

$$x = x_0 \exists \text{Mínimo} \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) > 0$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 : \frac{1-x}{e^x} = 0 : 1-x = 0 : x = 1 : y = f(1) = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e}$$

$$f''(1) = \frac{1-2}{e^1} = \frac{-1}{e} < 0 \Rightarrow \left(1, \frac{1}{e}\right) \text{ M\u00e1ximo local}$$

b. Puntos de inflexi\u00f3n. Para que una funci\u00f3n tenga inflexi\u00f3n en un punto, la segunda derivada de la funci\u00f3n en el punto debe ser cero y la tercera distinta de cero.

$$x = x_0 \exists \text{ inflexi\u00f3n} \Leftrightarrow f''(x_0) = 0 \text{ y } f'''(x_0) \neq 0: \begin{cases} f'''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{Convexa}(\cup) \rightarrow \text{Concava}(\cap) \\ f'''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{Concava}(\cap) \rightarrow \text{Convexa}(\cup) \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x-2) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(3-x)}{(e^x)^2} = \frac{3-x}{e^x}$$

$$f''(x) = 0: \frac{x-2}{e^x} = 0: x-2 = 0: x = 2: y = f(2) = \frac{2}{e^2}$$

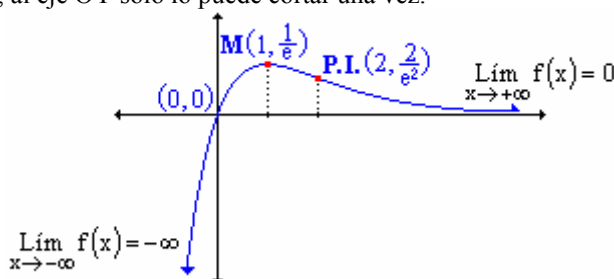
$$f'''(2) = \frac{3-2}{e^2} = \frac{1}{e^2} > 0$$

En el punto $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ la funci\u00f3n presenta inflexi\u00f3n de Concava(\cap) \rightarrow Convexa(\cup)

Gr\u00e1fica de la funci\u00f3n. Es conveniente calcular los puntos de corte con los ejes.

- OX ($y = 0$): $\frac{x}{e^x} = 0: x = 0. (0, 0)$

- OY ($x = 0$): El mismo, al eje OY solo lo puede cortar una vez.



2. (2 puntos). Calcular:

a) (1 punto) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

b) (1 punto) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n+5}$

Soluci\u00f3n.

a.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{1+n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (1-5n) = -\infty \end{cases} \begin{matrix} 1^{-\infty} \\ n^{\circ} e \end{matrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1-5n)^{\left(\frac{2+n}{1+n} - 1\right)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1-5n)^{\frac{2+n-(1+n)}{1+n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1-5n)^{\frac{1-n}{1+n}} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5n}{1+n}} = e^{-5}$$

Nota: La indeterminaci\u00f3n 1^∞ se resuelve mediante el n\u00famero e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty}$$

b.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3}}{(n+5)^2} - \frac{\sqrt{n^4 - n}}{(n+5)^2} \right) = \infty - \infty$$

La indeterminaci\u00f3n se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado de la parte irracional.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}}{n+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} - \sqrt{n^4 - n}) \cdot (\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})}{(n+5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3})^2 - (\sqrt{n^4 - n})^2}{(n+5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^3 - 3 - (n^4 - n)}{(n+5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n - 3}{(n+5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^3 + n - 3}{n^3}}{\frac{(n+5)(\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n})}{n^3}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{n+5 \cdot \frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3} + \sqrt{n^4 - n}}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\left(1 + \frac{5}{n}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{n^4 + 2n^3 - 3}}{n^2} + \frac{\sqrt{n^4 - n}}{n^2}\right)} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\left(1 + \frac{5}{n}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{n^4 + 2n^3 - 3}{n^4}} + \sqrt{\frac{n^4 - n}{n^4}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\left(1 + \frac{5}{n}\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^3}}\right)} = \\
 &= \frac{2 + \frac{1}{\infty^2} - \frac{3}{\infty^3}}{\left(1 + \frac{5}{\infty}\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{\infty} - \frac{3}{\infty^4}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\infty^3}}\right)} = \frac{2 + 0 - 0}{(1+0) \cdot (\sqrt{1+0-0} + \sqrt{1-0})} = \frac{2}{1 \cdot (1+1)} = 1
 \end{aligned}$$

3. (3 puntos). Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + mz = m + 2 \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = -m \\ (m+2)x + 3y + (2m+1)z = 3m + 4 \end{cases}$$

Se pide:

- (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro real m
- (1 punto). Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución.

a. Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, definido por las matrices de coeficientes (A) y la ampliada (A*).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & m+1 & m+1 \\ m+2 & 3 & 2m+1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{pmatrix} \quad A \subset A^* \Rightarrow \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A^* \leq 3$$

Si $|A| \neq 0$, $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} A^* = n$ (número de incógnitas), el sistema será compatible determinado. Por lo tanto, teniendo en cuenta lo anterior, el tipo de solución del sistema se hace para los valores del parámetro m que anulan el determinante de la matriz de coeficientes ($|A| = 0$).

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & m+1 & m+1 \\ m+2 & 3 & 2m+1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (m+1) \cdot (2m+1) + 1 \cdot (m+1) \cdot (m+2) + 2 \cdot 3 \cdot m - \\
 & \quad (m \cdot (m+1) \cdot (m+2) + 1 \cdot 2 \cdot (2m+1) + 1 \cdot (m+1) \cdot 3) = -m^3 + 3m - 2 \stackrel{\text{Ruffini}}{=} -(m-1)^2(m+2)
 \end{aligned}$$

$$|A| = 0 : -(m-1)^2(m+2) = 0 : \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

Discusión.

i. Si $m \neq 1, -2$. En este caso, $|A| \neq 0$ y por tanto, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3$. Sistema compatible determinado (solución única. Cramer)

ii. Si $m = 1$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. En la matriz A solo existen menores de orden uno distintos de

cero, por lo tanto, $\text{rg } A = 1$. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Existen menores de orden dos distintos

de cero $\left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \right)$, por lo tanto $\text{rg } A^* = 2$. $\text{rg } A = 1 \neq \text{rg } A^* = 2$. Sistema incompatible (no tiene solución).

iii. Si $m = -2$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. $|A| = 0$, $\text{rg } A < 3$. Existen menores de orden dos distintos de

cero $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \right)$, por lo tanto $\text{rg } A = 2$. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. Teniendo en

cuenta que $A \subset A^*$, $\text{rg } A^* \geq 2$. Tomando como referencia el menor de orden dos $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$,

sus menores orlados son el formado por las tres primeras columnas (el determinante de la matriz de coeficiente, que es cero y no hay que volver a estudiar), y el formado por la 1ª, 2ª

y 4ª columna. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ No existen menores de orden 3 distintos de cero, $\text{rg } A^* = 2$.

$\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < n = 3$. Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones). El sistema equivalente esta formado por ecuaciones. Para seleccionar las linealmente independientes, se escogen las que contienen los coeficientes del menor de orden dos distinto de cero utilizado para determinar el rango (1ª y 2ª ecuación).

$$S': \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$$

b. Según el apartado a del ejercicio, el sistema presenta infinitas soluciones cuando $m = -2$,

quedando en ese caso el sistema: $S': \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$

Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, para resolverlo hay que tomar una variable como constante y transformarla en un parámetro (λ). Para asegurarnos que tomamos como constante una variable adecuada, escogemos la variable de los coeficientes no usados en el menor de orden 2 (z , de esta forma, aseguramos de que el determinante de la matriz de coeficientes que queda después de la transformación es distinto de cero).

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x + y = 2\lambda \\ 2x - y = 2 + \lambda \end{cases}$$

Resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 2+\lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda \cdot (-1) - 1 \cdot (2+\lambda)}{1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2} = \frac{-2-3\lambda}{-3} = \frac{2}{3} + \lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda \\ 2 & 2+\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot (2+\lambda) - 2\lambda \cdot 2}{-3} = \frac{2-3\lambda}{-3} = -\frac{2}{3} + \lambda$$

Solución: $\left(\frac{2}{3} + \lambda, -\frac{2}{3} + \lambda, \lambda\right) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

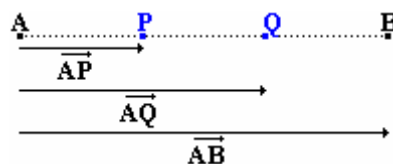
4. (3 puntos). Sean los puntos A(1, 0, 2) y B(1, 1, -4).

- a) (1 punto). Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que dividen el segmento AB en tres partes iguales.
- b) (1 punto). Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.
- c) (1 punto). Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Solución.

a. Para calcular las coordenadas de los puntos P y Q se aplican las relaciones simples entre tres puntos alineados.



Punto P: $\overline{AB} = 3\overline{AP}$

$$\text{Si: } \begin{cases} A = (1, 0, 2) \\ B = (1, 1, -4) \\ P = (p_1, p_2, p_3) \end{cases} : \begin{cases} \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (1-1, 1-0, -4-2) = (0, 1, -6) \\ \overline{AP} = \vec{p} - \vec{a} = (p_1-1, p_2-0, p_3-2) = (p_1-1, p_2, p_3-2) \end{cases}$$

Sustituyendo en la relación:

$$(0, 1, -6) = 3 \cdot (p_1 - 1, p_2, p_3 - 2)$$

Igualando por componentes se calculan las coordenadas de P.

$$\begin{cases} 1^a: 0 = 3 \cdot (p_1 - 1) \\ 2^a: 1 = 3 \cdot p_2 \\ 3^a: -6 = 3 \cdot (p_3 - 2) \end{cases} \quad \text{Despejando de cada igualdad: } \begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = 1/3 \\ p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Punto Q: $\overline{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AB} : 3\overline{AQ} = 2\overline{AB}$

$$\text{Si: } \begin{cases} A = (1, 0, 2) \\ B = (1, 1, -4) \\ Q = (q_1, q_2, q_3) \end{cases} : \begin{cases} \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (0, 1, -6) \\ \overline{AQ} = \vec{q} - \vec{a} = (q_1-1, q_2-0, q_3-2) = (q_1-1, q_2, q_3-2) \end{cases}$$

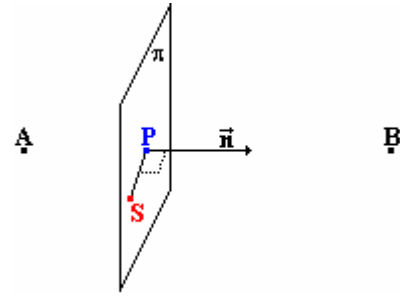
Sustituyendo en la relación:

$$3 \cdot (q_1 - 1, q_2, q_3 - 2) = 2 \cdot (0, 1, -6)$$

Igualando por componentes se calculan las coordenadas de P.

$$\begin{cases} 1^a: 3 \cdot (q_1 - 1) = 2 \cdot 0 \\ 2^a: 3 \cdot q_2 = 2 \cdot 1 \\ 3^a: 3 \cdot (q_3 - 2) = 2 \cdot (-6) \end{cases} \quad \text{Despejando de cada igualdad: } \begin{cases} q_1 = 1 \\ q_2 = 2/3 \\ q_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow P = \left(1, \frac{2}{3}, -2\right)$$

b. El plano π se obtiene a partir del punto P y del vector característico del plano (\vec{n}), teniendo en cuenta que cualquier punto genérico de plano (S), de coordenadas (x, y, z) forma con el punto P un vector perpendicular al vector característico del plano y por tanto su producto escalar será nulo.



Como vector característico del plano se toma el vector \overline{AB} :

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \perp \overline{PS} &\Rightarrow \vec{n} \circ \overline{PS} = 0 \\ \vec{n} = \overline{AB} &= (0, 1, -6) \\ \overline{PS} = \vec{s} - \vec{p} &= \left(1-x, \frac{1}{3}-y, 0-z\right) \end{aligned} \right\} : \pi; (0, 1, -6) \circ \left(1-x, \frac{1}{3}-y, 0-z\right) = 0$$

Operando y ordenando se obtiene la ecuación general del plano π

$$\begin{aligned} 0 \cdot (1-x) + 1 \cdot \left(\frac{1}{3}-y\right) + (-6) \cdot (0-z) &= 0 \\ \frac{1}{3} - y + 6z &= 0 \\ \pi: 3y - 18z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

c. La posición relativa de una recta y un plano se estudia a partir del producto escalar del vector de dirección de la recta (\vec{d}_r) y el vector normal o característico del plano (\vec{n}).

- Si $\vec{d}_r \circ \vec{n} \neq 0 \Rightarrow$ la recta corta al plano
- Si $\vec{d}_r \circ \vec{n} = 0 \Rightarrow$ la recta es paralela al plano ó la recta está contenida en el plano.

$$\left. \begin{aligned} \vec{d}_r &= (-2, 1, 1) \\ \vec{n} &= (0, 3, -18) \end{aligned} \right\} : (-2, 1, 1) \circ (0, 3, -18) = -2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-18) = -15 \neq 0$$

La recta corta al plano.

OPCIÓN B

1. (2 puntos). Hallar los puntos de la recta $r: \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$ cuya distancia al plano $\pi: 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$

Solución.

Se busca un punto $P(x, y, z)$ de r cuya distancia al plano π sea $1/3$. Si expresamos la recta r en paramétricas, se podrán expresar las coordenadas de cualquier punto de r en función únicamente de un parámetro.

$$r: \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda} r: \begin{cases} z = -2\lambda \\ y - z = -3 + \lambda \end{cases} \text{ Resolviendo: } r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Cualquier punto P de r tendrá por coordenadas $P = (\lambda, -3 + \lambda, -2\lambda)$

Si al punto genérico de P le aplicamos la condición impuesta (la distancia al plano π es $1/3$) se obtiene una ecuación que nos permite calcular los posibles valores de λ .

$$d(P(\lambda, -3 + \lambda, -2\lambda) - \pi: 3x + 4y - 4 = 0) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{|3 \cdot \lambda + 4 \cdot (-3 + \lambda) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{1}{3} \quad \frac{|-16 - \lambda|}{5} = \frac{1}{3}$$

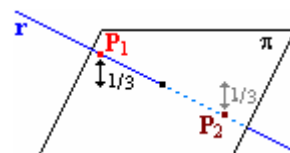
Al quitar el valor absoluto habrá que tener en cuenta el posible doble signo de la expresión.

$$\frac{\pm(-16 - \lambda)}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} (+): \frac{-16 - \lambda}{5} = \frac{1}{3} : \lambda = -\frac{53}{3} \\ (-): \frac{-(-16 - \lambda)}{5} = \frac{1}{3} : \lambda = -\frac{43}{3} \end{cases}$$

Aparecen dos posibles valores de λ , correspondientes a los dos puntos de la recta que cumplen la condición pedida (P_1, P_2), tal como indica la figura

$$\lambda = -\frac{53}{3} : P_1 = \left(-\frac{53}{3}, -3 + \frac{-53}{3}, -2 \cdot \left(-\frac{53}{3} \right) \right) = \left(-\frac{53}{3}, \frac{44}{3}, \frac{106}{3} \right)$$

$$\lambda = -\frac{43}{3} : P_2 = \left(-\frac{43}{3}, -3 + \frac{-43}{3}, -2 \cdot \left(-\frac{43}{3} \right) \right) = \left(-\frac{43}{3}, \frac{34}{3}, \frac{86}{3} \right)$$



2. (2 puntos). Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2k + 1, k)$ y $C(k + 1, 4, 3)$, se pide:
- (1 punto). Determinar para qué valor de k el triángulo ABC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A .
 - (1 punto). Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo ABC .

Solución.

- a. Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es nulo.

$$\overline{AB} \perp \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} \circ \overline{AC} = 0$$

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (2 - 1, 2k + 1 - 3, k - (-2)) = (1, 2k - 2, k + 2)$$

$$\overline{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (k + 1 - 1, 4 - 3, 3 - (-2)) = (k, 1, 5)$$

$$\overline{AB} \circ \overline{AC} = (1, 2k - 2, k + 2) \circ (k, 1, 5) = 1 \cdot k + (2k - 2) \cdot 1 + (k + 2) \cdot 5 = 0$$

$$8k + 8 = 0: k = -1$$

b. Para $k = 0$: $A(1, 3, -2)$; $B(2, 1, 0)$; $C(1, 4, 3)$

El área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices se obtiene como aplicación del módulo del producto vectorial.

$$\text{Area ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (2-1, 1-3, 0-(-2)) = (1, -2, 2)$$

$$\overline{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (1-1, 4-3, 3-(-2)) = (0, 1, 5)$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (1, -2, 2) \times (0, 1, 5) = \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-12, -5, 1)$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{170}$$

$$\text{Area ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{\sqrt{170}}{2} \text{ u}^2$$

3. (3 puntos). Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Hallar una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A^{-1} = B$.

b) (1 punto). Calcular A^{10} .

c) (1 punto). Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M) \cdot (A + M) = A^2 - M^2.$$

Solución.

a. Se pide despejar una matriz X en una ecuación matricial, para ello habrá que tener en cuenta tres propiedades del producto de matrices:

1. El producto de matrices no es conmutativo. Para obtener una ecuación equivalente habrá que multiplicar por la misma matriz los dos miembros y en el mismo orden.
2. El producto de una matriz por su inversa en cualquier orden, es la matriz identidad ($A^{-1} \cdot A = I$).
3. La matriz identidad (I), es el elemento neutro de la multiplicación de matrices.

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = B$$

Para despejar la matriz X , multiplicamos los dos miembros por la matriz A por la derecha y por la inversa de A por la izquierda.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot B \cdot A$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot A$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A$$

$$\text{Inversa de A: } A^{-1} = \frac{(\text{adj } A)^t}{|A|} = \frac{\left(\text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^t}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

- b. Se calculan las primeras potencias y se observa si existe una ley de recurrencia entre ellas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con las tres primeras potencias se ve fácilmente la ley de recurrencia.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$$

- c. Si multiplicamos el primer miembro de la igualdad, se observa la condición que ha de cumplir M para cumplir la expresión notable.

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

$$A \cdot A + A \cdot M - M \cdot A - M \cdot M = A^2 - M^2$$

$$A^2 + A \cdot M - M \cdot A - M^2 = A^2 - M^2 \Leftrightarrow A \cdot M - M \cdot A = 0$$

$A \cdot M - M \cdot A = 0$, es equivalente a $A \cdot M = M \cdot A$

Tomando M como una matriz genérica del tipo $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, sustituyendo, operando e igualando, se llega aun sistema de ecuaciones que nos permitirá calcular los términos de la matriz M.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1.1: x+z = x \\ 1.2: y+t = x+y \\ 2.1: z = z \\ 2.2: t = z+t \end{cases} \cdot \begin{cases} z = 0 \\ t = x \\ z = z \\ 0 = z \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ t = x \end{cases}$$

Al simplificar las igualdades desaparece una variable (y), eso implica que dicha variable puede tomar cualquier valor ($y = \mu$). Para resolver la única ecuación que nos queda se transforma una de la variable en parámetro ($x = \lambda$).

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \\ t = \lambda \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

4. (3 puntos). Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{sí } |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{sí } |x| \geq 2 \end{cases}$

Se pide:

- a) (1,5 puntos). Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo \mathbb{R} .
 b) (1,5 puntos). Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f , el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

Solución.

a. El primer paso será expresar los intervalos sin valores absolutos.

$$|x| < 2 : \pm x < 2 : \begin{cases} x < 2 \\ -x < 2 : x > -2 \end{cases} : (-2, 2)$$

$$|x| \geq 2 : \pm x \geq 2 : \begin{cases} x \geq 2 : [2, +\infty) \\ -x \geq 2 : x \leq -2 : (-\infty, 2] \end{cases} : (-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{sí } x \leq -2 \\ ax^2 + b & \text{sí } -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{sí } x \geq 2 \end{cases}$$

Para que una función sea continua en un punto, el valor de la función en el punto debe ser igual al valor del límite de la función en él, lo cual equivale a que sean iguales los límites laterales en el punto

Continúa en $x = -2$:

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$$\frac{1}{(-2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (ax^2 + b) : \frac{1}{(-2)^2} = a(-2)^2 + b : 4a + b = \frac{1}{4}$$

Continúa en $x = 2$:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\frac{1}{(-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + b) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2} : a2^2 + b = \frac{1}{2^2} : 4a + b = \frac{1}{4}$$

En definitiva se llega a una sola relación.

$$4a + b = \frac{1}{4}$$

La segunda relación se obtiene con la condición de derivabilidad. Una forma sencilla de demostrar la derivabilidad de la función en un punto frontera (punto donde cambia la expresión de la función), es demostrar que en dicho punto las derivadas laterales coinciden.

La derivada de la función se obtiene derivando las distintas expresiones que la definen y expresando los intervalos en forma abierta.

$$f'(x) = \begin{cases} -2/x^3 & \text{sí } x < -2 \\ 2ax & \text{sí } -2 < x < 2 \\ -2/x^3 & \text{sí } x > 2 \end{cases}$$

Derivable en $x = -2 \Leftrightarrow f'(-2^-) = f'(-2^+)$

$$\left. \begin{aligned} f'(-2^-) &= \frac{-2}{(-2)^3} = \frac{1}{4} \\ f'(-2^+) &= 2a \cdot (-2) = -4a \end{aligned} \right\} : \frac{1}{4} = -4a$$

Derivable en $x = 2 \Leftrightarrow f'(2^-) = f'(2^+)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 2a \cdot 2 = 4a \\ f'(2^+) = \frac{-2}{2^3} = \frac{-1}{4} \end{array} \right\} : 4a = -\frac{1}{4}$$

Con la condición de derivabilidad se obtiene el valor de a.

$$a = -\frac{1}{16}$$

Con el valor de a y la condición de derivabilidad, se obtiene el valor de b.

$$\left. \begin{array}{l} 4a + b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{-1}{16} \end{array} \right\} : 4 \cdot \frac{-1}{16} + b = \frac{1}{4} : b = \frac{1}{2}$$

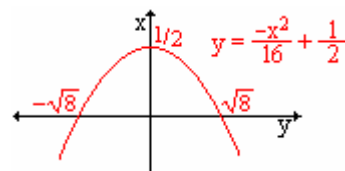
Para que la función sea continua y derivable en todo R su expresión debe ser:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{sí } x \leq -2 \\ -\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2} & \text{sí } -2 < x < 2 \\ 1/x^2 & \text{sí } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} -\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2} & \text{sí } |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{sí } |x| \geq 2 \end{cases}$$

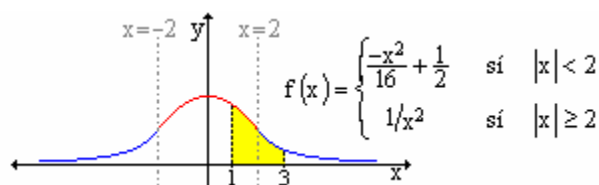
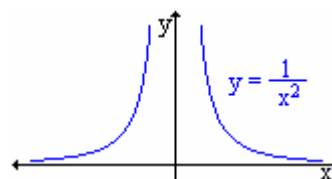
Nota: Se debe comprobar que la condición de derivabilidad en 2 y en -2 coinciden, en caso contrario, no hubieran existido valores de a y b que hicieran continua y derivable a la función en todo R.

b. Aunque no se pide en el enunciado es conveniente esbozar la gráfica de la función. La función está definida por dos expresiones que se corresponden a gráficas elementales.

$y = -\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2}$: Parábola abierta hacia $-\infty$ que tiene su vértice en el punto $(0, \frac{1}{2})$ y que corta al eje OX en los puntos $(-\sqrt{8}, 0)$ y $(\sqrt{8}, 0)$



$y = \frac{1}{x^2}$: Hipérbola de simetría par, siempre positiva, tiene asíntota vertical en $x = 0$ y horizontal en $y = 0$.



Como la región que se pide está bajo dos expresiones diferentes, la integral la dividimos en dos partes.

$$\text{AREA} = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2} \right) dx + \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{x^3}{16 \cdot 3} + \frac{1}{2} x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_2^3$$

Nota: $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

$$\begin{aligned} \text{AREA} &= \left(\frac{-x^3}{48} + \frac{x}{2} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{-1}{x} \right) \Big|_2^3 \stackrel{\text{BARROW}}{=} \left[\left(\frac{-2^3}{48} + \frac{2}{2} \right) - \left(\frac{-1^3}{16 \cdot 3} + \frac{1}{2} \right) \right] + \left[\left(\frac{-1}{3} \right) - \left(\frac{-1}{2} \right) \right] = \\ &= \left[\frac{5}{6} - \frac{23}{48} \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{17}{48} + \frac{1}{6} = \frac{25}{48} u^2 \end{aligned}$$