

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOGSE)

Curso 2008-2009 (Septiembre)

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.

Calificación total máxima: 10 puntos. Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1,25 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
- b) (0,5 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
- c) (1,25 puntos). Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M .

Solución.

a. La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

$$\det M = \begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + 0 + 2m^2 - (0 + m + 2m) = 2m^2 - 2m = 2m \cdot (m - 1)$$

$$|M| = 0 : 2m \cdot (m - 1) = 0 : \begin{cases} 2m = 0 : & m = 0 \\ m - 1 = 0 : & m = 1 \end{cases}$$

$$\forall m \neq 0, 1, |M| \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

b. M^{25} es otra matriz, y por tanto la condición para que tenga inversa sigue siendo la misma, que su determinante sea distinto de cero.

$$|M^{25}| \neq 0$$

Teniendo en cuenta la propiedad de los determinantes: $|A^n| = |A|^n$

$$|M^{25}| = |M|^{25} \neq 0$$

$$|M|^{25} \neq 0 \Leftrightarrow |M| \neq 0$$

Teniendo en cuenta los resultados del apartado a, $\forall m \neq 0, 1, |M^{25}| \neq 0 \Rightarrow \exists (M^{25})^{-1}$.

c. $M(m = -1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} : |M| = 2 \cdot (-1) \cdot (-1 - 1) = 4$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} [\text{adj}(M)]^t : \text{adj}(M) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\text{adj}(M)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} [\text{adj}(M)]^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{Si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos). Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.
- b) (1,5 puntos). Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Solución.

a. Para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = 0$, se debe cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Por definición de la función $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Para calcular el límite de la función cuando x tiende a cero, se debe tomar la expresión que tiene la función en las proximidades de cero, no en el punto cero.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \frac{\ln 1 - 0}{0} = \frac{0}{0} = ?$$

Para resolver el límite, y teniendo en cuenta que las expresiones que forman la función son derivables en el entorno de cero, se aplica el teorema de L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax} - b}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x \cdot (1+ax)}$$

La solución del límite depende de los valores que tomen a y b , se presentan dos casos diferentes:

- Si $a \neq b$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x \cdot (1+ax)} = \frac{a - b - ab \cdot 0}{2 \cdot 0 \cdot (1+a \cdot 0)} = \frac{a - b}{0} = \pm \infty \neq f(0)$ Discontinua
- Si $a = b$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x \cdot (1+ax)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - a - aax}{2x \cdot (1+ax)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a^2 x}{2x \cdot (1+ax)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a^2}{2 \cdot (1+ax)} = -\frac{a^2}{2 \cdot (1+a \cdot 0)} = -\frac{a^2}{2}$. Para que la función sea continua:

$$-\frac{a^2}{2} = f(0) = -\frac{1}{2} : a^2 = 1 : a = b = \pm 1$$

* El signo de ∞ depende el signo de la diferencia $a - b$.

b.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{Si } x > -1 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Por definición: $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

Dada la forma que tiene la función, el límite se hace más fácilmente con el siguiente cambio de variable:

$$h = x - 0 : \begin{cases} h \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{cases} : f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x - \frac{-1}{2}}{x}$$

Ordenando la expresión:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln(1+x) - 2x + x^2 \left(\frac{0}{0}\right)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+x} - 2 + 2x}{6x^2} = \{\text{Ordenando}\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{6x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{6(1+x)} = \frac{2}{6(1+0)} = \frac{1}{3}$$

La función es derivable en $x = 0$ y su derivada $f'(0) = \frac{1}{3}$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a} ; \quad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas se cortan perpendicularmente.

Solución.

$$r : \begin{cases} \text{Punto } A = (0, 0, 0) \\ \text{Vector } \vec{d}_r = (1, 2, a) \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} \text{Punto } B = (3, 0, 3) \\ \text{Vector } \vec{d}_s = (b, 1, -1) \end{cases}$$

Para resolver el problema se necesitan dos ecuaciones, tantas como parámetros debemos calcular.

1ª Condición: Para que dos rectas se corten, deben ser coplanarias. Si dos rectas son coplanarias, el rango de la matriz formada por los vectores de dirección de las rectas y un vector formado entre un punto de cada recta debe ser 2. Para que el rango de una matriz de orden 3 sea dos, su determinante debe ser cero.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \vec{d}_r \\ \vec{d}_s \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 3-0 & 0-0 & 3-0 \\ 1 & 2 & a \\ b & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & a \\ b & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & a \\ b & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 3 - (6b + 0 + 3a) = -3 - 6b - 3a = 0$$

Simplificando: $a + 2b = -1$

2ª Condición: Para que dos rectas sean perpendiculares, sus vectores de dirección deben ser perpendiculares. So dos vectores son perpendiculares, su producto escalar debe ser nulo.

$$\vec{d}_r \circ \vec{d}_s = 0$$

$$(1, 2, a) \circ (b, 1, -1) = 0 : 1 \cdot b + 2 \cdot 1 + a \cdot (-1) = 0 : a - b = 2$$

Las dos condiciones forman un sistema de ecuaciones que permite calcular a y b .

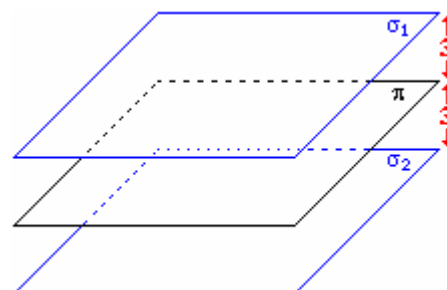
$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a - b = 2 \end{cases} : \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π .

Solución.

Como puede observarse en la figura adjunta, se buscan dos planos (σ_1 y σ_2) paralelos a π y que disten de él 3 unidades



La distancia entre dos planos paralelos $\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{array} \right\}$ viene dada por la expresión:

$$d(\pi_1 - \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Nota: Observar como para poder calcular la distancia entre dos planos paralelos, los vectores normales de ambos planos deben ser idénticos, no vale si solo son proporcionales.

Los planos buscados (σ_i) pertenece al haz de planos paralelos a π y por tanto deberá tener la forma:

$$\sigma_i \equiv 2x - y + 2z + K = 0$$

El parámetro K se obtiene con la condición de que el plano buscado esta a tres unidades de π .

$$d(\pi - \sigma_i) = \frac{|1 - K|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3 : \frac{|K - 1|}{3} = 3 : |K - 1| = 9$$

$$K - 1 = \pm 9 : \begin{cases} (+) : K = 10 : \sigma_1 \equiv 2x - y + 2z + 10 = 0 \\ (-) : K = -8 : \sigma_1 \equiv 2x - y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

a) (1 punto). Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1

b) (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

c) (1,5 puntos). Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0,2)$ tal que $g'(c) = 1$.

Solución.

a. Definición de derivada en un punto: “La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto”. Se pide calcular los valores de x que cumplan:

$$f'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x^2) - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 1$$

Despejando:

$$1+x^2 = 1 \cdot (1-x^2)^2 : 1+x^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot x^2 + (x^2)^2 : 1+x^2 = 1 - 2x^2 + x^4 : x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0 : \begin{cases} x^2 = 0 & x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 & x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

En $x = 0$ ó $\pm\sqrt{3}$ la pendiente de la recta tangente vale 1.

b. Ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ en $x = 0$ en forma punto-pendiente:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$$

$$f(0) = \frac{0}{1-0^2} = 0 : f'(0) = 1 \text{ (apartado a)}$$

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) : y = x$$

c. La hipótesis propuesta ($g'(c) = 1$) se puede demostrar mediante el teorema de valor medio (de Lagrange), también llamado teorema de los incrementos finitos, ó mediante el teorema de Rolle.

Teorema de Lagrange: “dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ ”, es decir, existe al menos un punto c que satisface la igualdad:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Puesto que la función g es derivable con derivada continua en toda la recta real, según afirma el enunciado, se la puede aplicar el teorema de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$, por lo tanto existirá al menos un calor $c \in (0, 2)$ tal que:

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \left\{ \begin{array}{l} g(2) = 2 \\ g(0) = 0 \end{array} \right\} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

Por lo que queda demostrada la hipótesis propuesta.

Teorema de Rolle: “Si una función es definida y continua $[a, b]$, diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , y toma valores iguales en los extremos del intervalo ($f(a) = f(b)$) entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es horizontal, es decir $f'(c) = 0$ ”

Para demostrar la hipótesis propuesta ($g'(c) = 1$), se define la función $H(x) = g(x) - x$ que es derivable con derivada continua en toda la recta real, por ser resta de dos funciones que lo son ($g(x), x$).

$$\left. \begin{aligned} H(0) &= g(0) - 0 = 0 - 0 = 0 \\ H(2) &= g(2) - 2 = 2 - 2 = 0 \end{aligned} \right\} H(0) = H(2) \Rightarrow \exists c \in (0,2) / H'(c) = 0$$

$$H'(x) = (g(x) - x)' = g'(x) - 1 : H'(c) = g'(c) - 1 = 0 : g'(c) = 1$$

Por lo que queda demostrada la hipótesis propuesta.

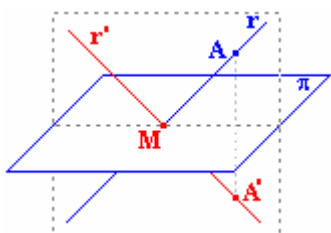
Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π .

Solución.



Se busca una recta r' que tiene la misma proyección ortogonal sobre π que la recta r , y ambas están contenidas en un plano perpendicular a π

La recta r' se obtiene mediante dos puntos. M (intersección de r con π) y A' (simétrico de cualquier punto A de la recta r respecto de π).

Cálculo de M . Se obtiene como intersección de r y π .

$$M : \begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi : x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Sustituyendo } r \text{ en } \pi : (1 + \lambda) + (-\lambda) - 2 \cdot (\lambda) + 1 = 0$$

Operando se despeja el valor de λ .

$$2 - 2\lambda = 0 \quad \lambda = 1$$

Sustituyendo en las Paramétricas de r el valor de λ , se obtienen las coordenadas de M .

$$\lambda = 1 : M = \begin{cases} x_m = 1 + 1 = 2 \\ y_m = -1 \\ z_m = 1 \end{cases} \Rightarrow M = (2, -1, 1)$$

Cálculo de A' . A' es el simétrico de cualquier punto A de r (excepto M) respecto de π . Como punto A se toma el punto con el que está definida la ecuación continua de r .

$$A = (1, 0, 0); \pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0.$$

Pasos:

- i) Se calcula la recta s , perpendicular a π que contiene a A .
- ii) Se calcula M_1 como intersección de s y π .
- iii) Conocidos A y M_1 se calculan las coordenadas de A' con las ecuaciones del punto medio de un segmento.

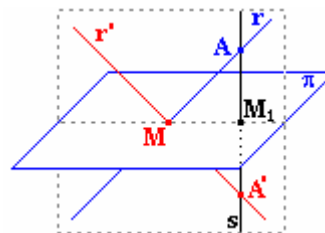
$$i) \quad s : \begin{cases} s \perp \pi \Rightarrow \vec{d}_s = \vec{n}_\pi = (1, 1, -2) \\ A(1, 0, 0) \in r \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

$$ii) \quad M_1 : \begin{cases} s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \\ \pi : x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Sustituyendo } s \text{ en } \pi : (1 + \lambda) + (\lambda) - 2(-2\lambda) + 1 = 0$$

Operando se despeja el valor de λ .

$$2 + 6\lambda = 0 \quad \lambda = -\frac{1}{3}$$

Sustituyendo en las paramétricas de s el valor de λ , se obtienen las coordenadas de M_1 .



$$\lambda = -\frac{1}{3} : M_1 = \begin{cases} x_{m.1} = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ y_{m.1} = -\frac{1}{3} \\ z_{m.1} = -2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow M_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

iii) Teniendo en cuenta que M_1 es el punto medio de $\overrightarrow{A'A}$, se calculan las coordenadas de A' despejando de las coordenadas del punto medio.

$$M_1 = \left(\frac{a_1 + a'_1}{2}, \frac{a_2 + a'_2}{2}, \frac{a_3 + a'_3}{2}\right) : \begin{cases} x_{m.1} = \frac{a_1 + a'_1}{2} \Rightarrow a'_1 = 2x_{m.1} - a_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} \\ y_{m.1} = \frac{a_2 + a'_2}{2} \Rightarrow a'_2 = 2y_{m.1} - a_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 0 = -\frac{2}{3} \\ z_{m.1} = \frac{a_3 + a'_3}{2} \Rightarrow a'_3 = 2z_{m.1} - a_3 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 0 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$A' = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Conocido $M = (2, -1, 1)$ y $A' = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ se calcula r' , simétrica de r respecto de π .

$$r' : \begin{cases} \vec{d}_{r'} = \overrightarrow{A'M} = \left(2 - \frac{1}{3}, -1 - \left(-\frac{2}{3}\right), 1 - \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ paralelo } (5, -1, -1) \\ M = (2, -1, 1) \end{cases}$$

$$r' \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

b) (1 punto). Resolver el sistema para $x = 5$.

Solución.

a. Sistema homogéneo, la matriz de coeficientes y la ampliada se diferencia en una columna de ceros, por lo tanto, tienen el mismo rango y como consecuencia el sistema es compatible para cualquier valor real del parámetro λ .

$$\text{rg } A = \text{rg } A^* \Rightarrow \text{Sistema compatible: } \begin{cases} \text{Si } |A| \neq 0 : \text{rg } A = \text{rg } A^* = n = 3. \text{ Sist. Compatible determinado } (x = y = z = 0) \text{ Trivial} \\ \text{Si } |A| = 0 : \text{rg } A = \text{rg } A^* \neq n. \text{ Sist. Compatible indeterminado. Infinitas soluciones} \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = -2\lambda + 4 - \lambda^2 - (-1 + 4\lambda - 2\lambda^2) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 5)$$

$$|A| = 0 : (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 5) = 0 : \begin{cases} \lambda - 1 = 0 : \lambda = 1 \\ \lambda - 5 = 0 : \lambda = 5 \end{cases}$$

Para que la solución sea distinta de la trivial ($x = y = z = 0$), $\lambda = 1$ ó $\lambda = 5$

b. $\lambda = 5 : \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \end{cases} \quad |A| = 0 \Rightarrow \text{rg } A < 3 : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < n = 3$

Sistema compatible indeterminado con dos ecuaciones linealmente independientes, tal y como indica su rango.

Sistema equivalente: $\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{cases}$. El sistema se resuelve tomando una de las variables como

constante y transformándola en un parámetro. Es aconsejable tomar como parámetro la variable que no forme parte del menor de orden 2 que define el rango del sistema ($x = \lambda$).

$$\begin{cases} 2y + z = -5\lambda \\ -y + 2z = -5\lambda \end{cases}$$

Por el método de Cramer:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -5\lambda & 1 \\ -5\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-10\lambda + 5\lambda}{5} = -\lambda \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5\lambda \\ -1 & -5\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-10\lambda - 5\lambda}{5} = -3\lambda$$

Solución: $(\lambda, -\lambda, -3\lambda) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = A + B$

Solución.

Teniendo en cuenta:

- Para obtener una ecuación matricial equivalente, se deben multiplicar los dos miembros de la igualdad por la misma matriz y en el mismo orden.
- El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad o unidad (I).
- La matriz identidad o unidad es el elemento neutro de la multiplicación de matrices.

Se despeja la matriz X.

$$A \cdot X \cdot B = A + B$$

Se multiplica los dos miembros por la inversa de A por la izquierda y por la inversa de B por la derecha

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (A + B) \cdot B^{-1}$$

Se opera:

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} + A^{-1} \cdot B \cdot B^{-1} \quad ; \quad X = I \cdot B^{-1} + A^{-1} \cdot I \quad ; \quad X = B^{-1} + A^{-1}$$

Cálculo de las inversas:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{adj}(A)]^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \quad ; \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +|1| & -|-1| \\ -|-2| & +|4| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad [\text{adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad ; \quad \text{adj}(B) = \begin{pmatrix} +|1| & -|-3| \\ -|-2| & +|4| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad [\text{adj}(B)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1} + A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$