Combinatoria

La **combinatoria** es un compendio de técnicas encaminadas a efectuar el recuento de las diferentes colecciones de elementos que pueden obtenerse de un conjunto dado, sujetas a diversas restricciones.

1. Variaciones sin repetición.

Dado un conjunto de ***m*** elementos, se forman todas las agrupaciones posibles de ***n*** elementos, $n \leq m$, de modo que dos agrupaciones se distinguen, o bien por al menos un elemento, o bien por su orden de colocación. Cada una de ellas es una **variación.**

El número de variaciones se designa por $V_{m,n}$ que se calcula por

$$V_{m,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1)}_{\leftarrow \quad n\ factores \quad \rightarrow}$$

❖ **Ejemplo 1:**

Se extraen 5 cartas sin reemplazamiento (es decir, sin devolver la carta sacada), de una baraja de 40 naipes. ¿De cuántas formas puede hacerse?

Las formas posibles son: $V_{40,5} = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 = 78.960.960$

❖ **Ejemplo 2:**

Seis corredores luchan por tres medallas (oro, plata, bronce). ¿De cuántas formas pueden distribuirse los trofeos?

Las formas posibles son: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

2. Variaciones con repetición.

Este caso se distingue del anterior en que los elementos de una variación pueden repetirse una, dos, ..., n veces.

Su número se representa por $VR_{m,n}$, que es igual a

$$VR_{m,n} = m^n$$

❖ **Ejemplo 3:**

En el lanzamiento de 6 monedas, el número de configuraciones posibles de caras y cruces obtenido es:

$$VR_{2,6} = 2^6 = 64$$

❖ **Ejemplo4:**

Si se tiran dos dados y contamos todos los pares de números obtenidos, las distintas posibilidades son:

$$VR_{6,2} = 6^2 = 36$$

3. Permutaciones sin repetición.

Las permutaciones vienen asociadas las distintas ordenaciones que pueden formarse con m elementos. En consecuencia, dos permutaciones tienen idénticos elementos, aunque colocados en distinto orden.

Su número se designa por P_m, y como $P_m = V_{m,m}$ resulta que

$$P_m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 2 \cdot 1 = m!$$

❖ **Ejemplo 5:**

¿De cuántas maneras diferentes puden sentarse 7 personas en un mismo banco?
La respuesta sería:

$$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$$

❖ **Ejemplo 6:**

¿Cuántos números de 5 cifras distintas podemos formar con las cifras impares?
Las cifras impares son: 1, 3, 5, 7 y 9. Por consiguiente la respuesta es:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

4. Permutaciones con repetición.

Este caso contempla las ordenaciones que pueden efectuarse co m elementos, en los que hay $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$, iguales entre si, de modo que $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = m$
Su número es igual :

$$PR_m^{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{m!}{r_1! \cdot r_2! \cdots r_k!}$$

❖ **Ejemplo 7:**

Deseamos colocar 5 libros iguales de Historia, 3 iguales de Informática y 4, también iguales de Física, en una estantería. ¿De cuántos modos puede hacerse?
La respuesta es:

$$PR_{12}^{5,3,4} = \frac{12!}{5! \cdot 3! \cdot 4!} = 27.720$$

❖ **Ejemplo 8:**

Al lanzar 7 monedas, los posibles modos en que pueden salir 4 caras y 3 cruces son:

$$PR_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

5. Combinaciones.

Las combinaciones resuelven un problema análogo a las variaciones ordinarias, diferenciándose de éstas en que la posición de los elementos no es tenida en cuenta. Es decir, dos combinaciones se distinguen solamente por sus elementos y no por su orden de colocación.

Si los elementos han de ser todos **distintos**, se designan por $C_{m,n}$, y su número es

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \binom{m}{n} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\dots\cdot(m-n+1)}{n!} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$$

Si los elementos pueden repetirse, se designan por $CR_{m,n}$, y su número es

$$CR_{m,n} = C_{m+n-1,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

- **Ejemplo 9:**

De un conjunto de 15 alumnos se desea elegir una comisión de 5 miembros. ¿De cuántos modos puede hacerse?
El número de las distintas comisiones posibles es:

$$C_{15,5} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{5!} = 3.003$$

- **Ejemplo 10:**

¿Cuántas fichas tiene un dominó que va del blanco doble al seis doble?
La respuesta es:

$$CR_{7,2} = C_{8,2} = \frac{8\cdot 7}{2!} = 28$$