UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

MODELO
Curso 2009/2010 MATERIA: MATEMATICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN
El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (l". o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos. Dada la función:

$$f(x)=e^{x}+ae^{-x},$$

siendo *a* un nún1ero real, estudiar los siguientes apartados en función de *a:*

a) (1,5 puntos). Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x)

b) (1 punto). Estudiar para qué valor, o valores, de *a* la función *f* tiene alguna asíntota horizontal.

c) (0,5 puntos). Para a = 0, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas x = 0, x = 2.

Solución.

a. Una función presenta extremos relativos en aquellos puntos donde su primera derivada sea cero y su segunda derivada sea distinta de cero, con el siguiente criterio:
- Si la 2ª derivada es negativa, máximo
- Si la 2ª derivada es positiva, mínimo.

$$f'(x)=e^{x}+ae^{-x}\cdot(-1)=e^{x}-ae^{-x}=e^{x}-\frac{a}{e^{x}}\ :\ f''(x)=e^{x}-ae^{-x}\cdot(-1)=e^{x}+ae^{-x}=e^{x}+\frac{a}{e^{x}}$$

$$f'(x)=0\ :\ e^{x}-\frac{a}{e^{x}}=0\ :\ e^{x}=\frac{a}{e^{x}}\ :\ e^{2x}=a$$

Dependiendo del valor que tome a se presenta dos casos distintos:

i. Si $a\le 0$, la igualdad no tiene solución ($e^{x}>0$), por tanto la función no tiene extremos relativos, siendo la derivada positiva para cualquier valor real de x, y por tanto, la función es estrictamente creciente.

ii. Si $a>0$, la igualdad tiene solución:

$$e^{2x}=a\ ;\ e^{x}=\sqrt{a}\ ;\ x=\mathrm{Ln}\sqrt{a}\ \ ;\ f''\left(\mathrm{Ln}\sqrt{a}\right)=e^{\mathrm{Ln}\sqrt{a}}+\frac{a}{e^{\mathrm{Ln}\sqrt{a}}}=\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}>0$$

La función tiene un mínimo en $\left(\mathrm{Ln}\sqrt{a},f\left(\mathrm{Ln}\sqrt{a}\right)\right)$.

Monotonía: $\begin{cases}\text{Si } x\in\left(-\infty,\mathrm{Ln}\sqrt{a}\right)\Rightarrow f'(x)<0: f(x)\text{ Decreciente}\\ \text{Si } x\in\left(\mathrm{Ln}\sqrt{a},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)>0: f(x)\text{ Creciente}\end{cases}$

b. Las asíntotas horizontales tienen la forma y = L, donde $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}+ae^{-x}\right)=e^{-\infty}+ae^{-(-\infty)}=\frac{1}{e^{\infty}}+ae^{\infty}=\frac{1}{\infty}+a\cdot\infty=0+a\cdot\infty$$

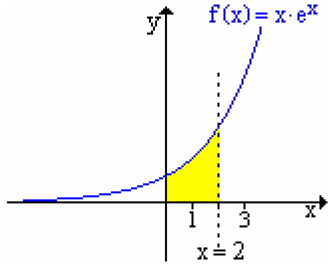
i. Si $a\ne 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$, dependiendo del signo de a. En este caso, la función no tiene asíntota horizontal hacia $-\infty$.

ii. Si a = 0. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$, La función tiene una asíntota horizontal (y = 0, eje OX) hacia $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x + ae^{-x}\right) = e^{\infty} + ae^{-\infty} = \infty + \frac{a}{e^{\infty}} = \infty + \frac{a}{\infty} = \infty + 0 = \infty$$

Independientemente al valor que tome a, la función no tiene asíntota hacia $-\infty$.

c. Se pide calcular el área coloreada de la figura.



$$A = \int_0^2 e^x dx = \left(e^x\right]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos. **Se** consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

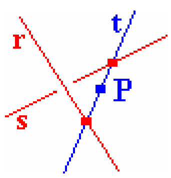
$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

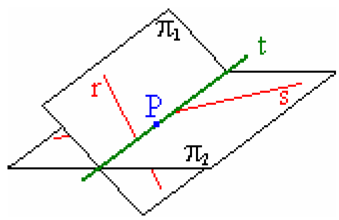
a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos). Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Solución.

a. Sea P el punto (0, 0, 0).





La recta pedida, t, se encuentra por intersección de dos planos, π_1 y π_2.

$\pi_1: \begin{cases} P \in \pi_1 \\ r \subset \pi_1 \end{cases}$ De la recta r se conoce: $\begin{cases} A(0,1,2) \\ \bar{d}_r = (-1,1,-2) \end{cases}$. El plano π_1 se calcula con: $\begin{cases} P = (0,0,0) \\ \overline{PA} = (0,1,2) \\ \bar{d}_r = (-1,1,-2) \end{cases}$

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando por los elementos de la 1ª fila;

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

simplificando y ordenando

$$\pi_1 \equiv -4x - 2y + z = 0$$

$\pi_2: \begin{cases} P \in \pi_2 \\ s \subset \pi_2 \end{cases}$ De la recta s se conoce: $\begin{cases} B = (5,0,-1) \\ \bar{d}_s = (6,2,2) \end{cases}$. El plano π_2 se calcula con: $\begin{cases} P = (0,0,0) \\ \overline{PB} = (5,0,-1) \\ \bar{d}_s = (3,1,1) \end{cases}$

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando por los elementos de la 1ª fila;

$$x \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

simplificando y ordenando

$$\pi_2 \equiv \ x - 8y + 5z = 0$$

La recta t buscada se obtiene por intersección de planos (observar que al plano π_1 lo multiplico por -1 para cambiarle los signos).

$$t \equiv \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases} \text{ En paramétricas } \xrightarrow{x=\lambda} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\dfrac{21}{2}\lambda \ t \\ z = -17\lambda \end{cases}$$

b. La mínima distancia entre dos rectas se puede calcular de varias formas, la mas sencilla es:

$$d(r-s) = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \circ (\vec{d}_r \times \vec{d}_s)}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \right|$$

Donde $\times$ denota el producto vectorial. Lo mas sencillo es calcular cada término por separado.

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-1, 1. -2) \times (3, 1, 1) = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3, -5, -4)$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (5-0, 0-1, -1-2) = (5, -1, -3)$$

$$\overrightarrow{AB} \circ (\vec{d}_r \times \vec{d}_s) = (5,-1,-3) \circ (3,-5,-4) = 5 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5) + (-3) \cdot (-4) = 32$$

Sustituyendo en la expresión de la distancia:

$$d(r-s) = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \circ (\vec{d}_r \times \vec{d}_s)}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} \right| = \left| \frac{32}{\sqrt{50}} \right| = \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos. Obtener, para todo número natural *n,* el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Solución.

Lo primero será obtener la potencia enésima de cada matriz.

Si denominamos por $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y por $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, sus potencias enésimas serán:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 2 \cdot A \cdot A = 2A^2 = 2 \cdot 2A = 2^2 A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = 2^2 \cdot A \cdot A = 2^2 A^2 = 2^2 \cdot 2A = 2^3 A$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^n = 2^{n-1} \cdot A$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2B$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = 2 \cdot B \cdot B = 2B^2 = 2 \cdot 2B = 2^2 B$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = 2^2 \cdot B \cdot B = 2^2 B^2 = 2^2 \cdot 2B = 2^3 B$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$B^n = 2^{n-1} \cdot B$$

Sustituyendo en la expresión que se pide:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1+1 & 1+(-1) \\ 1+(-1) & 1+1 \end{pmatrix} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^n \cdot I$$

Donde I es la matriz Unidad o identidad.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ky + z = k + 2 \\ kx + y + z = k \\ x + y + kz = -2(k+1) \end{cases}$$

Solución.

El sistema lo describen la matriz de coeficientes (A) y la matriz ampliada (A^*).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{pmatrix}$$
$$A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A^* \le n = 3$$

Si el $|A| \neq 0$, rg A = 3 = rg A* = n. Sistema compatible determinado. Teniendo en cuenta lo anterior se discute el sistema para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k + k + k - \left(1 + 1 + k^3\right) = -k^3 + 3k - 2$$

$$|A| = 0 : -k^3 + 3k - 2 = 0 \underset{\text{Ruffini}}{:} |A| = -(x-1)^2(x-2) = 0 : \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Discusión.

i. Si $k \neq -2, 1$: $|A| \neq 0$, rg A = 3 = rg A* = n. **Sistema compatible determinado**.

ii. Si $k = -2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$, rg A < 3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; rg A = 2.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ rg A* < 2. Los menores orlados a $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, son el determinante de la matriz de coeficientes (que es cero) y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, por lo tanto, rg A = rg A* = 2 < n = 3. **Sistema compatible indeterminado**.

iii. Si k = 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, sin necesidad de cálculo: rg A = 1. $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; rg A* = 2. rg A ≠ rg A*. **Sistema incompatible**

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos. Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Sé pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (−1, f(−1)).

b) (1 punto). Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado a).

Solución.

a. La ecuación de la recta tangente a una función y = f (x) en un punto x_o en forma punto pendiente es:

$$y - f(x_o) = f'(x_o) \cdot (x - x_o)$$

Aplicada la expresión a $x_o = -1$ queda:

$$y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \ \Rightarrow \ f'(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 2$$

Sustituyendo en la expresión de la recta tangente:

$$y - 0 = 2 \cdot (x + 1) \ : \ \ y = 2x + 2$$

b. Los puntos de intersección entre la función y su tangente se hallan con el sistema formado con la ecuación de la función y la ecuación de la tangente.

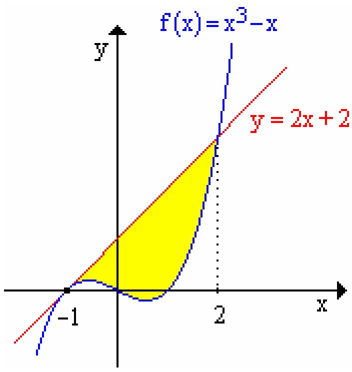
$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

El sistema se resuelve por igualación.

$$x^3 - x = 2x + 2 \ : \ \ x^3 - 3x - 2 = 0 \ \text{ Ruffini: } \begin{cases} x = -1 : y = 2 \cdot (-1) + 2 = 0 \\ x = 2 : y = 2 \cdot 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

La tangente y la función se cortan en los puntos (−1, 0) y (2, 4).

c. La figura adjunta representa el área pedida. Los límites de integración son los puntos de corte entre la función y su tangente, que se han calculado en el apartado anterior.



$$A = \int_{-1}^{2} \left((2x + 2) - (x^3 - x)\right) \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^3 + 3x + 2\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1)\right) = \frac{27}{4} u^2$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ x + \lambda y - z = 4 \\ -\lambda x - y - z = -5 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Discutirlo para los distintos valores del parámetro Λ.

b) (1 punto). Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto). Resolverlo para $\lambda = -2$.

Solución.

a. El sistema viene definido por dos matrices, A (matriz de coeficientes) y A* (matriz ampliada).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 4 \\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A^* \le n = 3$ Siendo n el nº de incógnitas.

Si el $|A| \ne 0$, rg A = 3 = rg A* = n. Sistema compatible determinado. Teniendo en cuenta lo anterior, el tipo de solución del sistema se discute para los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda + 0 - 1 - \left(-\lambda^2 + 0 + 1\right) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)\cdot(\lambda - 2)$$

$$|A| = 0 : (\lambda + 1)\cdot(\lambda - 2) = 0 : \begin{cases} \lambda + 1 = 0 : \lambda = -1 \\ \lambda - 2 = 0 : \lambda = 2 \end{cases}$$

Discusión:

i. Si $\lambda \ne -1, 2$. $|A| \ne 0$, rg A = 3 = rg A* = n. **Sistema compatible determinado**.

ii. Si $\lambda = -1$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3$. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ De los dos menores orlados a $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, uno es el determinante de la matriz de coeficientes, que es cero, y el otro es: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow \text{rg } A^* = 3$.

rg A = 2 ≠ rg A* = 3. **Sistema incompatible**.

iii. Si $\lambda = 2$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $|A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3$. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$.

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ De los dos menores orlados a $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, uno es el determinante de la matriz de coeficientes, que es cero, y el otro es: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ en la matriz ampliada no existen menores de orden tres distintos de cero, rg A* = 2.

rg A = rg A* = 2 ≠ n = 3. **Sistema compatible indeterminado**.

b. Para λ =2, el rango del sistema es 2, lo cual indica que el sistema solo tiene dos ecuaciones linealmente independientes, que son las necesarias para resolver el sistema. Para seleccionar las ecuaciones linealmente independientes que nos permitan resolver el sistema, se escogen las ecuaciones que contienen los coeficientes del menor de orden dos distinto de cero que nos ha permitido definir el rango del sistema $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$, en este caso la 1ª y la 2ª.

$$S': \begin{cases} x & & +z & =2 \\ x & +2y & +z & =4 \end{cases}$$

Para resolver el sistema es necesario transformar una de las incógnitas en parámetro y resolver las otras dos en función del parámetro. Para evitar equivocaciones, recomiendo que se tome como parámetro la incógnita de los coeficientes que no se utilizaron en el menor de orden dos, en este caso la z.

$$S': \begin{cases} x & & +z & =2 \\ x & +2y & +z & =4 \end{cases} \xrightarrow{z=\mu} \begin{cases} x & & =2-\mu \\ x & +2y & =4-\mu \end{cases}$$

Para resolver el sistema recomiendo el método de Cramer, aunque hay casos como este que el método de sustitución es bastante sencillo (la x está despejada en la 1ª ecuación y solo haría falta sustituirla en la segunda para despejar y).

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2-\mu & 0 \\ 4-\mu & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4-2\mu}{2} = 2-\mu \ ; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-\mu \\ 1 & 4-\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 2-\mu \\ y = 1 \qquad \forall \mu \in R \\ z = \mu \end{cases}$$

c. $\lambda = -2$: $\begin{cases} x & & +z & =2 \\ x & -2y & -z & =4 \\ 2x & -y & -z & =-5 \end{cases}$ Sistema compatible determinado. La solución se obtiene por el método de Cramer.

$$|A(\lambda = -2)| = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \ ; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-24}{4} = -6$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Solución: (–3, –6, 5)

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 Puntos.
Dados los puntos A(2, 2, 3) y B(0, −2, 1), hallar el punto o los puntos de la recta:

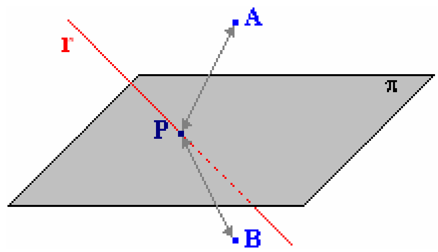
$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidisten de A y B.

Solución.

Los puntos del espacio que equidistan de dos puntos forman un plano denominado plano mediatriz.

El punto buscado es la intersección del plano mediatriz del segmento $\overrightarrow{AB}$ con la recta r.



Plano mediatriz. Sea P(x, y, z) un punto genérico del plano mediatriz:

$$d(P-A) = d(P-B)$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2))^2 + (z-1)^2}$$

Simplificando las raíces:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-0)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$$

Desarrollando los cuadrados y ordenando se obtiene la ecuación del plano mediatriz.

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$$

$$\pi \equiv 4x + 8y + 4z - 12 = 0$$

$$\pi \equiv x + 2y + z - 3 = 0$$

El punto buscado se obtiene por intersección de r con π. Una forma de calcular la intersección de una recta y un plano es sustituir las ecuaciones paramétricas de la recta en plano, despejar el parámetro y con el valor del parámetro obtenido, sustituyendo en la ecuaciones paramétricas de la recta obtener las coordenadas del punto de corte.

$$P: \begin{cases} r = \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{r \to \pi} (2+3\lambda) + 2(-\lambda) + (4+2\lambda) - 3 = 0$$

$$2 + 3\lambda - 2\lambda + 4 + 2\lambda - 3 = 0 \ : \ 3 - 3\lambda = 0 \ : \ \lambda = 1$$

$$P: \begin{cases} x_p = 2 + 3\cdot 1 = 5 \\ y_p = -1 \\ z_p = 4 + 2\cdot 1 = 6 \end{cases} : P = (5, -1, 6)$$

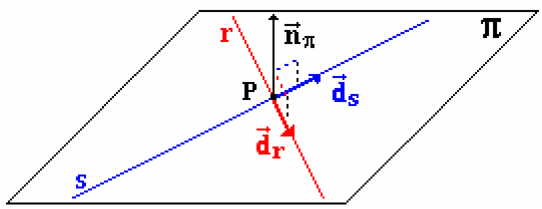
Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos. Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenadas O = (0, 0, 0).

Solución.

La recta buscada s, se obtiene mediante la mínima determinación lineal (un punto y un vector. El punto lo da el enunciado y el vector de obtiene mediante el producto vectorial del vector de dirección de la recta y el vector normal del plano.



$$\vec{d}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{d}_r = (5, -4, 1) \times (1, 2, 3) = \left(\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-14, -14, 14) = 14(-1, -1, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} P = (0, 0, 0) \\ \vec{d}_s = (-1, -1, 1) \end{cases} : s \equiv \frac{x-0}{-1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-0}{1}$$

$$s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y}{-1} = z$$