

Proyecto MaTeX

POLINOMIOS

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

POLINOMIOS

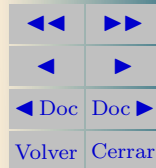


Tabla de Contenido

1. Polinomios

1.1. Operaciones con los polinomios

- Suma de polinomios
- Producto de polinomios
- Cociente de polinomios

1.2. División por $x - a$. Algoritmo de Ruffini

1.3. Valor numérico de un polinomio. Teorema del Resto

2. Factorización de polinomios

2.1. Raíz de un polinomio.

2.2. Métodos de Factorización

3. Fracciones Algebraicas

3.1. Operaciones con fracciones algebraicas

- Suma de fracciones algebraicas
- Producto y división de fracciones algebraicas

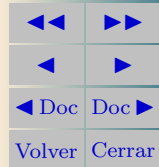
Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTEX

POLINOMIOS





1. Polinomios

Definición 1.1 Un *polinomio*, $P(x)$ en x es una expresión algebraica finita de sumas, diferencias y productos de x con valores numéricos constantes.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Los números a_i son los *coeficientes* del polinomio. El *grado* del polinomio es el mayor exponente de x .

► Ejemplos de polinomios en x son:

a) $P(x) = 2x + 1$ es un polinomio de grado 1 o **lineal**.

b) $Q(x) = 3x^2 - 5x + 1$ es un polinomio de grado 2 o **cuadrático**.

c) $R(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ es un polinomio de grado 3 o **cúbico**.

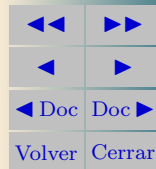
d) $T(x) = 2x^8 - 4x^6 + 5x - 1$ es un polinomio de grado 8.

Al referirnos al grado de un polinomio escribiremos abreviadamente $gr(P(x))$, así en los ejemplos anteriores tenemos

$$gr(P(x)) = 1 \quad gr(Q(x)) = 2 \quad gr(R(x)) = 3 \quad gr(T(x)) = 8$$

MaTEX

POLINOMIOS





1.1. Operaciones con los polinomios

• Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los términos semejantes.

Ejemplo 1.1. Sumar los polinomios

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 3 \quad Q(x) = -x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 2x - 1.$$

Solución:

Para sumarlos es convenientes colocar los polinomios de forma que coincidan los términos semejantes o de igual grado.

$$\begin{array}{r}
 P(x) = \quad 2x^4 \quad -5x^3 \quad +6x^2 \quad -x \quad +3 \\
 Q(x) = \quad -x^4 \quad +6x^3 \quad -5x^2 \quad -2x \quad -1 \\
 \hline
 P(x) + Q(x) = \quad x^4 \quad -x^3 \quad +x^2 \quad -3x \quad +2
 \end{array}$$

□

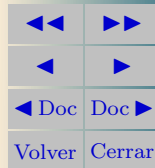
Ejercicio 1. Efectuar las sumas de los polinomios:

$$a) P(x) = -3x^5 + 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 7 \quad Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x$$

$$b) A(x) = 4 - 8x + 5x^2 - x^3 \quad B(x) = 5 + 6x - 5x^2$$

MaTeX

POLINOMIOS





• Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios $P(x) \cdot Q(x)$ se multiplica cada término de uno de ellos por todos los términos del otro polinomio.

Ejemplo 1.2. Multiplicar los polinomios

$$P(x) = 7x^2 - 3x + 5 \quad Q(x) = 2x - 3.$$

Solución:

Es conveniente disponer los cálculos como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r}
 P(x) = \qquad \qquad \qquad 7x^2 \quad -3x \quad +5 \\
 Q(x) = \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2x \quad -3 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -21x^2 \quad +9x \quad -15 \\
 \qquad \qquad \qquad 14x^3 \quad -6x^2 \quad +10x \\
 \hline
 P(x)Q(x) = 14x^3 \quad -27x^2 \quad +19x \quad -15
 \end{array}$$

□

Ejercicio 2. Multiplicar los polinomios:

$$P(x) = 4x^2 - 3x + 2 \quad Q(x) = x^2 + 2x - 5$$

MaTEX

POLINOMIOS





• Cociente de polinomios

Algoritmo de la división. Los pasos a seguir para dividir dos polinomios,

$$\frac{N(x)}{D(x)} \quad \text{gra}(N(x)) \geq \text{gra}(D(x))$$

siendo $N(x)$ el numerador o dividendo y $D(x)$ el divisor:

- Ordenamos los términos del numerador $N(x)$ y del divisor $D(x)$ de forma que las potencias de x sean decrecientes.
- Dividimos el primer término del numerador por el primer término del divisor. Esto da el primer término del cociente $C(x)$.
- Ahora, multiplicamos el término del cociente calculado por el divisor y restamos al dividendo el producto calculado. El resultado es el resto.
 - Si el grado del resto es menor que el grado del divisor, fin de la división.
 - En caso contrario se divide el resto entre el divisor como en el apartado *b*) para calcular el siguiente término del cociente, y se repite el proceso.

Una vez hallados el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ se puede expresar como,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

MaTEX

POLINOMIOS





► **Algoritmo de la división**

$$2x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 12 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 4 \\ \hline 2x^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Divisor} \\ \text{Cociente} \end{array}$$

Se divide el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor $2x^4 : x^2 = 2x^2$.

MaTEX

POLINOMIOS





► **Algoritmo de la división**

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 12 \quad | \quad x^2 - 4 \quad \text{Divisor} \\
 -2x^4 + 8x^2 - 12 \quad | \quad 2x^2 \quad \text{Cociente} \\
 \hline
 + x^3 + 5x^2 - 5x - 12
 \end{array}$$

MaTEX

POLINOMIOS

Se multiplica $2x^2$ por el divisor y se cambia de signo para restárselo al dividendo





► Algoritmo de la división

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 12 \quad | \quad x^2 - 4 \quad \text{Divisor} \\
 -2x^4 + 8x^2 - 12 \quad | \quad 2x^2 + x \quad \text{Cociente} \\
 \hline
 x^3 + 5x^2 - 5x - 12 \quad \text{resto parcial} \\
 -x^3 + 4x \\
 \hline
 + 5x^2 - x - 12
 \end{array}$$

Se divide el término de mayor grado del resto parcial entre el término de mayor grado del divisor $x^3 : x^2 = x$.

MaTEX

POLINOMIOS





► **Algoritmo de la división**

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 12 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 4 \\ \hline 2x^2 + x + 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Divisor} \\ \text{Cociente} \end{array} \\
 -2x^4 + 8x^2 - 12 \\
 \hline
 x^3 + 5x^2 - 5x - 12 \\
 -x^3 + 4x - 12 \\
 \hline
 + 5x^2 - x - 12 \quad \text{resto parcial} \\
 - 5x^2 + 20 \\
 \hline
 - x + 8
 \end{array}$$

Se divide el término de mayor grado del resto parcial entre el término de mayor grado del divisor $5x^2 : x^2 = 5$.

MaTEX

POLINOMIOS





Ejercicio 3. Efectúa las divisiones de los polinomios.

$$a) \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2}$$

$$b) \frac{4x^4 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

Ejercicio 4. Efectúa las divisiones de los polinomios expresando la solución de la forma:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$$a) \frac{3x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x + 2}$$

$$b) \frac{3x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 2}$$

$$c) \frac{4x^2 - 6x - 4}{2x + 1}$$

$$d) \frac{x^4 - 2x - 15}{x^2 - 5}$$

$$e) \frac{-2x^3 + 8x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 2}$$

$$f) \frac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 2}$$

MaTeX

POLINOMIOS





1.2. División por $x - a$. Algoritmo de Ruffini

Cuando el divisor es de la forma $x - a$, la división se puede realizar de una forma sencilla con el algoritmo de Ruffini.

A la izquierda se realiza con la caja y a la derecha por Ruffini para observar como aparecen los coeficientes del cociente y el valor del resto.

$4x^3 - 6x^2 + 5x - 11$	$x - 2$	
$-4x^3 + 8x^2$	$4x^2 + 2x + 9$	2
$2x^2 + 5x$		4
$-2x^2 + 4x$		2
$9x - 11$		4
$-9x + 18$		2
7		4
$C(x) = 4x^2 + 2x + 9$		2
$Resto = 7$		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2
		4
		2

Ejemplo 1.3. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios::

$$a) \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 4}{x + 1}$$

$$b) \frac{x^4 + x^2 + 1}{x + 1}$$

$$c) \frac{2x^3 - 15x - 8}{x - 3}$$

$$d) \frac{4x^3 + 4x^2 - 5x + 3}{x + 2}$$

Solución:

$$a) \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ & & -1 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & \boxed{-2} \end{array}$$

$$C(x) = x^2 - 4x + 6$$

$$R(x) = -2$$

$$b) \begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -2 & \boxed{3} \end{array}$$

$$C(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$$

$$R(x) = 3$$

$$c) \begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & 0 & -15 & -8 \\ & & 6 & 18 & 9 \\ \hline & 2 & 6 & 3 & \boxed{1} \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 + 6x + 3$$

$$R(x) = 1$$

$$d) \begin{array}{r|rrrr} -2 & 4 & 4 & -5 & 3 \\ & & -8 & 8 & -6 \\ \hline & 4 & -4 & 3 & \boxed{-3} \end{array}$$

$$C(x) = 4x^2 - 4x + 3$$

$$R(x) = -3$$

□



MaTEX

POLINOMIOS





1.3. Valor numérico de un polinomio. Teorema del Resto

Si en un polinomio sustituimos x por un valor numérico $x = a$ obtenemos el valor numérico del polinomio y lo indicamos como $P(a)$.

► Ejemplos de valor numérico de polinomios son:

a) En $x = 1$ el valor de $P(x) = 2x + 1$ es

$$P(1) = 2(1) + 1 = 3$$

b) En $x = 2$ el valor de $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$ es

$$P(2) = 3(2)^2 - 5(2) + 1 = 3$$

c) En $x = 0$ el valor de $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ es

$$P(0) = 2(0)^3 - 4(0)^2 + 5 = 5$$

Teorema 1.1. Teorema del resto.

El valor de $P(x)$ en $x = a$ coincide con el resto de $P(x) : (x - a)$

Ejemplo 1.4. Hallar el resto, sin dividir de $6x^2 - 5x - 6 : x - 1$.

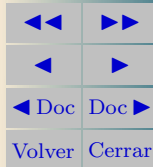
Solución: El resto coincide con el valor numérico en $x = 1$.

$$P(1) = 6(1)^2 - 5(1) - 6 = -5$$

□

MaTeX

POLINOMIOS





2. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es un proceso inverso de desarrollar un producto de polinomios. Por ejemplo la expresión

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 3$$

observada de izquierda a derecha está desarrollada y vista de derecha a izquierda está factorizada. La factorización tiene varios usos matemáticos. Por ejemplo

Para simplificar fracciones algebraicas:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x + 1} &= \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x + 1} && \triangleleft \text{factor común} \\ &= \frac{x(x + 1)(x + 2)}{x + 1} && \triangleleft \text{factorizando} \\ &= x(x + 2) && \triangleleft \text{simplificando} \end{aligned}$$

Para resolver ecuaciones: Si queremos resolver la ecuación

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

y el polinomio está factorizado

$$x(x + 1)(x + 2) = 0 \implies x = 0 \quad x = -1 \quad x = -2$$

basta hallar los valores que anulan los factores.

MaTEX

POLINOMIOS



Según se pueda o no descomponer en factores un polinomio tenemos la siguiente clasificación

Reducible Un polinomio se llama **reducible** cuando se puede descomponer en producto de polinomios de grado mayor o igual que 1.

$$x^2 + 2x = x(x + 2) \quad \triangleleft \text{reducible}$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \quad \triangleleft \text{reducible}$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3) \quad \triangleleft \text{reducible}$$

Irreducible Un polinomio se llama **irreducible** cuando no se puede descomponer en producto de polinomios de menor grado.

Test. Considera el polinomio $P(x) = 2x^2 + 2$, como $P(x)$ se puede escribir como

$$P(x) = 2x^2 + 2 = 2(x^2 + 1)$$

significa esto que el polinomio es reducible?.

Si.

No.

Los polinomios $x^2 + 1$ y $x^2 + x + 1$ son irreducibles porque no se pueden descomponer en factores de menor grado.

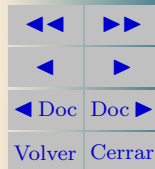
Los factores de un polinomio pueden ser lineales o cuadráticos. Por ejemplo, el polinomio

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$



MaTEX

POLINOMIOS



tiene un factor lineal $x - 1$ y un factor cuadrático $x^2 + 1$. El polinomio

$$(x - 1)^3(x^2 + 1)$$

tiene el factor lineal $x - 1$ que se repite 3 veces y decimos que es de multiplicidad 3, y el factor cuadrático irreducible $x^2 + 1$.

Ejemplo 2.1. Observa el siguiente polinomio descompuesto en factores:

$$x^3(2x + 1)^4(x^2 + 1)^5(5 - 2x)^3(x^2 + x + 1)$$

y clasifica el tipo y multiplicidad de sus factores.

Solución:

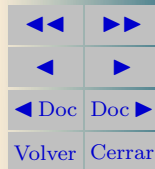
Factor	Tipo	Multiplicidad
x^3	lineal	3
$(2x + 1)^4$	lineal	4
$(x^2 + 1)^5$	cuadrático	5
$(5 - 2x)^3$	lineal	3
$(x^2 + x + 1)$	cuadrático	1

□



MaTEX

POLINOMIOS





2.1. Raíz de un polinomio.

Definición 2.1 Decimos que a es una **raíz** de $P(x)$ cuando $P(a) = 0$.

► Ejemplos de raíces de polinomios son:

a) $x = 1$ es una raíz de $P(x) = 2x - 2$ pues, $P(1) = 2(1) - 2 = 0$.

b) $x = 2$ es una raíz de $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$ pues, $P(2) = 3(2)^2 - 5(2) - 2 = 0$.

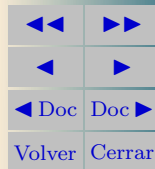
Inicio del Test Responde las siguientes cuestiones:

- | | | |
|--|--------|-------|
| 1. $x = -2$ es raíz de $x^2 - 4$ | Cierto | Falso |
| 2. $x = -2$ es raíz de $3x^2 + 6x - 1$ | Cierto | Falso |
| 3. $x = -2$ es raíz de $x^2 + 4x + 4$ | Cierto | Falso |
| 4. $x = -1$ es raíz de $(x - 2)(x^2 + 1)$ | Cierto | Falso |
| 5. $x = 3$ es raíz de $4x^4 - 2x^3 + 3x - 1$ | Cierto | Falso |

Final del Test

MaTeX

POLINOMIOS





Teorema 2.1. Raíces y Factores lineales .

$x = a$ es una raíz de $P(x)$ si y solo si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$

2.2. Métodos de Factorización

El método general de factorizar un polinomio es hallando sus raíces.

► **Factorización de polinomios cuadráticos** Para factorizar un polinomio cuadrático

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0 \quad (1)$$

hallamos sus raíces con el algoritmo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

Si las raíces son x_1 y x_2 el polinomio se factoriza de la forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo 2.2. Factorizar $P(x) = x^2 - 3x - 4$.

Solución: Hallamos sus raíces:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 4$$

MaTEX

POLINOMIOS





luego

$$P(x) = x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$$

□

Ejemplo 2.3. Factorizar $P(x) = x^2 + 2x + 1$.

Solución: Hallamos sus raíces:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

luego

$$P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$$

□

Ejemplo 2.4. Factorizar $P(x) = x^2 + x + 1$.

Solución: Hallamos sus raíces:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \text{No tiene raíces}$$

luego $P(x) = x^2 + x + 1$ es Irreducible

□

Ejemplo 2.5. Factorizar el polinomio cuadrático $6x^2 + x - 1$.

Solución:

$$6x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

MaTeX

POLINOMIOS





$$\begin{aligned}
 6x^2 + x - 1 &= 6 \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) &< \text{se opera} \\
 &= 6 \left(\frac{3x - 1}{3}\right) \left(\frac{2x + 1}{2}\right) &< \text{simplifica} \\
 &= (3x - 1)(2x + 1)
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6. Factorizar el polinomio cuadrático $8x^2 + 2x - 1$.

Solución: $8x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{16} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 8x^2 + 2x - 1 &= 8 \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) &< \text{se opera} \\
 &= 8 \left(\frac{4x - 1}{4}\right) \left(\frac{2x + 1}{2}\right) &< \text{simplifica} \\
 &= (4x - 1)(2x + 1)
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.7. Factorizar el polinomio cuadrático $6x^2 - 5x - 6$.

Solución: $6x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 3/2 \quad x_2 = -2/3$

$$6x^2 - 5x - 6 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (2x - 3)(3x + 2)$$

□

MaTeX

POLINOMIOS



► **Factorización de $x^2 - a^2$** Para factorizar un polinomio cuadrático de la forma $x^2 - a^2$ es muy sencilla ya que se tiene

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

Ejemplo 2.8. Factorizar los polinomios cuadráticos siguientes.

a) $x^2 - 1$.

b) $x^2 - 4$.

c) $4x^2 - 9$.

Solución:

a) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

b) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

c) $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

□

Ejercicio 5. Factorizar los polinomios cuadráticos siguientes.

a) $x^2 + 7x + 10$.

b) $x^2 - 7x + 10$.

c) $x^2 - 3x - 10$.

d) $x^2 + 3x - 10$.

e) $x^2 + 11x + 10$.

f) $x^2 - 9x - 10$.



MaTEX

POLINOMIOS





Ejercicio 6. Factorizar los polinomios cuadráticos siguientes.

a) $x^2 + 4x - 12$.

b) $x^2 + 3x - 18$.

c) $x^2 - 10x + 21$.

d) $x^2 + 7x - 8$.

e) $x^2 - 2x + 1$.

f) $2x^2 + 8x + 8$.

► **Factorización de polinomios cúbicos**

Para factorizar un polinomio cúbico

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad a_3 \neq 0 \quad (3)$$

habrá que hallar sus raíces. El caso más sencillo es cuando $P(x)$ tenga alguna raíz entera. En este caso la raíz tiene que ser un divisor del término independiente. Esto se debe al siguiente teorema.

Teorema 2.2. Raíces enteras de un polinomio .

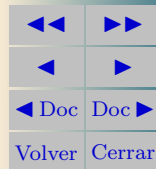
Si $x = a$ es una raíz entera de

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

entonces a divide al término independiente a_0

MaTeX

POLINOMIOS



Ejemplo 2.9. Factorizar $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solución: Si hay una solución entera estará entre los divisores de 30.

Aplicamos Ruffini con $x = 1 \triangleright$		1	-2	-5	6
Cociente $x^2 - x - 6 \triangleright$	1	1	-1	-6	0
Aplicamos Ruffini con $x = -2 \triangleright$	-2	-2	6		
Cociente $x - 3 \triangleright$	1	-3	0		
Aplicamos Ruffini con $x = 3 \triangleright$	3	3			
	1	0			

Luego la factorización de $P(x)$ tiene tres factores lineales:

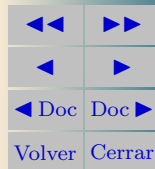
$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

□



MaTEX

POLINOMIOS



Ejemplo 2.10. Factorizar $P(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$.

Solución: Si hay una solución entera estará entre los divisores de 30.

		1	1	-19	11	30
Aplicamos Ruffini con $x = -1 \triangleright$	-1		-1	0	19	-30
Cociente $x^3 - 19x + 30 \triangleright$		1	0	-19	30	0
Aplicamos Ruffini con $x = 2 \triangleright$	2		2	4	-30	
Cociente $x^2 + 2x - 15 \triangleright$		1	2	-15		0
Aplicamos Ruffini con $x = 3 \triangleright$	3		3	15		
Cociente $x + 5 \triangleright$		1	5			0
Aplicamos Ruffini con $x = -5 \triangleright$	-5		-5			
		1				0

Luego la factorización de $P(x)$ tiene cuatro factores lineales:

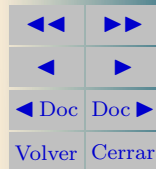
$$P(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 5)$$

□



MaTeX

POLINOMIOS



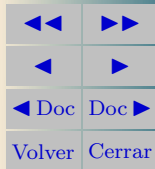
Ejemplo 2.11. Factorizar $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$.

Solución: Si hay una solución entera estará entre los divisores de -3 .



MaTeX

POLINOMIOS



		3	-2	0	2	-3
Aplicamos Ruffini con $x = 1 \triangleright$	1	3	1	1	1	3
Cociente $3x^3 + x^2 + x + 3 \triangleright$		3	1	1	3	0
Aplicamos Ruffini con $x = -1 \triangleright$	-1	-3	2	-3		
Cociente $3x^2 - 2x + 3 \triangleright$		3	-2	3		0

El último cociente es cuadrático y con Ruffini no encontramos raíces. Resolvemos con la ecuación de 2º grado.

$$3x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-32}}{6} \Rightarrow \text{No tiene raíces}$$

luego el último cociente $3x^2 - 2x + 3$ es irreducible. Luego la factorización de $P(x)$ tiene dos términos lineales y uno cuadrático irreducible.

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 1)(3x^2 - 2x + 3)$$

□



Ejercicio 7. Descomponer en factores los polinomios.

a) $x^2 - 25$.

b) $3x^4 + 9x^2$.

c) $x^3 + x^2 + x$.

d) $3x^3 - 20x^2 + 27x - 10$.

e) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

f) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$.

g) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$.

h) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

Ejercicio 8. Descomponer en factores los polinomios.

a) $x^3 - 3x - 2$.

b) $3x^3 + 5x^2 - 2x$.

c) $x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48$.

d) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x - 12$.

e) $x^3 - x^2 - 14x + 24$.

f) $2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 7x - 6$.

g) $x^3 - 13x^2 + 55x - 75$.

h) $x^3 + 2x + 3$.

i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

j) $3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$.

MaTEX

POLINOMIOS





3. Fracciones Algebraicas

Definición 3.1 Una *fracción algebraica*, es toda expresión de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

► Ejemplos de fracciones algebraicas son:

$$\frac{2x + 1}{x}, \quad \frac{x - 5}{x^2 + 1}, \quad \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 3x}.$$

Definición 3.2 Cuando en una fracción algebraica el numerador y denominador tienen factores comunes se llama *reducible*. En caso contrario se llama *irreducible*.

$$\frac{2x + 1}{x} \quad \triangleleft \text{irreducible}$$

$$\frac{x + 1}{x^2 + x} = \frac{x + 1}{x(x + 1)} = \frac{1}{x + 1} \quad \triangleleft \text{reducible}$$

$$\frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x}{x - 1} \quad \triangleleft \text{reducible}$$

Ejercicio 9. Simplifica por factorización las fracciones algebraicas siguientes:

MaTeX

POLINOMIOS





$$a) \frac{14x^2 - 7x}{7x}$$

$$b) \frac{4x^2 - 1}{4x^2 - 12x + 9}$$

$$c) \frac{2x^2 - 6x}{6x^2 - 54}$$

$$d) \frac{x^2 - 18x + 81}{x^2 - 81}$$

$$e) \frac{x^2 + 8x + 16}{x^3 - 16x}$$

$$f) \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$$

MaTEX

3.1. Operaciones con fracciones algebraicas

• Suma de fracciones algebraicas

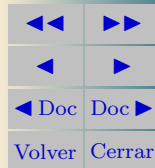
Para sumar dos fracciones algebraicas se reduce a común denominador.

► Si tienen el mismo denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador.

$$\frac{2x + 1}{x + 1} + \frac{3x}{x + 1} = \frac{5x + 1}{x + 1}$$

► Si tienen distinto denominador, se calcula el común denominador, que es el mínimo común múltiplo **m.c.m.** de los denominadores.

POLINOMIOS



**Ejemplo 3.1.**

$$\frac{x+1}{x+2} + \frac{3-x}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1) + (3-x)(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

$$= \frac{3x-5}{(x+2)(x+1)}$$

m.c.m = $(x+2)(x+1)$
 ◁ operando

Ejemplo 3.2.

$$\frac{2x+1}{x+1} + \frac{3x}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x+1} + \frac{3x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(2x+1)(x-1) + 3x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x+1)}$$

m.c.m = $(x-1)(x+1)$
 ◁ operando

Ejercicio 10. Efectúa las sumas reduciendo a común denominador.

a) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x^2-1}$

b) $\frac{1}{x^2+x} + \frac{3}{x+1}$

c) $\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x^2-4x}$

d) $\frac{1}{x^2+x} + \frac{3}{x^2-x}$

MaTEX

POLINOMIOS





- **Producto y división de fracciones algebraicas**

Para multiplicar o dividir dos fracciones algebraicas se efectúa:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$

Ejemplo 3.3.

$$\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+3}{x} = \frac{x(x+3)}{(x+1)x} = \frac{x+3}{x+1}$$

$$\frac{x}{x+1} : \frac{x+3}{x} = \frac{x \cdot x}{(x+1) \cdot (x+3)} = \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\frac{x}{x^2-1} : \frac{3}{x+1} = \frac{x(x+1)}{3(x+1)(x-1)} = \frac{x}{3(x-1)}$$

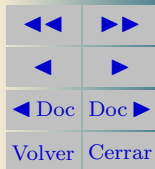
Ejercicio 11. Opera y simplifica las fracciones algebraicas.

a) $\frac{3x+3}{12x-12} : \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$

b) $\frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$

MaTEX

POLINOMIOS





Ejercicio 12. Calcula y simplifica si es posible:

$$a) \frac{2x}{5} \cdot \frac{1-3x}{x^2+2x}$$

$$b) \frac{6x+4}{x-2} \cdot \frac{4x+1}{2x+4}$$

$$c) \frac{-6x^2}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+1}{3x^3} \cdot \frac{x+1}{3x}$$

$$d) \frac{4x^2-9}{7x} \cdot \frac{3}{3-2x}$$

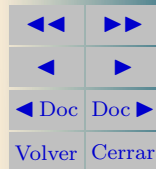
Ejercicio 13. Simplificar:

$$a) \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{y^2+1}{y} + \frac{x^2-1}{y} \cdot \frac{y^2-1}{x}$$

$$b) \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6} : \frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}$$

MaTEX

POLINOMIOS





Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

$$P(x) = -3x^5 + 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 7$$

$$a) \quad Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x$$

$$P(x) + Q(x) = -3x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 11x^2 + x - 7$$

$$A(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$$

$$b) \quad B(x) = -5x^2 + 6x + 5$$

$$A(x) + B(x) = -x^3 - 2x + 9$$

Ejercicio 1

MaTeX

POLINOMIOS



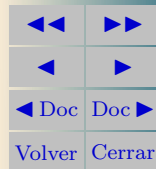
Ejercicio 2.

$$\begin{array}{r}
 P(x) = +2 \\
 Q(x) = -5 \\
 \hline
 -20x^2 +15x -10 \\
 8x^3 -6x^2 +4x \\
 4x^4 -3x^3 +2x^2 \\
 \hline
 P(x)Q(x) = 4x^4 +5x^3 -24x^2 +19x -10
 \end{array}$$

Ejercicio 2

MaTEX

POLINOMIOS



**Ejercicio 3.**

$$a) \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2} = 2x^2 + x + 3 + \frac{5}{x - 2}$$

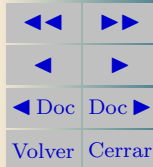
$$\begin{array}{r} 2x^3 \quad -3x^2 \quad +x \quad -1 \\ -2x^3 \quad +4x^2 \quad \quad \\ \hline \quad x^2 \quad +x \quad -1 \\ \quad -x^2 \quad +2x \quad \\ \hline \quad \quad 3x \quad -1 \\ \quad \quad -3x \quad +6 \\ \hline \quad \quad \quad +5 \end{array} \left| \frac{x - 2}{2x^2 + x + 3} \right.$$

$$b) \frac{4x^4 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 4x^2 - 2 + \frac{x + 3}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r} 4x^4 \quad \quad +x \quad +1 \\ -4x^4 \quad -4x^2 \quad \quad \\ \hline \quad -2x^2 \quad +x \quad +1 \\ \quad \quad 2x^2 \quad \quad +2 \\ \hline \quad \quad \quad x \quad +3 \end{array} \left| \frac{x^2 + 1}{4x^2 - 2} \right.$$

MaTeX

POLINOMIOS





Ejercicio 4.

$$a) \frac{3x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x + 2} = 3x^2 - 2x + 9 - \frac{19}{x + 2}$$

$$b) \frac{3x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 2} = 3x + 4 - \frac{x + 9}{x^2 + 2}$$

$$c) \frac{4x^2 - 6x - 4}{2x + 1} = 2x - 4$$

$$d) \frac{x^4 - 2x - 15}{x^2 - 5} = x^2 + 5 + \frac{-2x + 10}{x^2 - 5}$$

$$e) \frac{-2x^3 + 8x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 2} = -2x + 10 - \frac{3x + 15}{x^2 + x + 2}$$

$$f) \frac{x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 5}{x^2 + x + 2} = x^2 - 3x + 9 - \frac{13}{x^2 + x + 2}$$

MaTeX

POLINOMIOS

Ejercicio 4



Prueba del Teorema 1.1. En efecto, si dividimos $P(x) : (x - a)$ obtendremos un cociente $C(x)$ y un resto R , de forma que

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

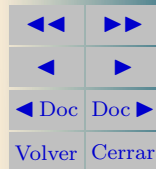
Sustituyendo x por a en la expresión anterior

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R = 0 + R = R$$



MaTeX

POLINOMIOS





Prueba del Teorema 2.1. En efecto:

► Si $x = a$ es una raíz de $P(x)$, al dividir $P(x) : (x - a)$ obtendremos un cociente $C(x)$ y un resto R , de forma que

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$$

Sustituyendo x por a en la expresión anterior

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + R = 0 + R = R = 0$$

como $R = 0$ la división es exacta y se tiene que $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$, y por tanto $x - a$ es un factor de $P(x)$.

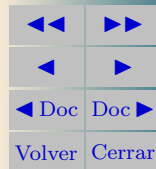
► Si $(x - a)$ es un factor de $P(x)$, entonces se tiene que

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x)$$

y al sustituir por a , el valor de $P(a)$ es 0, y por tanto $x = a$ es una raíz de $P(x)$. ◀

MaTEX

POLINOMIOS



**Ejercicio 5.**

a) $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

b) $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$

c) $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$

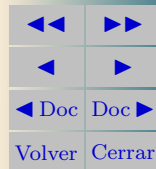
d) $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$

e) $x^2 + 11x + 10 = (x + 1)(x + 10)$

f) $x^2 - 9x - 10 = (x + 1)(x - 10)$

MaTEX**POLINOMIOS**

Ejercicio 5



**Ejercicio 6.**

a) $x^2 + 4x - 12 = (x - 2)(x + 6)$

b) $x^2 + 3x - 18 = (x + 6)(x - 3)$

c) $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 7)$

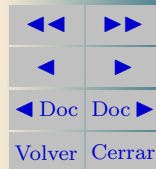
d) $x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$

e) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$

f) $2x^2 + 8x + 8 = 2(x + 2)^2$

MaTEX**POLINOMIOS**

Ejercicio 6



Prueba del Teorema 2.2. En efecto, si a es una raíz de $P(x)$ se tiene que al dividir $P(x) : (x - a)$ obtendremos un cociente $C(x)$, de forma que

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - a) \cdot C(x)$$

Sustituyendo x por a en la expresión anterior

$$a_3 a^3 + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 = (a - a) \cdot C(a) = 0$$

y despejando a_0 observamos que a_0 es un múltiplo de a

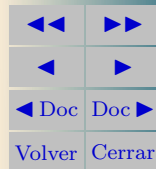
$$a_0 = -a(a_3 a^2 + a_2 a + a_1)$$

y por tanto a es un divisor del término independiente a_0 de $P(x)$. ◀



MaTEX

POLINOMIOS





Ejercicio 7.

$$a) x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$$

$$b) 3x^4 + 9x^2 = 3x^2(x^2 + 3)$$

$$c) x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$$

$$d) 3x^3 - 20x^2 + 27x - 10 = (x - 1)(x - 5)(3x - 2)$$

$$e) x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^2(x - 2)$$

$$f) x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = (x - 1)^3(x - 2)$$

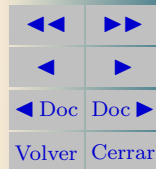
$$g) x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x - 1)^2(x - 2)^2$$

$$h) x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x + 3)(x + 2)(x - 2)$$

MaTEX

POLINOMIOS

Ejercicio 7





Ejercicio 8.

$$a) x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$$

$$b) 3x^3 + 5x^2 - 2x = x(x + 2)(3x - 1)$$

$$c) x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48 = (x - 2)^2(x - 3)(x + 4)$$

$$d) x^4 - 5x^3 + 5x^2 - x - 12 = (x + 1)(x - 4)(x^2 - 2x + 3)$$

$$e) x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x - 2)(x - 3)(x + 4)$$

$$f) 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 7x - 6 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(2x + 3)$$

$$g) x^3 - 13x^2 + 55x - 75 = (x - 5)^2(x - 3)$$

$$h) x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3)$$

$$i) x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

$$j) 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3 = (x + 1)(x - 1)(3x^2 - 2x + 3)$$

MaTEX

POLINOMIOS

Ejercicio 8



**Ejercicio 9.**

$$a) \frac{14x^2 - 7x}{7x} = \frac{7x(2x - 1)}{7x} = 2x - 1$$

$$b) \frac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9} = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{(2x - 3)^2} = \frac{2x + 3}{2x - 3}$$

$$c) \frac{2x^2 - 6x}{6x^2 - 54} = \frac{2x(x - 3)}{6(x - 3)(x + 3)} = \frac{x}{3(x + 3)}$$

$$d) \frac{x^2 - 18x + 81}{x^2 - 81} = \frac{(x - 9)^2}{(x - 9)(x + 9)} = \frac{x - 9}{x + 9}$$

$$e) \frac{x^2 + 8x + 16}{x^3 - 16x} = \frac{(x + 4)^2}{x(x - 4)(x + 4)} = \frac{x + 4}{x(x - 4)}$$

$$f) \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x - 1}$$

MaTEX

POLINOMIOS

Ejercicio 9





Ejercicio 10.

$$a) \text{ m.c.m.} = (x - 1)(x + 1)$$

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{3}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1) + 3}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$b) \text{ m.c.m.} = x(x + 1)$$

$$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{3}{x + 1} = \frac{1 + 3x}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$c) \text{ m.c.m.} = 4x(x - 1)$$

$$\frac{1}{2x} - \frac{3}{4x(x - 1)} = \frac{2(x - 1) - 3}{4x(x - 1)} = \frac{2x - 5}{4x(x - 1)}$$

$$d) \text{ m.c.m.} = x(x - 1)(x + 1)$$

$$\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{3}{x(x - 1)} = \frac{(x - 1) + 3(x + 1)}{x(x + 1)(x - 1)} = \frac{4x + 2}{x(x + 1)(x - 1)}$$

Ejercicio 10

MaTEX

POLINOMIOS





Ejercicio 11.

a)

$$\begin{aligned} \frac{3x+3}{12x-12} : \frac{(x+1)^2}{x^2-1} &= \frac{(3x+3)(x^2-1)}{(12x-12)(x+1)^2} && \triangleleft \text{se opera} \\ &= \frac{3(x+1)(x-1)(x+1)}{12(x-1)(x+1)^2} && \triangleleft \text{factorizando} \\ &= \frac{1}{4} && \triangleleft \text{simplificando} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1} &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{(x-1)(x+1)} && \triangleleft \text{factorizando} \\ &= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} && \triangleleft \text{simplificando} \end{aligned}$$

Ejercicio 11

MaTEX

POLINOMIOS





Ejercicio 12.

a)

$$\frac{2x}{5} \cdot \frac{1-3x}{x^2+2x} = \frac{2x(1-3x)}{5x(x+2)} = \frac{2(1-3x)}{5(x+2)}$$

b)

$$\frac{6x+4}{x-2} \cdot \frac{4x+1}{2x+4} = \frac{2(3x+2)(4x+1)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{(3x+2)(4x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

c)

$$\frac{-6x^2}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+1}{3x^3} \cdot \frac{x+1}{3x} = -\frac{6x^2(x+1)^2}{9(x+1)^2x^4} = -\frac{2}{3x^2}$$

d)

$$\frac{4x^2-9}{7x} \cdot \frac{3}{3-2x} = \frac{3(2x-3)(2x+3)}{7x(3-2x)} = -\frac{3(2x+3)}{7}$$

Ejercicio 12

MaTEX

POLINOMIOS





Ejercicio 13.

a)

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 + 1}{x} \cdot \frac{y^2 + 1}{y} + \frac{x^2 - 1}{y} \cdot \frac{y^2 - 1}{x} = \\
 & = \frac{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}{xy} + \frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{xy} = \\
 & = \frac{x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1 + x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1}{xy} = \\
 & = \frac{2x^2 y^2 + 2}{xy}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} : \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 12} = \quad \triangleleft \text{ se opera} \\
 & = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12)}{(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4)} \quad \triangleleft \text{ factorizando} \\
 & = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 1)} = \boxed{1} \quad \triangleleft \text{ simplificando}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 13

MaTEX

POLINOMIOS



Soluciones a los Tests

Solución al Test: La respuesta es que no es reducible, pues hemos definido polinomio reducible cuando se puede descomponer en producto de polinomios de grado mayor o igual que 1. Si escribimos

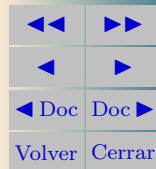
$$P(x) = 2x^2 + 2 = 2(x^2 + 1)$$

El factor 2 es un polinomio, pero de grado 0 y no se ajusta a la definición, luego $2x^2 + 2$ así como $x^2 + 1$ son polinomios irreducibles. **Final del Test**



MaTeX

POLINOMIOS



Índice alfabético

Algoritmo de la división, 7

Algoritmo de Ruffini, 13

Factorización, 16

fracción algebraica

reducible, 29

Fracciones Algebraicas, 29

polinomios, 3

cociente, 6

grado, 3

irreducibles, 17

producto, 5

reducibles, 17

suma, 4

valor numérico, 15

raíz, 19

Teorema del resto, 15



MaTeX

POLINOMIOS

