Curso 2009-2010 Septiembre
MATERIA: MATEMÁTICAS II (Fase general)

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestara a los cuatro ejercicios de una de la dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier- caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos
Tiempo: Hora y media

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m.

b) (1 punto) En el caso de m = 0, resolver el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

a. Por dimensiones de la matriz, rg $A \le 3$. Como la matriz tiene términos numéricos distintos de cero, rg $A \ge 1$. Si se toma el término $a_{3.1}$ como menor de orden 1 distinto de cero y se orla, todos sus menores orlados son función del parámetro. Tomando uno cualquiera ($a_{2.1}$, $a_{2.2}$, $a_{3.1}$, $a_{3.2}$):

$$\begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - m$$

Si $m \ne 2$: el menor de orden dos será distinto de cero y por tanto rg $A \ge 2$.

Si $m = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ no existen menores de orden dos distintos de cero y por tanto rg A =1.

Si orlamos el menor de orden dos anterior, aparecen dos menores de orden tres.

$$\begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{cases} \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = (m+1)(m-2^2) \end{cases}$$

Discusión:

i. Sí $m \ne -1, 2$: Existen menores de orden tres distintos de cero. rg A = 3.

ii. Sí $m = -1$: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ Todos los menores de orden tres son nulos, rg A < 3.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \ne 0 \quad \text{rg } A = 2$$

iii. Sí m = 2. Como se vio inicialmente, rg A = 1.

b. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{cases} -x + y + t = 0 \\ x - y + t = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2t = 0$: $t = 0$

Sustituyendo el valor de t obtenido: $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$ Como las dos primeras ecuaciones son proporcionales, los criterios de equivalencia permiten eliminar una de ellas.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema se transforma una cualquiera de las variables en parámetro ($x = \lambda$).

$$\begin{cases} y = \lambda \\ y + 2z = -\lambda \end{cases} : \ \{\lambda + 2z = -\lambda \ : \ z = -\lambda$$

Solución: $(\lambda, \lambda, -\lambda, 0) \ \forall \lambda \in R$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Dadas las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

se pide:

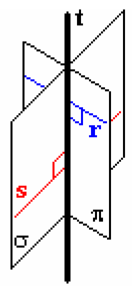
a) (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a r_1 y r_2 y es perpendicular a ambas.

b) (1 punto) Hallar la mínima distancia entre r_1 y r_2.

Solución.

a. La perpendicular común a dos rectas se calcula como intersección de dos planos que deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\pi : \begin{cases} \text{Debe contener a r} : (r_1 \subset \pi) \\ \text{Debe ser perpendicular a } r_2 \end{cases} , \qquad \sigma : \begin{cases} \text{Debe contener a s} : (r_2 \subset \pi) \\ \text{Debe ser perpendicular a } r_1 \end{cases}$$



La primera condición de cada plano ofrece dos elemento para calcular el plano, sí la recta está contenida en el plano el punto de la recta pertenece al plano y el vector de dirección de la recta es paralelo al plano.

La segunda condición se cumple buscando un vector $\vec{v}$ perpendicular a las dos rectas, por lo que $\vec{v}$ se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores de dirección de las dos rectas.

A Partir de las ecuaciones de las rectas obtenemos sus elementos (punto y vector).

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases} : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} : \begin{cases} A = (0, 1, 3) \\ \vec{d}_1 = (1, 0, 0) \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} : \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases} : \begin{cases} B = (0, 0, 0) \\ \vec{d}_2 = (0, 1, 1) \end{cases}$$

El vector $\vec{v}$ se obtiene mediante el producto vectorial de los vectores de dirección de las dos rectas

$$\vec{v} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = (1, 0, 0) \times (0, 1, 1) = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, -1, 1)$$

La determinación lineal de cada plano es:

$$\pi : \begin{cases} A = (0,1,3) \\ \vec{d}_1 = (1,0,0) \\ \vec{v} = (0,-1,1) \end{cases} : \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \sigma : \begin{cases} B = (0,0,0) \\ \vec{d}_r = (0,1,1) \\ \vec{v} = (0,-1,1) \end{cases} : \quad \sigma \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando los determinantes por adjuntos de la 1ª fila se obtienen las ecuaciones generales, implícitas ó cartesiana de ambos plano.

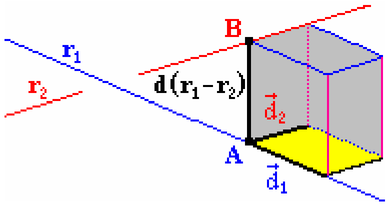
$$\pi_1 \equiv -y - z + 4 = 0 \quad : \quad \sigma \equiv 2x = 0$$

La ecuación pedida se obtiene resolviendo el sistema que forman los dos planos:

$$t \equiv \begin{cases} y+z-4=0 \\ 2x=0 \end{cases} \xrightarrow{z=\beta} \begin{cases} x=0 \\ y=4-\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

b. La mínima distancia entre dos rectas se puede calcular como la altura del paralelepípedo que forman los vectores de dirección de las dos rectas y un segmento formado con un punto de cada recta.

$$V_{PARALELEPÍPEDO} = A_{BASE} \times \text{Altura}$$



$$\text{Altura} = \frac{V_{PARALELEPÍPEDO}}{A_{BASE}} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\circ\left(\vec{d}_1\times\vec{d}_2\right)\right|}{\left|\vec{d}_1\times\vec{d}_2\right|} = d(r_1 - r_2)$$

Si se tiene en cuenta que $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \vec{v}$

$$d(r_1 - r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\circ\vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{|(0,-1,-3)\circ(0,-1,1)|}{|0,-1,1|} = \frac{|0+1-3|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular los límites:

a) (1 punto) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arctan x)^{a/x}$ **b)** (1 punto) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2e^x}{7x+5e^x}$

Solución.

a. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arctan x)^{a/x} = (1+\arctan 0)^{a/0} = 1^{\infty}$ **.** Indeterminación del número e.

$$\lim_{x\to 0}(1+\arctan x)^{a/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}\cdot(1+\arctan x-1)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot \mathrm{rctan}\, x}{x}} \underset{L'H}{\overset{0/0}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot\frac{1}{1+x^2}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a}{1+x^2}} = e^{\frac{a}{1+0^2}} = e^a$$

b. $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2e^x}{7x+5e^x} \underset{L'H}{\overset{(\infty/\infty)}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{3+2e^x}{7+5e^x} \underset{L'H}{\overset{(\infty/\infty)}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{2e^x}{5e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular:

a) (1 punto) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

b) (1 punto) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

Solución.

a. $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{c} \int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C \\ f(x)=4-x^2 : f'(x)=-2x \\ n=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\int_0^1\left(4-x^2\right)^{-1/2}\cdot(-2x)dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{\left(4-x^2\right)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{\left(4-x^2\right)^{1/2}}{1/2}\right]_0^1 = \left[-\left(4-x^2\right)^{1/2}\right]_0^1 = \left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = -\sqrt{4-1^2}-\left(-\sqrt{4-0^2}\right) = 2-\sqrt{3}$$

b. Integral por el método de partes.

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x \to du = dx \\ dv = \cos x\,dx \to v = \operatorname{sen} x \end{matrix}\right\} = \left(x\cdot\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx = \left(x\cdot\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi} - \left(-\cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(x\cdot\operatorname{sen} x + \cos x\right]_0^{\pi} = \left(\pi\cdot\operatorname{sen}\pi + \cos\pi\right) - \left(0\cdot\operatorname{sen} 0 + \cos 0\right) = -2$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dados el plano

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$$

y el plano π_2 determinado por el punto P(0, 2, 4) y los vectores $\vec{v}_1 = (0, 2, 6)$ y $\vec{v}_2 = (1, 0, b)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de a y b para que π_1 y π_2 sean paralelos.
b) (1 punto) Para a = 1 y b = 0 determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de π_1 y π_2.
c) (1 punto) Para a = 4 y b = −2 determinar los puntos que están a igual distancia de π_1 y π_2.

Solución.

a. Los datos relativos a π_2 permiten obtener la ecuación general del plano.

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} P(0,2,4) \\ \vec{v}_1 = (0,2,6) \\ \vec{v}_2 = (1,0,b) \end{cases} ; \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \text{ Desarrollando: } \pi_2 \equiv 2bx + 6y - 2z - 4 = 0$$

Para que los planos $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = a$ y $\pi_2 \equiv 2bx + 6y - 2z = 4$ sean paralelos se debe cumplir:

$$\frac{2}{2b} = \frac{-3}{6} = \frac{1}{-2} \neq \frac{a}{4} : \frac{1}{b} = -\frac{1}{2} \neq \frac{a}{4} : \begin{cases} b = -2 \\ a \neq -2 \end{cases}$$

Para a ≠ −2 y b = −2, los planos son paralelos

b. Para a = 1: $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = 1$
Para b = 0: $\pi_2 \equiv 6y - 2z = 4$

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 6y - 2z = 4 \end{cases} : \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3y - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} 2x + z = 1 + 3\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} : \{2x + (-2 + 3\lambda) = 1 + 3\lambda : x = \frac{3}{2}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \lambda \qquad \forall \lambda \in R \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

c. Para a = 4: $\pi_1 \equiv 2x - 3y + z = 4$
Para b = −2 : $\pi_2 \equiv -4x + 6y - 2z = 4$

Se trata de planos paralelos, para trabajar con ellos conviene expresar las ecuaciones lo más simplificado posible.

$$\pi_1 \equiv 2x - 3y + z - 4 = 0 : \quad \pi_2 \equiv 2x - 3y + z + 2 = 0$$

Los puntos P(x, y, z) buscados deben cumplir la condición: $d(P - \pi_1) = d(P - \pi_2)$

$$\frac{|2x - 3y + z - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|2x - 3y + z + 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}}$$

Simplificando las raíces:

$$|2x - 3y + z - 4| = |2x - 3y + z + 2|$$

Quitando los valores absolutos y ordenando se llega a la ecuación de un plano paralelo a ambas que se encuentra a igual distancia de π_1 y de π_2.

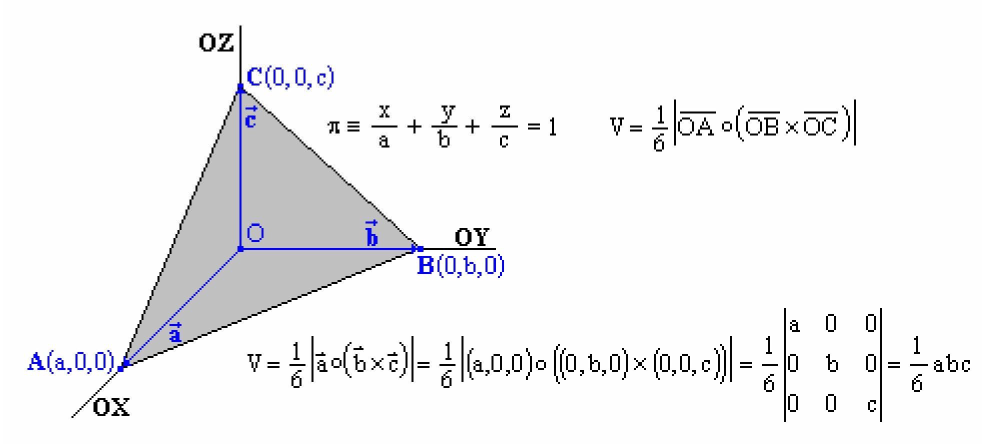
$$2x - 3y + z - 4 = \pm(2x - 3y + z + 2) : \begin{cases} (+) : 2x - 3y + z - 4 = 2x - 3y + z + 2 : 6 = 0. \text{ No tiene sentido} \\ (-) : 2x - 3y + z - 4 = -2x + 3y - z - 2 : 4x - 6y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Los puntos P(1, 2, 1), Q(2, 1, 1) y A(a, 0, 0) con a > 3, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcular el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A, B, C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo.

Solución.

Se trata de un problema de optimación en el que la función a optimizar es el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados. La forma más sencilla de obtener la expresión del volumen de este tetraedro es a partir de la ecuación canónica del plano π.



El plano π se determina con los puntos P, Q y A.

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,2,1) \\ Q(2,1,1) \\ A(a,0,0) \end{cases} \equiv \begin{cases} P(1,2,1) \\ \overline{QP} = (-1,1,0) \\ \overline{AP} = (1-a,2,1) \end{cases} \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y ordenando se obtiene la ecuación general del plano.

$$\pi \equiv x + y + (a-3)z = a$$

La ecuación general del plano permite obtener la ecuación canónica dividiendo toda la ecuación por el término independiente y ordenando.

$$\pi \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a/(a-3)} = 1$$

La ecuación canónica permite expresar el volumen del tetraedro en función del parámetro a:

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|(a,0,0) \circ \left((0,a,0) \times \left(0,0,\frac{a}{a-3}\right)\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{a-3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} a \cdot a \cdot \frac{a}{a-3} = \frac{1}{6}\frac{a^3}{a-3}$$

Para calcular el tetraedro de volumen mínimo se deriva la expresión y se iguala a cero.

$$V' = \frac{1}{6}\frac{3a^2 \cdot (a-3) - a^3 \cdot 1}{(a-3)^2} = \frac{1}{6}\frac{2a^3 - 9a^2}{(a-3)^2}$$

$$V' = 0 : \frac{2a^3 - 9a^2}{(a-3)^2} = 0 : 2a^3 - 9a^2 = 0 : a^2(2a-9) = 0 : \begin{cases} a^2 = 0 : a = 0 \\ 2a - 9 = 0 : a = \frac{9}{2} \end{cases}$$

De las dos posibles soluciones, la única que cumple la condición de a > 3 es a = 9/2. Para comprobar si se trata de un mínimo se sustituye en la segunda derivada.

$$V'' = \frac{1}{6}\frac{\left(6a^2 - 18a\right)\cdot(a-3)^2 - \left(2a^3 - 9a^2\right)\cdot 2 \cdot (a-3) \cdot 1}{(a-3)^4} = \frac{1}{6}\frac{(a-3)\cdot\left(\left(6a^2 - 18a\right)\cdot(a-3) - \left(2a^3 - 9a^2\right)\cdot 2\right)}{(a-3)^4} =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\left(6a^2 - 18a\right)\cdot(a-3) - \left(2a^3 - 9a^2\right)\cdot 2}{(a-3)^3} = \frac{1}{6}\frac{2a^3 - 18a^2 + 54a}{(a-3)^3} = \frac{1}{6}\frac{2a \cdot \left(a^2 - 9a + 27\right)}{(a-3)^3} = \frac{a \cdot \left(a^2 - 9a + 27\right)}{3(a-3)^3}$$

$$V''\left(9/2\right)=\frac{\frac{9}{2}\cdot\left(\left(\frac{9}{2}\right)^2-9\cdot\frac{9}{2}+27\right)}{3\left(\frac{9}{2}-3\right)^3}=\frac{9}{2}>0\Rightarrow \text{MÍNIMO}$$

$$a=\frac{9}{2}\Rightarrow A=\left(\frac{9}{2},0,0\right)$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la compatibilidad del sistema.
b) (0,5 puntos) Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.
c) (0,5 puntos) Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Solución.

a. La clasificación de un sistema según el tipo de solución se hace a partir de los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} : A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix} \quad A\subset A^*\Rightarrow \text{rg } A\le \text{rg } A^*\le 2\ ;\ n=3$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\ne 0\Rightarrow \text{rg } A=2=\text{rg } A^*<n=3.$$ Sistema compatible indeterminado.

b. Para que un sistema de ecuaciones sea compatible determinado, rg A = rg A* = n. Teniendo en cuenta que el número de incógnitas es tres, habrá que añadir a la matriz de coeficientes (A) una fila de tal forma que el determinante de la nueva matriz de coeficientes sea distinto de cero, teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes es una submatriz de la ampliada, si la matriz de coeficientes tiene rango tres, la ampliada también tendrá rango tres.

Si tenemos en cuenta que el menor $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\ne 0$ bastara con añadir la fila 0, 0, 1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5\ne 0\Rightarrow \text{rg } A=3$$

El término 3.4 de la matriz ampliada puede ser cualquier número debido a que su rango es tres independientemente del valor de ese término.

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} : \text{rg } A^*=3$$

$$S:\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ z = 0 \end{cases} : \text{rg } A=\text{rg } A^*=n=3.$$ Sistema compatible determinado

c. Para que el sistema sea incompatible, rg A ≠ rg A*. para conseguir que los rangos sean distintos, se añade una tercera ecuación en la que los coeficientes de las variables sean una combinación lineal de los coeficientes de las dos primeras ecuaciones (lo mas sencillo es que sean la suma), y el termino independiente cualquier otro valor excepto el que le correspondería por la combinación lineal.

$$S:\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}:\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\\3&1&0\end{vmatrix}=0:\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rg } A=2$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\2&-1&1&3\\3&1&0&0\end{pmatrix}:\begin{vmatrix}1&2&0\\2&-1&3\\3&1&0\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=5\neq 0\Rightarrow \text{rg } A^*=3$$

$\text{rg } A\neq \text{rg } A^*$ Sistema incompatible.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}-a&0&a\\a&a-1&0\\0&a&a+2\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para a = 1.

Solución.

a. Para discutir el rango de una matriz cuadrad en función de un parámetro, se calculan los valores del parámetro que anulan el determinante de la matriz.

$$\det A=\begin{vmatrix}-a&0&a\\a&a-1&0\\0&a&a+2\end{vmatrix}=-a\cdot(a-1)\cdot(a+2)+0+a^3-0-0-0=-a^2+2a=a(2-a)$$

$$|A|=0:a(2-a)=0:\begin{cases}a=0\\2-a=0\quad a=2\end{cases}$$

Discusión.

i. Si $a\neq 0,-2$. $|A|\neq 0$. rg A = 3

ii. Si a = 0: $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}:|A|=0:\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}=-2\neq 0$. rg A = 2

iii. Si a = 2: $A=\begin{pmatrix}-2&0&2\\2&1&0\\0&2&4\end{pmatrix}:|A|=0:\begin{vmatrix}-2&0\\2&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$. rg A = 2

b. La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

Teniendo en cuenta el apartado anterior, si $a\neq 0, 2$, el $|A|\neq 0$ y por tanto existe A^{-1}.

Si a = 1: $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\0&1&3\end{pmatrix}$: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}(\text{adj } A)^t$: $|A|=a(2-a)\overset{a=1}{=}1\cdot(2-1)=1$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\left(\text{adj}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&1\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}0&-3&1\\1&-3&1\\0&1&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\-3&3&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$