UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso 2007-2008
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = e^{-x}(x^2+1)$$

se pide:
a) (2 puntos). Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.
b) (1 punto). Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.
b) (1,5 puntos). Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dados los puntos $P(1,1,3)$, $Q(0,1,0)$, se pide:
a) (1 punto). Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.
b) (1 punto). Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P,S) = 2\,\text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4},$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio 1. a) Determinación del crecimiento y decrecimiento, 0,5 puntos. Determinación de los puntos de inflexión, 0,5 puntos. Determinación de las asíntotas, 1 punto.
b) Cálculo de la primitiva, 0,75 puntos. Cálculo de la integral definida, 0,25 puntos.

Ejercicio 2. a) Cálculo de $|A|$, 0,5 puntos. Determinación de cuándo $\mathrm{rg}(A) = 3$, 0,5 puntos. Estudio de los casos en que $\mathrm{rg}(A) \neq 3$, 0,5 puntos.
b) Determinación de cuándo A es invertible, 0,5 puntos. Cálculo de la inversa de A para $a = 1$, 1 punto.

Ejercicio 3. a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 4. Planteamiento, 1 punto. Resolución, 1 punto.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. a) Resolución, 1,5 puntos. (Si se intenta aplicar integración por partes se puntuará, al menos, 0,5 puntos.)
b) Resolución, 1,5 puntos. (Si se aplica correctamente la fórmula del cambio de variable, se puntuará, al menos, 0,5 puntos.)

Ejercicio 2. a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 1 punto. Resolución, 1 punto.

Ejercicio 3. Planteamiento, 1 punto. Resolución, 1 punto.

Ejercicio 4. Planteamiento, 1 punto. Resolución, 1 punto.

Modelo 3 - Opción A

① a) $f'(x) = -e^{-x}\cdot(x-1)^2$

$f''(x) = e^{-x}(x-3)(x-1)$

$f'(x) < 0$ para todo $x \neq 1 \Rightarrow f$ es decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, \infty) \Rightarrow f$ es decreciente en $\mathbb{R}$

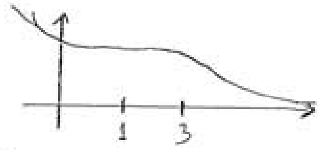
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty) \Rightarrow f$ es $\cup$ en $(-\infty, 1)$ y en $(3, \infty)$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1,3) \Rightarrow f$ es $\cap$ en $(1,3)$

$x=1$ y $x=3$ son los puntos de inflexión.

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cdot(x^2+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \Rightarrow$ Hay una asíntota horizontal en $y=0$ cuando $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x^2+1) = +\infty \Rightarrow$ No hay asíntotas horizontales cuando $x \to -\infty$



$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) = -\infty \Rightarrow$ No hay asíntotas oblicuas

No hay asíntotas verticales.

b) $\int e^{-x}\cdot(x^2+1)\,dx = (x^2+1)\cdot(-e^{-x}) + \int (\cancel{-}e^{-x})\cdot 2x\,dy =$

$\int e^{-x}x\,dx = x\cdot(-e^{-x}) + \int(\cancel{-}e^{-x})\,dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)\cdot e^{-x} + C$

$= -(x^2+1)\cdot e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} + C = -(x^2+2x+3)\cdot e^{-x} + C$

$\int_0^1 f(x)\,dx = 3 - \frac{6}{e}$

② a) $|A| = -2\cdot(a+1)(a^2+a-1)$

Si $a \neq -1, \frac{-1+\sqrt5}{2}, \frac{-1-\sqrt5}{2}$ el rango es 3; en otro caso el rango es 2.

b) A es invertible si y sólo si $a \neq -1, \frac{-1+\sqrt5}{2}, \frac{-1-\sqrt5}{2}$. Para $a=1$ la inversa es:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

③ a) Si $R(x,y,z)$, $d(P,R) = d(Q,R) \Leftrightarrow x+3z-5=0$, que es un plano.

b) $\vec{PQ}(-1,0,-3)$; $(1-\lambda, 1, 3-3\lambda)$ es un punto genérico de la recta PQ

$dist(P,S) = 2\,dist(Q,S) \Leftrightarrow \lambda = 2, \frac{2}{3}$

Los puntos buscados son $S_1(-1,1,-3)$, $S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$

④ $R(-1+\lambda, 2+2\lambda, 3\lambda)$ punto genérico de r; $S(2\mu, 1+3\mu, 4\mu)$ punto genérico de s

$\vec{RS}(2\mu-\lambda+1, 3\mu-2\lambda-1, 4\mu-3\lambda)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{RS} \perp r \Leftrightarrow 20\mu - 14\lambda - 1 = 0 \\ \vec{RS} \perp s \Leftrightarrow 29\mu - 20\lambda - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = -\frac{3}{2} \\ \mu = -1 \end{array}$

La recta pedida es: $x = -2+\lambda,\ y = -2-2\lambda,\ z = -1+\lambda$

También se puede obtener la solución como:

$$t: \begin{cases} 4x+y-2z+2=0 \\ 11x+2y-7z-2=0 \end{cases}$$

Modelo 3 - Opción B

① a) $\int x^3 \ln(x)\,dx = \ln(x)\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\cdot\left[\ln(x) - \frac{1}{4}\right] + C$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}}\,dt = \int 1\,dt = t+C = \log\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right)+C$, siendo $dx=(e^t+e^{-t})\,dt$

② a) $P\ (3,2,-4)$

b) $\pi_2 \equiv x+y+z=a$

El punto Q de intersección de r y π_2 es $Q\ (1+2a,\ -1+3a,\ -4a)$

$dist(P,Q)=\sqrt{29\,(a-1)^2}=\sqrt{29} \Leftrightarrow a=0, a=2$

El plano π_2 buscado es uno de los siguientes: $x+y+z=0 \quad x+y+z=2$

③ Como la tercera ecuación es el "doble" de la primera, y la cuarta es la "suma" de las dos primeras, el sistema del enunciado es equivalente al formado por las dos primeras ecuaciones, siendo la solución:

$$\begin{cases} x=-\alpha \\ y=-\frac{3}{2}\beta+2 \\ z=\alpha \\ v=\beta \end{cases}$$

④
- 100 billetes de 50 euros
- 75 billetes de 20 euros
- 50 billetes de 10 euros