

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

MODELO

Curso 20010/2011 MATERIA: MATEMATICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x & + \lambda z & = & 2 \\ x & + \lambda y & - z & = & 1 \\ x & + 3y & + z & = & 2\lambda \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ .
- b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Solución.

a. El sistema está definido por las matrices de coeficientes (A) y ampliada (A*).

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Por dimensiones de las matrices, se puede establecer:

$$A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \leq \text{rg } A^* \leq 3; \quad n = 3$$

Si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, su rango será tres, igual al rango de la ampliada e igual número de incógnitas, siendo el sistema compatible determinado, y habrá que discutir el tipo de solución del sistema para los valores del parámetro que anulen el determinante de la matriz de coeficientes.

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0 + 3\lambda - (\lambda^2 + 0 - 3\lambda) = 6\lambda$$

$$|A| = 0 : 6\lambda = 0 : \lambda = 0$$

Discusión.

i. Si $\lambda \neq 0$. $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ra } A = 3 = \text{rg } A^* = n$. Sistema compatible determinado. Las soluciones en estos casos se pueden resolver por el método de Cramer.

ii. Si $\lambda = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$, $\text{rg } A < 3$. Se busca un menor de orden dos distinto

de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ $\text{rg } A = 2$.

$$\text{rg } A^* = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \geq \text{rg } A = 2. \text{ Partiendo del menor de orden dos distinto de}$$

cero, el único menor orlado que queda por estudiar es el formado por la 1ª, 2ª y 4ª columna.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \text{rg } A^* = 3$$

$\text{rg } A \neq \text{rg } A^*$ Sistema incompatible

b. $\lambda = 1: \begin{cases} x & + z & = & 2 \\ x & + y & - z & = & 1 \\ x & + 3y & + z & = & 2 \end{cases}$ Sistema compatible determinado. Método de Cramer.

$$|A| = 6\lambda \stackrel{\lambda=1}{=} 6$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = 0; \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos. Se consideran las rectas:

Dada la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

se pide:

- (1,5 puntos). Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas de f.
- (1,5 puntos). Calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f; el eje OX y las rectas $x=0$, $x=3$.

Solución.

a. Máximos y mínimos. Para que una función tenga un extremo relativo en un punto, la primera derivada de la función en el punto debe ser nula y la segunda distinta de cero.

Si $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$: Extremo relativo. Criterio: $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ mínimo} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0)) \text{ máximo} \end{cases}$

Primero se calculan las dos primeras derivadas, a continuación se iguala a cero la primera derivada y se obtienen los posibles extremos relativos, que se sustituyen en la segunda derivada para que mediante el criterio decidir si son máximos o mínimos relativos.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1)^2 - (x-1) \cdot 2 \cdot (x+1) \cdot 1}{((x+1)^2)^2} = \frac{3-x}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (x+1)^3 - (3-x) \cdot 3 \cdot (x+1)^2 \cdot 1}{((x+1)^3)^2} = \frac{2x-5}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0: \frac{3-x}{(x+1)^3} = 0: 3-x=0: x=3$$

$$f''(3) = \frac{2 \cdot 3 - 5}{(3+1)^4} = \frac{6}{256} > 0 \Rightarrow (3, f(3)) \text{ Mínimo}$$

$$f(3) = \frac{3-1}{(3+1)^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Máximo en $\left(3, \frac{1}{8}\right)$

Asíntotas verticales. Son rectas de la forma $x = a$. De existir estarán en los puntos excluidos del dominio donde además se cumpla que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

Tomando como referencia el dominio de la función $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty : x = -1 \text{ Asíntota vertical}$$

Posición relativa de la función respecto de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-1-1}{(-1^-+1)^2} = \frac{-2}{(0^-)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-1-1}{(-1^++1)^2} = \frac{-2}{(0^+)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Asíntota horizontal. Son rectas de la forma $y = L$.

$$L = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{2(x+1)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{1}{2(\pm \infty + 1)} = \frac{1}{\pm \infty} = 0$$

$y = 0$ Asíntota horizontal

Posición relativa de la función respecto la función

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - L) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x-1}{(x+1)^2} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2(-\infty+1)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

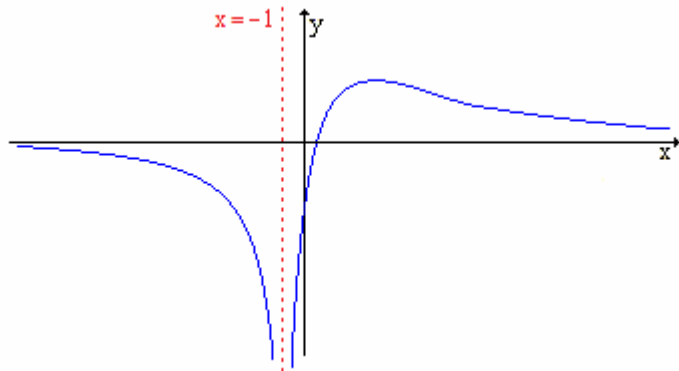
La función se aproxima por debajo de la asíntota

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2(+\infty+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

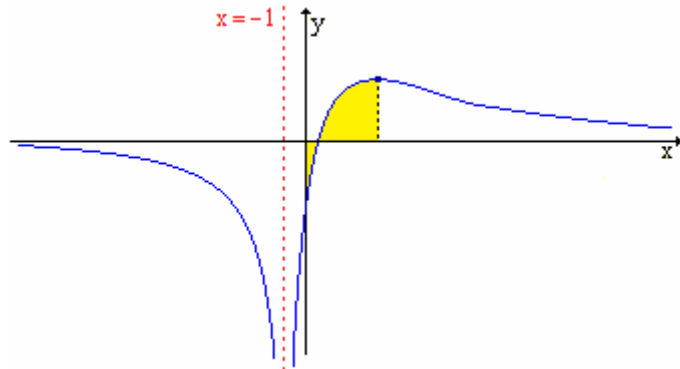
La función se aproxima por encima de la asíntota

La función corta a la asíntota horizontal en $(1, 0)$.

Con los datos obtenidos se recomienda esbozar la gráfica de la función para hacer más fácil el siguiente apartado.



b. El área pedida, como muestra la figura, tiene una región por debajo del eje de abscisa en el intervalo $(0, 1)$, y otra por encima $(1, 3)$, por lo que para su cálculo se deberá hacer como suma de dos integrales.



$$A = \left| \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx \right| + \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$$

Para calcular la primitiva de la función se usa el método de descomposición en fracciones simples de polinomios con raíces reales de multiplicidad mayor que uno.

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

El cálculo de las constantes A y B se hace por identificación de numeradores una vez sumadas las fracciones del miembro de la derecha de la igualdad.

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A \cdot (x+1) + B}{(x+1)^2} : x-1 = A \cdot (x+1) + B$$

$$x-1 = Ax + A + B = Bx + A + B : \begin{cases} \text{Término} & \text{Coeficientes} \\ x: & 1 = A \\ \text{Independiente} & -1 = A + B \end{cases} \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} \right) dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{2}{(x+1)^2} dx = \\ &= \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int (x+1)^{-2} dx = -\text{Ln}|x+1| - 2 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = \text{Ln}|x+1| + \frac{2}{x+1} + C \end{aligned}$$

Conocida la primitiva de la función se aplica la regla de Barrow a cada una de las integrales.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx \right| &= \left| \left(\text{Ln}|x+1| + \frac{2}{x+1} \right) \Big|_0^1 \right| = \left| \text{Ln}|1+1| + \frac{2}{1+1} - \left(\text{Ln}|0+1| + \frac{2}{0+1} \right) \right| = \\ &= \left| \text{Ln} 2 + 1 - (\text{Ln} 1 + 2) \right| = \left| \text{Ln} 2 - 1 \right| = 1 - \text{Ln} 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx &= \left(\text{Ln}|x+1| + \frac{2}{x+1} \right) \Big|_1^3 = \text{Ln}|3+1| + \frac{2}{3+1} - \left(\text{Ln}|1+1| + \frac{2}{1+1} \right) = \\ &= \text{Ln} 4 + \frac{2}{4} - \text{Ln} 2 - 1 = \text{Ln} \frac{4}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \text{Ln} 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$A = \left| \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx \right| + \int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = 1 - \text{Ln} 2 + \text{Ln} 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1} ; s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y s.
- b) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a las rectas r, s.

Solución.

a. La posición relativa de dos rectas se puede determinar mediante el rango de una matriz formada por los vectores de dirección de cada una de las rectas y un segmento formado entre dos puntos, cada uno de una de las rectas, por lo que es necesario obtener una determinación lineal de cada una de las rectas.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \vec{d}_r \\ \vec{d}_s \\ \overline{AB} \end{pmatrix} = \begin{cases} = 3 : \text{Se cruzan pero no se cortan} \\ = 2 : \text{Coplanarias} : \begin{cases} \vec{d}_r \neq k \cdot \vec{d}_s : \text{Secantes (Se cortan en un punto)} \\ \vec{d}_r = k \cdot \vec{d}_s : \text{Paralelas} \end{cases} \\ = 1 : \text{Coincidentes (La misma recta)} \end{cases}$$

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1} : \begin{cases} A = (-1, 0, -1) \\ \vec{d}_r = (2, 1, 1) \end{cases} ; s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1} : \begin{cases} B = (5, 4, 0) \\ \vec{d}_s = (2, 1, 1) \end{cases}$$

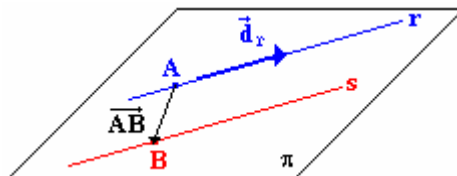
$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (5 - (-1), 4 - 0, 0 - (-1)) = (6, 4, 1)$$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \vec{d}_r \\ \vec{d}_s \\ \overline{AB} \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \end{cases} = 2 : \text{Rectas coplanarias.}$$

$$\vec{d}_r = 1 \cdot \vec{d}_s : \text{Rectas paralelas}$$

- b. Plano determinado por dos rectas paralelas.

La determinación lineal del plano definido por dos rectas paralelas es el vector de dirección de las rectas, un vector formado por un punto de cada recta y un punto cualquiera de una de las rectas.



$$\pi \equiv \begin{cases} A = (-1, 0, -1) \\ \vec{d} = (2, 1, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (6, 4, 1) \end{cases} \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila se obtiene la ecuación general del plano.

$$\pi \equiv (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi \equiv -3x + 4y + 2z - 1 = 0$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$, $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

- a) (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de α y β .
- b) Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por el punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$.

Solución.

a. La recta determinada por la intersección de dos plano se obtiene resolviendo el sistema compatible indeterminado que forman las ecuaciones de los planos.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$ es distinto de cero, se toma como parámetro z .

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y = -1 - 2\lambda \\ x - 2y = -6\lambda \end{cases}$$

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 - 2\lambda & 1 \\ -6\lambda & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 \cdot (-1 - 2\lambda) - 1 \cdot (-6\lambda)}{-5} = \frac{2 + 10\lambda}{-5} = -\frac{2}{5} - 2\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 - 2\lambda \\ 1 & -6\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot (-6\lambda) - 1 \cdot (-1 - 2\lambda)}{-5} = \frac{1 - 10\lambda}{-5} = -\frac{1}{5} + 2\lambda$$

Las paramétricas de la recta quedan de la siguiente forma.

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\lambda \\ y = -\frac{1}{5} + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b. El haz de planos paralelos a α tiene la expresión:

$$2x + y + 2z + K = 0 \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

El punto $(\sqrt{2}, 1, 0)$, permite calcular el parámetro del haz que determina el plano que lo contiene.

$$2\sqrt{2} + 1 + 2 \cdot 0 + K = 0 : K = -2\sqrt{2} - 1$$

El plano buscado es:

$$\sigma \equiv 2x + y + 2z - 2\sqrt{2} - 1 = 0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$
- b) (1 punto). Demostrar que la matriz A^{-1} de A es $\frac{1}{3}(4I - A)$.
- c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de $A - 2I$

Solución.

a.

$$\begin{aligned} A^2 - 4A + 3I &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad ($A \cdot A^{-1} = I$), para demostrar que $\frac{1}{3}(4I - A)$ es la inversa de A habrá que hacerlo a partir de la igualdad obtenida en el apartado a ($A^2 - 4A + 3I = 0$), transformando la igualdad en un producto de matrices igualado a la matriz unidad, siendo uno de los factores del producto la matriz A.

$$A^2 - 4A + 3I = 0 \quad : \quad 4A - A^2 = 3I$$

Del miembro de la derecha de la igualdad hay que sacar factor común de A, para ello es conveniente expresar la igualdad de la siguiente forma:

$$4I \cdot A - A \cdot A = 3I$$

Sacando factor común de A por la derecha:

$$(4I - A) \cdot A = 3I \quad : \quad \frac{1}{3}(4I - A) \cdot A = I$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por la inversa de A por la derecha, se llega a la igualdad propuesta.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(4I - A) \cdot A \cdot A^{-1} &= I \cdot A^{-1} \\ \frac{1}{3}(4I - A) \cdot I &= A^{-1} \quad : \quad A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A) \end{aligned}$$

c. El apartado se puede hacer de dos formas diferentes:

- Partiendo de la relación del apartado a

- Por la expresión de la inversa $\left(A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A^t) \right)$

En nuestra opinión, y viendo el ejercicio de una forma global, creemos que es la primera forma la correcta, aunque en el enunciado no haya nada que lo indique y por tanto deberían también admitir la segunda, si solo admitiesen la primera deberían hacer alguna referencia a la forma de resolverlo.

Partiendo de la relación del apartado a:

$$A^2 - 4A + 3I = 0$$

Se necesita obtener el factor $A - 2I$, para ello se puede descomponer el primer miembro de la siguiente forma:

$$A^2 - 2A - 2A + 3I = 0$$

De los dos primeros términos se puede sacar factor común A y obtener el factor común $2A - I$, en los dos últimos términos, falta una I para poder sacar factor común -2 y obtener también el factor $2A - I$, se soluciona sumando una I a cada miembro de la igualdad y de esta forma, no solo conseguimos el factor buscado en el primer miembro si no que conseguimos en el segundo miembro la matriz unidad.

$$A(A - 2I) - 2A + 4I = I$$

$$A(A - 2I) - 2(A - 2I) = I$$

Sacando factor común $2A - I$:

$$(A - 2I) \cdot (A - 2I) = I$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por la inversa de $2A - I$

$$(A - 2I) \cdot (A - 2I) \cdot (A - 2I)^{-1} = I \cdot (A - 2I)^{-1}$$

Simplificando

$$(A - 2I) \cdot I = (A - 2I)^{-1}$$

Obteniendo por último que la inversa es la propia matriz

$$(A - 2I)^{-1} = A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Otra forma: } (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} (\text{adj}(A - 2I))^t = \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}} \left(\text{adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^t$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\bullet \left(\text{adj} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^t = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión de la inversa:

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{|A - 2I|} (\text{adj}(A - 2I))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dados los puntos A(1, -3, 0), B(3, 1, -2), C(7, 2, 3), D(5, -2, 5), E(1, 0, 2), se pide:

- a) (1 punto). Demostrar que los puntos A, B, C, D son coplanarios.
- b) (1 punto). Demostrar que el polígono ABCD es un paralelogramo y calcular su área.
- c) (1 punto). Hallar la distancia del punto E al plano determinado por los puntos A, B, C, D.

Solución.

a. Una forma de comprobar que cuatro puntos son coplanarios, es determinar un plano con tres de ellos y verificar que el cuarto punto cumple la ecuación del plano determinado por los otros tres.

Una determinación lineal del plano que contiene a los puntos A, B y C es:

$$\pi: \begin{cases} A(1, -3, 0) \\ \overline{AB} = (3 - 1, 1 - (-3), -2 - 0) = (2, 4, -2) \\ \overline{AC} = (7 - 1, 2 - (-3), 3 - 0) = (6, 5, 3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y + 3 & z \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila y simplificando se obtiene la ecuación general del plano que contiene a A B y C.

$$\pi \equiv 11x - 9y - 7z - 38 = 0$$

Sustituyendo las coordenadas de D en la ecuación de π se comprueba si los puntos son coplanarios.

$$\left. \begin{matrix} \pi \equiv 11x - 9y - 7z - 38 = 0 \\ D(5, -2, 5) \end{matrix} \right\} : 11 \cdot 5 - 9 \cdot (-2) - 7 \cdot 5 - 38 = 0 \times$$

Los puntos son coplanarios.

b. Si ABCD forman un paralelogramo, \overline{AB} y \overline{DC} deberán ser equipolentes, es decir iguales.

$$\overline{AB} = (2, 4, -2) : \overline{DC} = (7 - 5, 2 - (-2), 3 - 5) = (2, 4, -2)$$

Los vectores son iguales, por lo tanto son equipolentes y los puntos forman un paralelogramo.

El área del paralelogramo se puede calcular como aplicación del módulo del producto vectorial.

$$\text{Área ABCD} = |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\left. \begin{matrix} \overline{AB} = (2, 4, -2) \\ \overline{AC} = (6, 5, 3) \end{matrix} \right\} : \overline{AB} \times \overline{AC} = (2, 4, -2) \times (6, 5, 3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (22, -18, -14)$$

$$\text{Área ABCD} = |\overline{AB} \times \overline{AC}| = |(22, -18, -14)| = \sqrt{22^2 + (-18)^2 + (-14)^2} = \sqrt{1004} \text{ u}^2$$

c. El apartado se resuelve aplicando la expresión de la distancia de un punto a un plano.

$$d(E - \pi) = \frac{|11 \cdot 1 - 9 \cdot 0 - 7 \cdot 2 - 38|}{\sqrt{11^2 + (-9)^2 + (-7)^2}} = \frac{|-41|}{\sqrt{251}} = \frac{41}{\sqrt{251}}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 Puntos.

Calcular los siguientes límites:

- a) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{1/x}$
- b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x}$

Solución.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{1/x} = 0 \cdot e^{1/0^+} = 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot \infty = ?$

La indeterminación se resuelve transformando $0 \cdot \infty$ a $\frac{\infty}{\infty}$ y aplicando el teorema de

L'Hopital a esta indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} \cdot -1/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = \infty$$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x} = \frac{\sqrt{1 + \tan 0} - \sqrt{1 - \tan 0}}{0} = \frac{0}{0} = ?$

La indeterminación se resuelve aplicando L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{x} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{1 + \tan x}} - \frac{-(1 + \tan^2 x)}{2\sqrt{1 - \tan x}}}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{1 + \tan x}} + \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{1 - \tan x}} \right) = \frac{1 + \tan^2 0}{2\sqrt{1 + \tan 0}} + \frac{1 + \tan^2 0}{2\sqrt{1 - \tan 0}} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

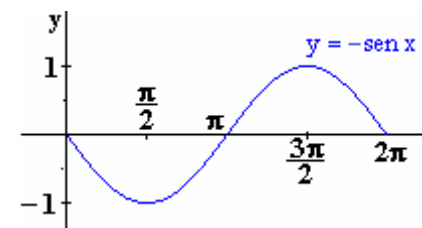
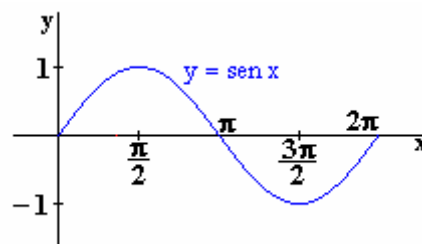
Dada la función $f(x) = \frac{1}{2} - \text{sen } x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f,

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

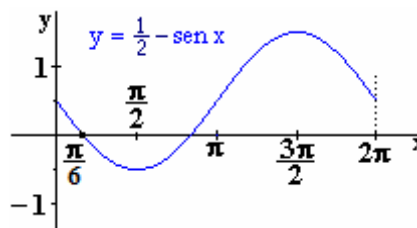
Solución.

Para realizar este ejercicio, es conveniente esbozar la gráfica de la función. Por tratarse de una función elemental, se puede dibujar por traslación y deformación a partir de la gráfica de $y = \text{sen } x$.

$y = -\text{sen } x$ es la función seno con la deformación de cambio de signo (la gráfica de la función gira en torno al eje OX).



$y = \frac{1}{2} - \text{sen } x$ puede leerse también como
 $y = -\text{sen } x + \frac{1}{2}$, viendo de esta forma que es la función
 $y = -\text{sen } x$ desplazada verticalmente hacia arriba media
 unidad.

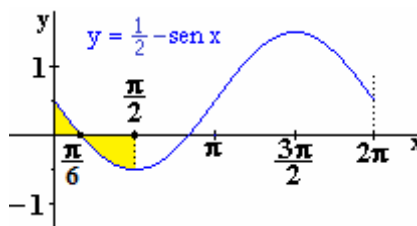


Los puntos de corte de la función con el eje OX se calculan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - \text{sen } x \\ y = 0 \end{cases} : \frac{1}{2} - \text{sen } x = 0 : \text{sen } x = \frac{1}{2} : \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi K \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi K \end{cases}$$

El área que se pide es la sombreada que refleja la figura adjunta, por tener diferente signo en el intervalo se calcula como suma de áreas, considerando su valor absoluto.

$$A = \left| \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x \right) dx \right| + \left| \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x \right) dx \right|$$



Cálculo de la primitiva:

$$\int \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x \right) dx = \frac{1}{2} x - (-\cos x) + C = \frac{x}{2} + \cos x + C$$

Conocida la primitiva de la función se resuelven las integrales definidas.

$$\int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x \right) dx = \left(\frac{x}{2} + \cos x \right) \Big|_0^{\pi/6} = \left(\frac{\pi/6}{2} + \cos \frac{\pi}{6} \right) - \left(\frac{0}{2} + \cos 0 \right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x \right) dx = \left(\frac{x}{2} + \cos x \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \left(\frac{\pi/2}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\pi/6}{2} + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo los valores en la expresión inicial se obtiene el valor del área.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x \right) dx + \left| \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \text{sen } x \right) dx \right| = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \left| \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$