UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

2008 – 2009 (Modelo)

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico..

CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos

Dados el plano $1\pi \equiv x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto P(–2, 3, 2), perteneciente al plano π, se pide:

- **a)** (0,5 puntos). Determinar al posición relativa de π y r.
- **b)** (1 punto). Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a *r*.
- **c)** (1,5 puntos). Sea Q el punto de intersección de r y t. Si *s* es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de *s*, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

Solución.

a. Para conocer la posición relativa de un plano y una recta, se estudia el producto escalar del vector de dirección de la recta y el vector normal del plano.

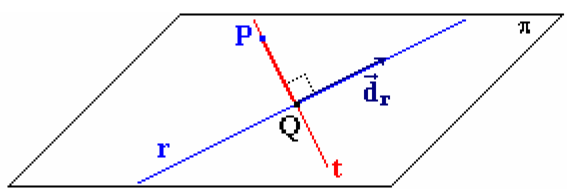
$$\left.\begin{matrix} \vec{n}_\pi = (1,2,-1) \\ \vec{d}_r = (2,1,4) \end{matrix}\right\} : \vec{n}_\pi \circ \vec{d}_r = (1,2,-1)\circ(2,1,4) = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{d}_r$$

Los vectores de dirección de la recta y normal del plano son perpendiculares, por lo tanto existen dos posibilidades, que la recta este contenida en el plano o que la recta sea paralela al plano. Para distinguirlas, se comprueba si el punto A = (3, 2, 5), perteneciente a la recta, cumple la ecuación del plano, en caso afirmativo la recta estará contenida en el plano, en caso contrario la recta será paralela al plano.

$$3 + 2\cdot 2 - 5 = 2$$

Las coordenadas de A cumplen la ecuación el plano, La recta r está contenida en el plano π.

b. Si Q es el punto de intersección de las dos rectas, el vector $\overline{PQ}$ debe ser perpendicular al vector de dirección de la recta r $\left(\vec{d}_r = (2,1,4)\right)$. El punto



$$Q \in r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow Q = (3+2\lambda,\ 2+\lambda,\ 5+4\lambda)$$

y el vector $\overline{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = (3 + 2\lambda - (-2), 2 + \lambda - 3, 5 + 4\lambda - 2)$

$$\left.\begin{matrix} \overline{PQ} = (5+2\lambda, -1+\lambda, 3+4\lambda) \\ \vec{d}_r = (2,1,4) \end{matrix}\right\} : \overline{PQ} \perp \vec{d}_r \Rightarrow \overline{PQ} \circ \vec{d}_r = 0$$

$$\overline{PQ} \circ \vec{d}_r = (5+2\lambda, -1+\lambda, 3+4\lambda)\circ(2,1,4) = 0$$

$$(5+2\lambda)\cdot 2 + (-1+\lambda)\cdot 1 + (3+4\lambda)\cdot 4 = 0$$

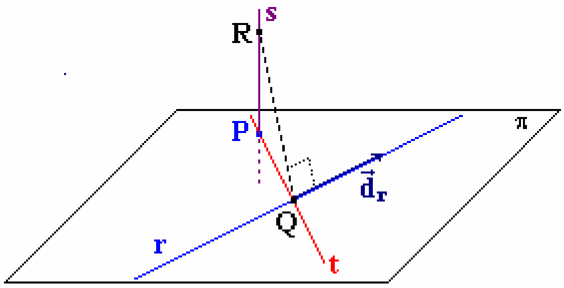
$$10 + 4\lambda - 1 + \lambda + 12 + 16\lambda = 0 : \ 21 + 21\lambda = 0 : \ \lambda = -1$$

$$\overline{PQ} = (5 + 2\cdot(-1), -1 + (-1), 3 + 4\cdot(-1)) = (3, -2, -1)$$

Conocido el vector de dirección $\overline{PQ}$ y un punto P, se obtiene la ecuación continua de la recta buscada (t).

$$t \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

c. Hay que demostrar que el vector $\overline{QR}$ es perpendicular al vector de dirección de la recta r $\left(\vec{d}_r = (2, 1, 4)\right)$, y por tanto que su producto escalar es cero.



El punto Q se conoce del apartado anterior, si λ = −1, Q = (3 + 2·(−1), 2 + (−1), 5 + 4·(−1)) = (1, 1, 1).

El punto R, pertenece a la recta s, y se puede expresar en función de las ecuaciones paramétricas de la recta s.

$$s \equiv \begin{cases} P = (-2, 3, 2) \\ \vec{d}_s = \vec{n}_\pi = (1, 2, -1) \end{cases} : s \equiv \begin{cases} x = -2 + \mu \\ y = 3 + 2\mu \Rightarrow R = (-2 + \mu, 3 + 2\mu, 2 - \mu) \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

Conocido el punto R se calcula el vector $\overline{QR}$.

$$\overline{QR} = \vec{r} - \vec{q} = (-2 + \mu, 3 + 2\mu, 2 - \mu) - (1, 1, 1) = (-3 + \mu, 2 + 2\mu, 1 - \mu)$$

Conocido $\overline{QR}$, se estudia el producto escalar $\overline{QR} \circ \vec{d}_r$

$$\overline{QR} \circ \vec{d}_r = (-3 + \mu, 2 + 2\mu, 1 - \mu) \circ (2, 1, 4) = (-3 + \mu) \cdot 2 + (2 + 2\mu) \cdot 1 + (1 - \mu) \cdot 4 =$$

$$= -6 + 2\mu + 2 + 2\mu + 4 - 4\mu = 0 \quad \forall\, \mu \in R$$

Cualquier punto de la recta s, forma con el punto Q un vector perpendicular a la recta r.

<u>Ejercicio</u> 2. Calificación máxima: 3 puntos

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

a) (1 punto). Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x).

b) (1 punto). Hallar los máximos y mínimos locales de f(x).

c) (1 punto). Dibujar la gráfica de f(x).

Solución.

a. La función f(x) está definida por expresiones polinómicas, por lo tanto su continuidad y derivabilidad solo hay que estudiarla en el punto frontera (x = 3/2).

Para que la función sea continua en x = 3/2, se debe cumplir:

$$f\left(3/2\right) = \lim_{x \to 3/2} f(x) = \lim_{x \to 3/2^-} f(x) = \lim_{x \to 3/2^+} f(x)$$

$$\frac{7}{12}\left(1 - \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2\right) = \lim_{x \to 3/2^-}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \lim_{x \to 3/2^+} \frac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right)$$

$$1 - \frac{\left(3/2\right)^2}{4} = \frac{7}{12}\left(1 - \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2\right)$$

$$\frac{7}{16} = \frac{7}{16}$$

La función es continua.
Para que la función sea derivable en x = 3/2, se debe cumplir:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right)=f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

Hace falta la expresión de la derivada.

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x<\dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{7}{6}(x-2) & \text{si} \quad x\geq\dfrac{3}{2}\end{cases} : \begin{cases} f'\left(\dfrac{3}{2}^-\right)=-\dfrac{3/2}{2}=-\dfrac{3}{4}\\ f\left(\dfrac{3}{2}^+\right)=-\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{3}{2}-2\right)=\dfrac{7}{12}\end{cases} : f'\left(\frac{3}{2}^-\right)\neq f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

La función no es derivable en x = 3/2

b. Una función alcanza un extremo local o relativo en x_o si $f\,'(x_o) = 0$ y $f\,''(x_0) \neq 0$, con el siguiente criterio: Si $f\,''(x_0) > 0$, en $(x_o, f(x_o))$ existe un mínimo; Si $f\,''(x_0) <0$, en $(x_o, f(x_o))$ existe un máximo.

En los puntos donde la función no sea derivable, se alcanzará un extremo relativo si el signo de $f\,'(x_o^-)$ es distinto al signo de $f\,'(x_o^+)$, con el siguiente criterio:

Si $f\,'(x_o^-) < 0$ y $f\,'(x_o^+) > 0$, mínimo; si $f\,'(x_o^-) > 0$ y $f\,'(x_o^+) < 0$, máximo.

$$f\,'(x) = 0: \begin{cases}-\dfrac{x}{2}=0 \;:\quad x=0\\ -\dfrac{7}{6}(x-2)=0 : x=2\end{cases} : \quad f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x<\dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{7}{6} & \text{si} \quad x\geq\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

(0, f(0)) la función presenta un máximo local
(2, f(2)) la función presenta un máximo local.

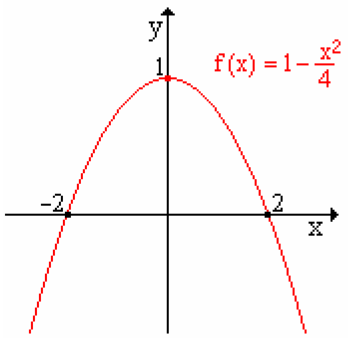
$$f(0)=1-\frac{0^2}{4}=1\Rightarrow(0,1)\text{existe un máximo local}$$

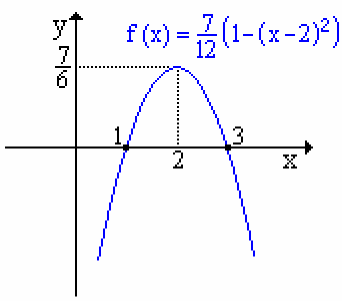
$$f(2)=\frac{7}{12}\left(1-(2-2)^2\right)=\frac{7}{6}\Rightarrow\left(2,\frac{7}{6}\right)\text{existe un máximo local}$$

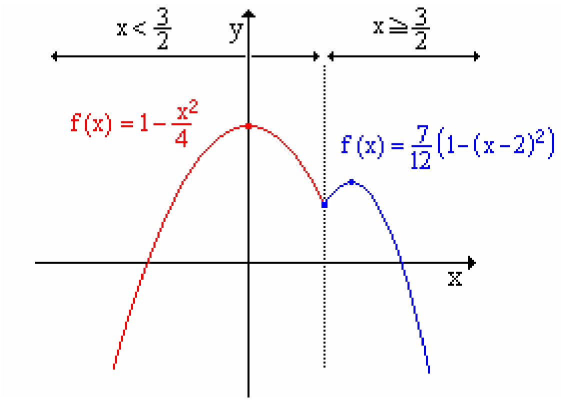
En x = 3/2, se dan las condiciones de mínimo local: $\begin{cases}f'\left(\dfrac{3}{2}^-\right)<0\\ f'\left(\dfrac{3}{2}^+\right)>0\end{cases}$

En $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{16}\right)$ la función presenta un mínimo local.

a. La gráfica de la función se puede obtener por desplazamientos y deformación de la función $y = x^2$, y calculando los puntos de corte con los ejes.







Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-3y=2k \\ 3x-5y=k \end{cases}$$

a) (1 punto). Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) (1 punto). Resolverlo en los casos en que sea posible.

Solución.

a. El sistema viene definido por las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k \end{pmatrix} \quad A\subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \leq \text{rg } A^*: \begin{cases} \text{rg } A\leq 2 \\ \text{rg } A^*\leq 3 \end{cases};\ n=3$$

Si $|A^*|\neq 0$, rg $A^*=3\neq$ rg A. Sistema incompatible. Se discute el tipo de solución para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz ampliada.

$$\det A^*=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k \end{vmatrix}=-3k-6k-30-(-27-2k-10k)=3k-3=3\cdot(k-1)$$

$$|A^*|=0\Rightarrow k=1$$

Discusión.

i. Si $k\neq 1$. $|A^*|\neq 0$, rg $A^*=3\neq$ rg A. Sistema incompatible.

ii. Si $k=1$. $|A^*|=0$, rg $A^*<3$. $\text{rg } A=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ rg A = 2. Como la matriz ampliada no puede tener menor rango que la matriz de coeficientes, rg A = rg A* = n = 2. Sistema compatible determinado

b. Solo admite solución para k = 1. En este caso el rango del sistema es dos, por lo tanto en el sistema solo hay dos ecuaciones linealmente independientes.

$$*S':\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-3y=2 \end{cases}$$

El sistema se puede resolver por cualquier método, siendo su solución:

$$x=7;\ y=4$$

* Para seleccionar las ecuaciones linealmente independiente recomiendo tomar las ecuaciones que contengan los coeficientes del menor de orden dos distinto de cero, en este caso la 1ª y la 2ª.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución.

Se calcula el determinante mediante las propiedades en función de x, se iguala a cero y se resuelve la ecuación.

Para calcular el determinante se factorizan todos sus términos, si alguna fila o columna tiene un factor común se saca como factor del determinante, como indican sus propiedades.

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x-1)(x+1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & (x-1)(x+1) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 : (x-1) \\ C_3 : (x+1) \end{Bmatrix} =$$

$$= (x-1)(x+1)\begin{vmatrix} 2(x+1) & x+1 & (x+1) \\ 1 & x+1 & 1 \\ (x-1) & x-1 & (x-1) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 : (x+1) \\ F_3 : (x-1) \end{Bmatrix} = (x-1)^2(x+1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Usando el término 3.3 se hacen ceros en la 3ª columna, obteniendo un determinante triangular, que es igual al producto de los términos de la diagonal.

$$(x-1)^2(x+1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 = F_1 - F_3 \\ F_2 = F_2 - F_3 \end{Bmatrix} = (x-1)^2(x+1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x(x-1)^2(x+1)^2$$

Igualando la expresión del determinante a cero, se resuelve la ecuación.

$$x(x-1)^2(x+1)^2 = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ (x-1)^2 = 0 : x-1 = 0 : x = 1 \\ (x+1)^2 = 0 : x+1 = 0 : x = -1 \end{cases}$$

OPCIÓN B

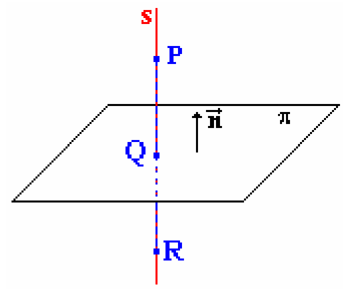
Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos

Dados el punto $P(1, -1, 2)$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 11 = 0$, se pide:

- **a)** (1,5 puntos). Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto R simétrico del punto P respecto del plano π.
- **b)** (1,5 puntos). Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overline{PQ}$.

Solución.

a. El punto Q se encuentra como intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P, que denomino s. La recta s se determina con el vector normal del plano π y con el punto P, conviene expresarla en paramétricas para luego poder calcular el punto de intersección entre s y π.



$$s:\begin{cases} P=(1,-1,2) \\ \vec{n}_\pi=(2,-1,1)\end{cases} \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=2+\lambda\end{cases}$$

Conocidas las ecuaciones paramétricas de s, se calcula Q como intersección de π con s, teniendo en cuenta que las coordenadas del punto Q satisfacen la ecuación del plano y de la recta.

$$Q=(x_q,y_q,z_q):\begin{cases} \pi\equiv 2x_q-y_q+z_q-11=0 \\ s\equiv\begin{cases} x_q=1+2\lambda_q \\ y_q=-1-\lambda_q \\ z_q=2+\lambda_q\end{cases}\end{cases} : 2(1+2\lambda_q)-(-1-\lambda_q)+(2+\lambda_q)-11=0$$

$$2+4\lambda_q+1+\lambda_q+2+\lambda_q-11=0 : 6\lambda_q-6=0 : \lambda_q=1$$

Conocido el valor del parámetro en el punto Q, se calculan sus coordenadas.

$$Q=\begin{cases} x_q=1+2\cdot 1=3 \\ y_q=-1-1=-2 \\ z_q=2+1=3\end{cases} : Q=(3,-2,3)$$

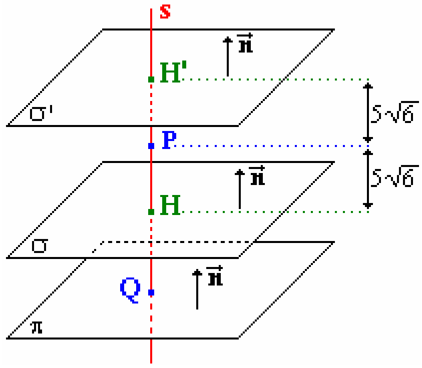
El punto R, simétrico de P respecto del plano π se calcula teniendo en cuenta que también es simétrico respecto de Q, y que por tanto, el punto Q es el punto medio del segmento $\overline{PR}$.

$$Q(x_q,y_q,z_q)=\left(\frac{x_p+x_r}{2},\frac{y_p+y_r}{2},\frac{z_p+z_r}{2}\right):\begin{cases} x_q=\dfrac{x_p+x_r}{2}\Rightarrow x_r=2x_q-x_p \\ y_q=\dfrac{y_p+y_r}{2}\Rightarrow y_r=2y_q-y_p \\ z_q=\dfrac{z_p+z_r}{2}\Rightarrow z_r=2z_q-z_p\end{cases}$$

$$R:\begin{cases} x_r=2\cdot 3-1=5 \\ y_r=2\cdot(-2)-(-1)=-3 \\ z_r=2\cdot 3-2=4\end{cases}\Rightarrow R=(5,-3,4)$$

b. Se pide calcular un plano, que denomino σ, paralelo a π conocido un punto H contenido en él. El plano buscado (σ) pertenece al haz de planos paralelos a π, y por tanto su ecuación será de la forma:

$$2x - y + z + K = 0 \quad \forall K \in R$$



El parámetro K se calcula conocidas las coordenadas de H.

Las coordenadas de H se calculan sabiendo que pertenece a la recta s, recta que contiene a P y a Q, y que dista $5\sqrt{6}$ unidades del punto P.

Si el punto H pertenece a la recta s, sus coordenadas se pueden poner en función de las ecuaciones paramétricas de s.

$$H \in s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow H = (1 + 2\lambda_h, -1 - \lambda_h, 2 + \lambda_h)$$

El parámetro λ_h se calcula conocida la distancia de H a P

$$d(H - P) = \sqrt{(x_h - x_p)^2 + (y_h - y_p)^2 + (z_h - z_p)^2}$$

$$5\sqrt{6} = \sqrt{(1 + 2\lambda_h - 1)^2 + (-1 - \lambda_h - (-1))^2 + (2 + \lambda_h - 2)^2}$$

$$5\sqrt{6} = \sqrt{(2\lambda_h)^2 + (-\lambda_h)^2 + \lambda_h{}^2}$$

$$5\sqrt{6} = \sqrt{6\lambda_h{}^2}$$

Elevando al cuadrado se despeja λ_h.

$$6\lambda_h^2 = 5^2 \cdot 6 \Rightarrow \lambda_h = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_h = 5 : H = (11, -6, 7) \\ \lambda_h = -5 : H' = (-9, 4, -3) \end{cases}$$

Se obtiene dos posibles puntos, con cada uno se calcula un plano.

H = (11, −6, 7): $2 \cdot 11 - (-6) + 7 + K = 0 \ : \ K = -35$

σ: 2x − y + z − 35 = 0

H’ = (−9, 4, −3): $2 \cdot (-9) - 4 + (-3) + K = 0 \ : \ K = 25$

σ’: 2x − y + z + 25 = 0

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos

Si A = (C_1, C_2, C_3) es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que det(A) = 4, se pide:

- **a)** (1 puntos). Calcular det(A^3) y det(3A).
- **b)** (2 puntos). Calcular det(B) y det(B^{-1}), siendo B = ($2C_3$, $C_1 - C_2$, $5C_1$) la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, \ C_1 - C_2, \ 5C_1$$

Solución.

a. Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^3 = 4^3 = 64$$

En general: $|A^n| = |A|^n$

La matriz 3A es:

$$3A = 3 \cdot (C_1, C_2, C_3) = (3C_1, 3C_2, 3C_3)$$

$$|3A| = |3C_1, 3C_2, 3C_3| \overset{*}{=} 3^3 |A| = 3^3 \cdot 3 = 108$$

En general: $|k \cdot A_n| = k^n \cdot |A|$

* Se saca factor común de tres por cada columna.

b. Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|B| = |2C_3, C_1 - C_2, 5C_1| = 2 \cdot 5 \cdot |C_3, C_1 - C_2, C_1| = 10 \cdot \left[\underbrace{|C_3, C_1, C_1|}_{0*} - |C_3, C_2, C_1| \right] =$$

$$= -10 \cdot |C_3, C_2, C_1| \overset{**}{=} +10 \cdot |C_1, C_2, C_3| = 10 \cdot |A| = 10 \cdot 4 = 40$$

Para calcula el determinante de B^{-1}, se tiene en cuenta que $B \cdot B^{-1} = I$.

$$|B \cdot B^{-1}| = |I|$$

$$|B| \cdot |B^{-1}| = 1 \Rightarrow |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{40}$$

* Si en un determinante dos columnas son iguales, el determinante es nulo.

** Si se intercambia la posición de dos columnas en un determinante, este cambia de signo

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos

Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

a) (1 punto). Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en x = 0.

b) (1 punto). Estudiar cuándo se verifica que f '(x) = 0. Puesto que f(1) = f(−1), ¿existe contradicción con el Teorema de Ralle en el intervalo [−1,1]?

Solución.

a. Para poder trabajar con la función el primer paso será expresar la función sin el valor absoluto.

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2+1} & \text{Si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & \text{Si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad en x = 0. Para que la función sea continua en x = 0 se debe cumplir:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\frac{0}{0^2 + 1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{x^2 + 1}$$

$$0 = \frac{0}{0^2 + 1} = \frac{-0}{0^2 + 1} = 0$$

La función es continua en x = 0.

Derivable en x = 0. Para que la función sea derivable en x = 0 se debe cumplir:

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

Calculo de la derivada:

$$f'(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)' & \text{Si} \quad x<0\\ \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' & \text{Si} \quad x>0\end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)'=-\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=-\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{Si} \quad x<0\\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & \text{Si} \quad x>0\end{cases}:\begin{cases}f'(0^-)=\dfrac{0^2-1}{(0^2+1)^2}=-1\\ f'(0^+)=\dfrac{1-0^2}{(0^2+1)^2}=1\end{cases}\Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)$$

La función no es derivable en x = 0

b. f '(x) = 0:

$$f'(x)=0:\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=0 & \text{Si} \quad x<0: x^2-1=0: x=-1^*\\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 & \text{Si} \quad x>0: 1-x^2=0: x=+1^*\end{cases}$$

* Hay que tener en cuenta el intervalo de definición.

Teorema de Rolle: " Sea f(x) una función continua en [a , b], derivable en (a , b) y tal que f(a) = f(b), entonces existe al menos un c ∈ (a , b) tal que f '(c) = 0, es decir, hay un punto c del intervalo (a, b) en el que la tangente a la curva es horizontal.

No existe contradicción con el teorema de Rolle por que la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$ no es derivable en el intervalo (−1, 1), por lo tanto aunque f (l) = f (−1), no tiene por que existir un punto interior del intervalo en el que la derivada se anule, como ocurre en este caso, que la derivada de la función no se anula en el intervalo (−1, 1).

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos

Sea:

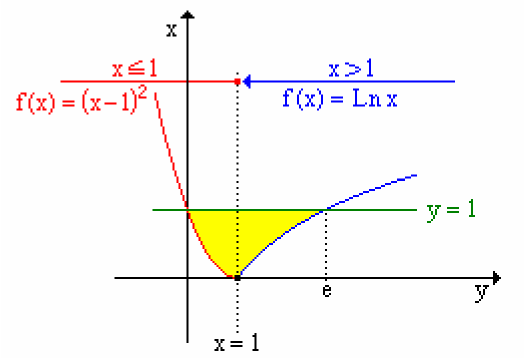
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{Si} \quad x\le 1\\ \mathrm{Ln}\,(x) & \text{Si} \quad x>1\end{cases}$$

donde Ln(x) significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f(x), y por la recta y = 1.

Solución.

Lo primero es acotar el área, si es posible, representar el área pedida y a continuación calcular los límites de integración.

La función f(x) esta definida por expresiones elementales $\left((x-1)^2, \mathrm{Ln}\ x\right)$, por lo que su representación es sencilla



El área pedida se calcula como suma de dos áreas, la primera comprendida entre la función $y = (x-1)^2$, y las rectas y = 1, x = 1. El límite de integración inferior se calcula como intersección de $y = (x-1)^2$ con y = 1.

$$\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ y = 1 \end{cases} : (x-1)^2 = 1 : x^2 - 2x = 0$$

x = 0; x = 2 (no válida por ser mayor que 1).

La segunda, comprendida entre y = Ln x, y = 1, x = 1. El limite superior se calcula como intersección de y = Ln x con y = 1.

$$\begin{cases} y = \text{Ln}\, x \\ y = 1 \end{cases} : \text{Ln}\, x = 1 : x = e^1 = e$$

Conocido los limites de integración se calcula el área.

$$\text{Área} = \int_0^1 \left(1-(x-1)^2\right)dx + \int_1^e (1 - \text{Ln}\, x)\,dx$$

Cálculo de las primitivas:

$$\int \left(1-(x-1)^2\right)dx = \int \left(2x - x^2\right)dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C = x^2 - \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int (1 - \text{Ln}\, x)\,dx = x - \int \text{Ln}\, x\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \text{Ln}\, x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\} = x - \left(\text{Ln}\, x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \right) =$$

$$= x - x\,\text{Ln}\, x + \int dx = x - x\,\text{Ln}\, x + x + C = 2x - x\,\text{Ln}\, x + C$$

Calculadas las primitivas, se calcula el área.

$$\text{Área} = \int_0^1 \left(1-(x-1)^2\right)dx + \int_1^e (1 - \text{Ln}\, x)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + (2x - x\,\text{Ln}\, x]_1^e =$$

$$= \left(1^2 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right) + (2e - e\,\text{Ln}\, e) - (2\cdot 1 - 1\cdot \text{Ln}\, 1) = \frac{2}{3} - 0 + e - 2 = e - \frac{4}{3}\, u^2$$