Programación lineal

1.- Introducción a la programación lineal.

2.- Planteamiento de un problema de programación lineal.

2.1 Enunciado del problema.

2.2 Análisis de los datos.

2.3 Representación gráfica de las restricciones.

2.4 Significado geométrico de la función ganancias.

2.5 El mismo problema, con otras funciones ganancia.

3.- Resolución de un problema de programación lineal.

3.1 Planteamiento general del problema.

3.2 Situaciones que pueden presentarse en un problema de programación lineal.

1.- Introducción a la programación lineal

Imaginémonos que estamos fabricando un producto en un número determinado de fábricas y que debe ser enviado a los mercados de muchas partes diferentes del país. ¿Cómo se podría proceder para calcular el esquema de los envíos que entregarían la mercancía desde nuestros muchos almacenes a los muchos mercados existentes al menor coste de transporte posible?

Por sentido común y mediante el proceso de ensayo y error se podría elaborar rápidamente un esquema razonable. Pero, incluso quien no sea matemático, puede ver que el encontrar la solución óptima entre el número infinito de posibles soluciones sería un problema de mucha más envergadura. Una técnica, desarrollada recientemente en matemáticas aplicadas, que hace posible resolver tales problemas en un tiempo relativamente breve mediante simples cálculos, nos la proporciona la Programación Lineal.

La teoría de la programación lineal fue desarrollada por John von Neumann, G. B. Dantzig, T. C. Koopmans y otros pocos matemáticos estadísticos y economistas. Se aplicó por primera vez como herramienta por Marshall Wood y un equipo en el proyecto de las fuerzas aéreas SCOOP. Una de sus aplicaciones fue precisamente el puente aéreo de Berlín. Como resultado del trabajo del grupo de las fuerzas aéreas y de otros grupos en programación lineal y en desarrollos recientes, tales como la teoría de juegos, la teoría estadística de la decisión y el análisis de entrada y salida, se están aplicando actualmente métodos verdaderamente científicos de análisis a muchos problemas en negocios y en logística.

Las primeras áreas de la industria que usaron la programación lineal fueron las refinerías petrolíferas, y han sido seguidas por todo tipo de industrias: la industria forestal, la industria del acero, los asuntos económicos de un país, etc. Todos estos asuntos implican la maximización o minimización, de algunas cantidades sujetas a ciertas restricciones.

Por ejemplo, un hombre de negocios quiere maximizar sus beneficios, pero está restringido por la cantidad de maquinaria y el número de empleados que tiene, por el capital que puede invertir y por otros factores de tipo económico.

Así, también una compañía aérea, que quiere minimizar sus costes, está restringida por el número de empleados o de aviones disponibles. Se le presentan algunas estrategias, cada una de las cuales le llevará a una ganancia o a una pérdida de varios tipos. Esto tendrá que calcularse con cierta precisión si se quiere obtener la estrategia óptima.

Estos dos ejemplos se pueden llamar problemas de optimización.

Bajo ciertas circunstancias la cantidad maximizada o minimizada y todas las restricciones impuestas, serán expresadas en términos de una ecuación o desigualdad lineal.

2.- Planteamiento de un problema de programación lineal

➢ 2.1 Enunciado del problema.

Las 20 chicas y los 10 chicos de un curso de 2º de bachillerato organizan un viaje, para el cual necesitan dinero. Deciden pedir trabajo por las tardes en una compañía encuestadora que contrata a equipos de jóvenes de dos tipos:

TIPO A: Parejas (*1 chico y 1 chica*).

TIPO B: Equipos de 4 (*3 chicas y 1 chico*).

Se paga a 3.000 ptas. la tarde al tipo A y 5.000 ptas. la tarde al tipo B. **¿Cómo les conviene distribuirse para sacar la mayor cantidad posible de dinero?**.

➢ 2.2 Análisis de los datos.

Representamos los datos en una tabla para poder relacionarlos mejor:

EQUIPOS	Nº	Chicas que intervienen	Chicos que intervienen
Tipo A	x	x	x
Tipo B	y	3y	y
Total		**x+3y**	**x+y**

Como el número total de chicas es 20, habrá de ser $x+3y \leq 20$.

Como el número total de chicos es 10, habrá de ser $x+y \leq 10$.

Además, el número de equipos de cada tipo no puede ser negativo: $x \geq 0, y \geq 0$.

La ganancia total diaria es, en miles de pesetas, 3x+5y. Dicha **ganancia** es lo que llamaremos **función objetivo**. Como depende de las variables "x" e "y", la denotaremos por **G(x,y)**. Lo que pretendemos es maximizarla.

- **EN RESUMEN**, deseamos averiguar para qué valores de *"x"* e *"y"* la expresión $G(x,y) = 3x+5y$ se hace lo más grande posible, teniendo en cuenta que *"x"* e *"y"* están sometidas a las siguientes **restricciones**: $\left\{ \begin{array}{c} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+3y \leq 20 \\ x+y \leq 10 \end{array} \right.$ **(1)**

  Los puntos del plano que verifican el sistema de inecuaciones **(1)** se llaman **soluciones factibles.**

➢ 2.3 Representación gráfica de las restricciones.

Cada una de las cuatro restricciones limita los posibles valores de "*x*" e "*y*". Veamos cómo:

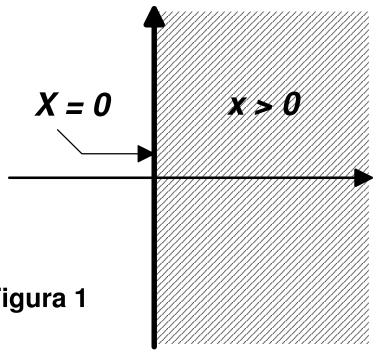


Figura 1

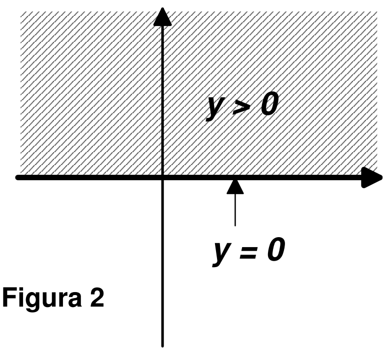


Figura 2

Figura 1: Todos los puntos situados a la derecha del eje Y, y el propio eje Y cumplen la restricción $x \geq 0$.

Figura 2: Todos los puntos que están por encima del eje X, y el propio eje X cumplen la restricción $y \geq 0$.

Figura 3

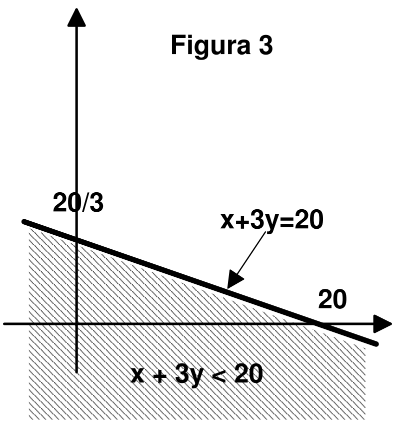


Figura 4

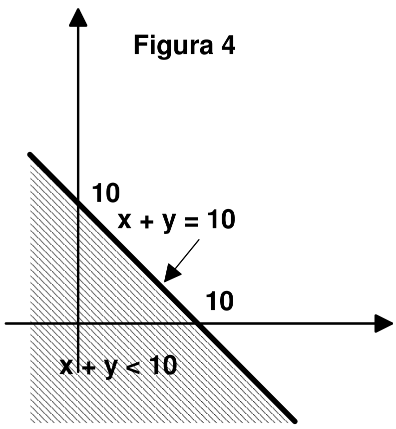
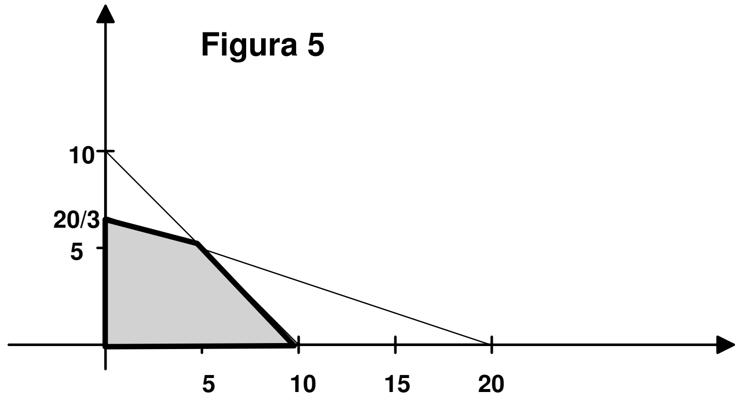


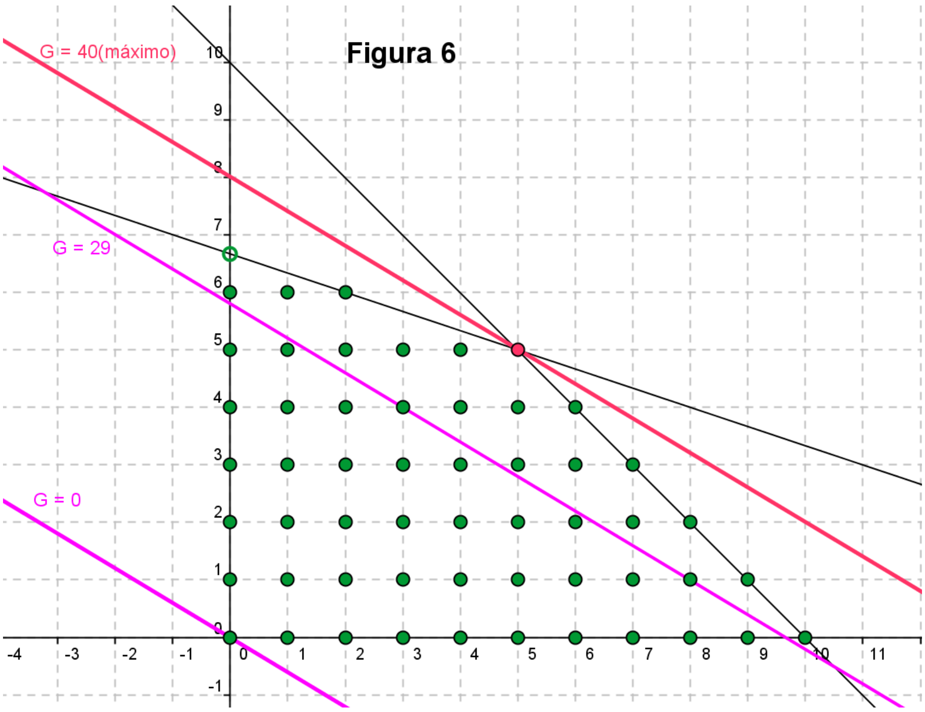
Figura 3: Todos los puntos de la parte sombreada, incluidos los de la recta x+3y=20, cumplen la restricción $x+3y \leq 20$.

Figura 4: Todos los puntos de la parte sombreada, incluidos los de la recta x+y=10, cumplen la restricción $x+y \leq 10$.

Observa que los puntos que cumplen simultáneamente las cuatro restricciones son los que están dentro del cuadrilátero sombreado de la **figura 5**:



Por último, nos falta añadir una condición que, por obvia, la habíamos dejado: **"x"** e **"y"**, número de equipos encuestadores de cada tipo, han de ser **números enteros**. Por lo tanto sólo hay 54 puntos posibles, que aparecen representados en la figura 6. Habrá que averiguar en cuál de ellos la función objetivo, G(x,y) = 3x+5y, toma un valor mayor.



Por ejemplo, al punto (3,4), que significa 3 parejas y 4 equipos de 4, corresponden unas ganancias de:

G(3,4) = 3.3 + 5.4 = 29 miles de pesetas.

¿Puede mejorarse?

➢ 2.4 Significado geométrico de la función ganancias.

Hemos visto que en el punto (3,4) las ganancias son 29 (miles de ptas.). Comprueba que en el punto (8,1) también las ganancias son 29. La coincidencia es debida a que ambos puntos pertenecen a la recta $3x+5y = 29$. Observa la figura 6.

La ganancia máxima se conseguirá, pues, sobre una recta

$$3x + 5y = K$$

que cumpla las dos condiciones siguientes:

• ***Ha de pasar por alguno de los puntos factibles*** (en ese punto tendrá los valores de *"x"* e *"y"* buscados).

• ***K, ha de ser la mayor posible.***

¿Cómo conseguir ambas cosas? Si tenemos en cuenta que todas las rectas $3x + 5y = k$ son **paralelas**, es fácil de explicar la validez del siguiente método gráfico:

• ***Representamos la recta G(x,y) = 3x + 5y = 0.***

• ***Utilizando regla y cartabón dibujamos rectas paralelas a 3x + 5y = 0 que pasen por algún punto factible hasta que encontremos aquella que esté lo más arriba posible (para que K sea máxima).***

Este punto resulta ser el (5,5), para el cual las ganancias son

$$G(5,5) = 3.5 + 5.5 = 40 \text{ (miles de ptas.)}$$

Con lo cual podemos asegurar ya que **la ganancia máxima se consigue haciendo 5 equipos de 4 y 5 parejas, y es de 40.000 ptas.** por cada tarde de trabajo.

➢ 2.5 El mismo problema, con otras funciones ganancia.

- Si la agencia pagara a ***1.000 ptas. la pareja y a 4.000 ptas. el equipo de 4***, la función ganancia sería $G_2(x,y) = x+4y$. En tal caso, el punto factible para el cual la función ganancia toma un valor mayor es el ***(2,6).*** (2 parejas, 6 grupos de 3).

- Si se pagara a ***2.000 ptas. la pareja y a 6.000 ptas. el equipo de 4***, la función ganancia sería $G_3(x,y) = 2x+6y$. Dicha función toma el valor máximo en todos los puntos factibles de la recta $2x+5y = 40$. Estos puntos son ***(2,6) y (5,5)*** y para ambos la ganancia es de 40.000 ptas.

- Si se pagara a ***3.000 ptas. la pareja y a 3.000 ptas. el equipo de 4***, la función ganancia sería $G_4(x,y) = 3x+3y$. El máximo se obtiene en todos los puntos de la recta $3x+3y = 30$. En nuestro caso: ***(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1) y (10,0).*** Para todos ellos la ganancia es de 30.000 ptas.

- Por último, si se diera el caso disparatado de que ***la pareja cobrara 5.000 ptas. y el equipo de 4, 4.000 ptas.***, la función ganancia sería $G_5(x,y) = 5x+4y$. El máximo se obtendría en el punto ***(10,0)*** y la ganancia es de 50.000 ptas.

3.- Resolución de un problema de programación lineal

➢ 3.1 Planteamiento general del problema.

En un problema de programación lineal con dos variables, *"x"* e *"y"*, se trata de hallar **el óptimo** (***máximo o mínimo valor***, según sea el caso) **de la función** :

F(x,y) = ax + by,

y los puntos en los que se alcanza, cuando *"x"* e *"y"* satisfacen el conjunto de condiciones:

$$\textbf{(1)}\left\{\begin{array}{lll} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y & \otimes & c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y & \otimes & c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_m \cdot x + b_m \cdot y & \otimes & c_m \end{array}\right.$$

(*El símbolo $\otimes$representa cualquiera de los signos* $\leq, \geq \quad o \quad =$)

donde los *a, b, a_i, b_i, c_i* $(1 \leq i \leq m)$ son números reales dados.

- **OBSERVACIONES:**

1. La función lineal **F(x,y) = ax + by** será **la función objetivo** del problema**.**
2. Las **restricciones** se componen del conjunto (1) de igualdades o desigualdades lineales.
3. Las **soluciones factibles** serán el conjunto de pares (*x,y*) de números reales (*o puntos del plano*) que verifiquen todas las restricciones. Dicho conjunto de puntos es un **recinto convexo acotado,** o bien ,un **recinto convexo no acotado**.
4. Aquellas de entre las soluciones factibles que den el valor óptimo a la función objetivo, serán las **soluciones óptimas** del problema.

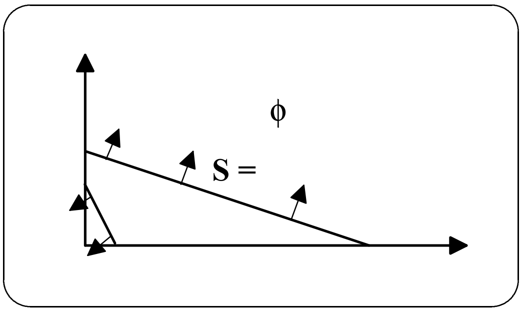
➢ 3.2 Situaciones que pueden presentarse en un problema de programación lineal.

Conviene señalar que no siempre existe solución óptima en este tipo de problemas, como se pone de manifiesto en los ejemplos que siguen, cuyo análisis gráfico muestra las situaciones que pueden presentarse.

problema 1:

Maximizar F(x,y) = x + y, sujeta a las restricciones $\left\{\begin{array}{l} x + 3y \geq 9 \\ 2x + y \leq 2 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array}\right.$

Análisis gráfico:

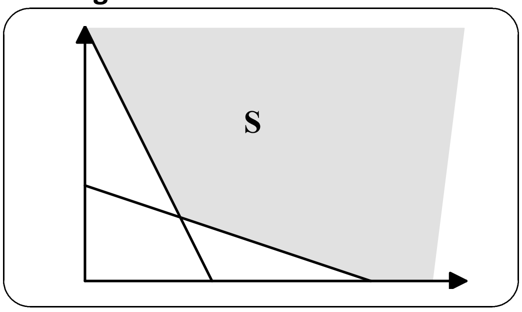


Conclusión: El conjunto de soluciones factibles, **S**, es vacío, por tanto, no existe solución óptima.

problema 2:

Maximizar F(x,y) = x + y, sujeta a las restricciones $\begin{cases} x+3y \geq 9 \\ 2x+y \geq 8 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$

Análisis gráfico:

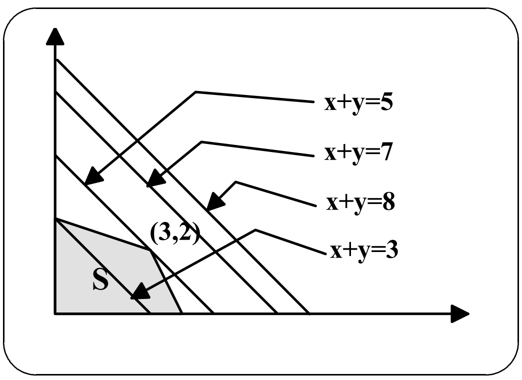


Conclusión: El conjunto de soluciones factibles, **S**, es un conjunto convexo y no vacío; pero, no estando acotada en él la función objetivo, no existe solución óptima.

problema 3:

Maximizar F(x,y) = x + y, sujeta a las restricciones $\begin{cases} x+3y \leq 9 \\ 2x+y \leq 8 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$

Análisis gráfico:

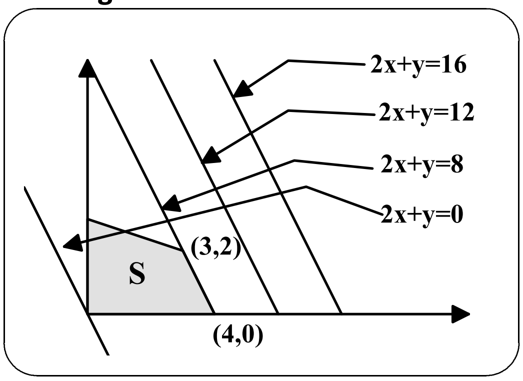


Conclusión: El conjunto de soluciones factibles, **S**, es un conjunto convexo no vacío y la función objetivo alcanza su máximo valor dentro de S en (3,2), vértice de S, que es por tanto, la solución óptima.

problema 4:

Maximizar F(x,y) = 2x + y, sujeta a las restricciones $\begin{cases} x+3y \leq 9 \\ 2x+y \leq 8 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$

Análisis gráfico:



Conclusión: En este caso, son soluciones óptimas, todos los puntos del segmento que une (3,2) y (4,0). Existen, pues, infinitas soluciones óptimas.

Caben, pues, tres posibilidades:

1. *Que el conjunto de soluciones factibles sea vacío, no existiendo entonces solución óptima.*
2. *Que el conjunto de soluciones factibles no sea vacío, pero la función objetivo no está acotada en él, no habiendo entonces solución óptima.*
3. *Que exista solución óptima; siendo posible, en este caso, su multiplicidad.*

♦ A la vista de los ejemplos anteriores, destaquemos tres observaciones importantes:

1. **El conjunto de soluciones factibles es convexo** (vacío en el primer ejemplo).
2. **El conjunto de soluciones óptimas es convexo** (vacío en los ejemplos 1º y 2º).
3. **En los casos en que existe solución óptima** (ejemplos 3º y 4º)**, alguna de ellas es vértice del conjunto de soluciones factibles.**

♦ Pues bien, existen unos *Teoremas fundamentales* de la programación lineal, que prueban que los tres hechos mencionados anteriormente son ciertos con carácter general para todo problema de programación lineal.

Ejercicios

Ejercicio 1

Un fabricante de muebles hace dos tipos de sillas, Tipo A y Tipo B. Cada silla A requiere 8 horas de trabajo-hombre (1 hombre trabajando 8 horas, 2 hombres trabajando 4 horas, etc.). La silla B necesita 5 horas-hombre. Los materiales para el tipo A cuestan 4 unidades monetarias y los del tipo B, 5 u.m. El beneficio que se obtiene haciendo la silla A es de 7/4 u.m. y el beneficio de la silla B 3/2 u.m. El fabricante tiene que tener en cuenta las siguientes condiciones:

1º Un contrato para fabricar 15 sillas del tipo A como mínimo y 10 tipo B por semana,

2º sólo se pueden trabajar 320 horas-hombre por semana,

3º el coste total de material por semana, para todas las sillas producidas, no deberá sobrepasar las 200 u.m.

Hallar el número de sillas de cada tipo que habrán de fabricarse por semana, para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 2

La compañía "Perrito caliente" produce dos tipos de alimentos para perros, marcas A y B, respectivamente. Cada lata de la marca A contiene 200 g de carne y 100 g de harina. La marca B contiene 140 g de carne y 160 de harina por lata. Las instalaciones pueden manipular un máximo de 78 kg. de carne y 48 kg. de harina por hora. Si el beneficio obtenido de la marca A es de 300 ptas.. por lata y el de la marca B es de 240 ptas.. por lata, ¿cuántas latas de cada marca deben producirse por hora para maximizar el beneficio?

Ejercicio 3

En un país hay dos fuentes productoras de carbón, A y B, y tres centros de consumo, 1, 2 y 3. Las fuentes producen 35 y 55 unidades, respectivamente, y los centros de consumo necesitan 30, 40 y 50 unidades, respectivamente. Los gastos de transporte de cada fuente a cada centro comercial son los que se indican en la tabla siguiente:

	1	**2**	**3**
A	1	2	4
B	3	1	5

Proponer la distribución de carbón más conveniente.

Ejercicio 4

En unos grandes almacenes se necesitan entre 6 y 15 vigilantes cuando están abiertos al público y entre 4 y 7 vigilantes nocturnos. Por razones de seguridad debe haber más vigilantes cuando están abiertos. Si el salario nocturno es un 60 % más alto que el diurno, ¿cómo debe organizarse el servicio para que resulte lo más económico posible?

Ejercicio 5

Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 8.000 pesetas y el de cada uno de los pequeños 6.000 pesetas. Se quiere saber cuántos autobuses de cada clase se tienen que alquilar para que el coste del viaje sea mínimo. Para ello se pide:

(a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos).*

(b) Representar la región factible. *(2'5 puntos).*

(c) *Resolver* el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos). (SJ-94)*

Ejercicio 6

Un camión puede transportar como máximo 9 toneladas de mercancía por viaje. En un cierto viaje desea transportar al menos 4 toneladas de la mercancía A., y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporta de A. Sabiendo que se cobra 3.000 pesetas por tonelada de A transportada y 2.000 pesetas por tonelada de B, se quiere saber cuántas toneladas de A y B se deben cargar en el camión para obtener la ganancia máxima. Para ello se pide:

(a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos).*

(b) Representar la región factible. *(2'5 puntos).*

(c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos).* ***(SS-94).***

Ejercicio 7

Dos factorías de automóviles, F_1 y F_2, producen respectivamente, 3000 y 4000 coches. Estos automóviles deben distribuirse a tres centros de ventas, C1, C2 y C3, en cantidades de 3000, 2500 y 1500 respectivamente. Los costes de transporte por vehículo desde las fábricas a los puntos de venta vienen dados en la siguiente tabla:

(en pesetas)	C_1	C_2	C_3
desde F_1	2.000	2.500	2.000
desde F_2	1.500	3.000	1.000

Determina cuántos coches hay que llevar desde cada fábrica a cada centro de ventas para que el transporte resulte más económico.

Ejercicio 8

Una empresa fabrica agua de colonia de dos tipos ***A*** y ***B***. La colonia ***A*** lleva un 10 % de extracto de rosas, un 20 % de alcohol y el resto de agua. La ***B*** lleva un 30 % de extracto de rosas, un 10 % de alcohol y el resto de agua. Se dispone de 1.000 litros de extracto de rosas y 1.600 litros de alcohol. La empresa vende a 150 ptas./l el producto ***B*** y a 75 ptas./l el producto ***A***. *¿Cuántos litros de cada producto ha de fabricar para que el importe de la venta sea máximo?*

Ejercicio 9

En una carpintería, que consta de tres secciones, se construyen mesas y conjuntos de 4 sillas. En la primera sección se cortan las piezas que conforman los muebles, invirtiéndose una hora en el conjunto de las 4 sillas y tres horas en la mesa . En la segunda sección se realiza el ensamblaje de las piezas, empleándose 1 h. 20 m.

tanto para las sillas como para la mesa. Por último, en la tercera sección se pulen y lacan los muebles, tardándose 2 h. 30 m. en finalizar las 4 sillas y sólo 8/7 de hora en la mesa.

Debido a las características de la empresa, sólo se puede trabajar un máximo de 61 horas semanales en las secciones 2ª y 3ª y 60 horas en la 1ª.
Sabiendo que las ganancias por el conjunto de las 4 sillas y la mesa son respectivamente, 8000 y 6000 ptas. , ¿cuál debe ser la producción para que los beneficios sean máximos?

- ## Ejercicio 10

Dos abonos están compuestos por los tres mismos ingredientes P, Q y R, aunque en distinta proporción . Así, el primer abono, cuyo precio es 12 ptas/paquete, consta de 2 unidades de P , 2 de Q y 1 de R; el segundo consta de 1 unidad de P, 2 de Q y 2 de R, siendo su precio de 15 ptas/paquete. Si el mínimo exigido en la plantación es de 8 , 10 y 6 unidades de P , Q y R , respectivamente, ¿ cuál es la combinación de los dos abonos que ofrece un costo mínimo?

- ## Ejercicio 11

Un fabricante de muebles tiene 6 unidades de madera y 28 horas disponibles durante las cuales fabricará biombos decorativos. Con anterioridad, se han vendido bien dos modelos, de manera que se limitará a producir estos dos. Estima que del modelo I requiere 2 unidades de madera y 7 horas del tiempo disponible, mientras que el modelo II requiere 1 unidad de madera y 8 horas. Los precios de los modelos son 120 y 80 dólares respectivamente. ¿Cuántos biombos de cada modelo debe fabricar si desea maximizar su ingreso en la venta?

- ## Ejercicio 12

Un taller se dedica a producir mesas y sillas. Para dicha elaboración dispone de dos materias primas roble y pino. Semanalmente dispone de 150 unidades de roble y 100 de pino y pueden trabajar a lo sumo 80 horas. Se sabe que cada mesa necesita 5 unidades de roble, 2 de pino y 4 h. de trabajo y cada silla 2 unidades de roble, 3 de pino y 2 h. de trabajo. La venta de cada mesa proporciona un beneficio neto de 12 unidades monetarias y cada silla 8 unidades monetarias. Halla el número de mesas y sillas que se deben hacer semanalmente para que los beneficios sean máximos.

- ## Ejercicio 13

Resuelve:

Maximizar Z = 40 x + 36y

$$s.a.:\begin{cases} x \le 18 \\ y \le 10 \\ 5x+3y \ge 45 \\ x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Maximizar Z = 3 x + 2 y

$$s.a.:\begin{cases} 6x+4y \le 24 \\ 10x+3y \le 30 \\ x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Maximizar Z = $x + y$

$$s.a.:\begin{cases} x-y \ge 1 \\ x+y \ge 1 \\ x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Maximizar Z = x - y

$$s.a.:\begin{cases} x+y \ge 1 \\ 2x-2y \le 1 \\ 2x-3y \ge -3 \\ x \le \frac{3}{2} \\ x \ge 0 \quad , y \ge 0 \end{cases}$$

Ejercicio 14

Una empresa dedicada a la fabricación de automóviles fabrica dos modelos. Uno utilitario de 950 cm 3 de cilindrada y otro de 1600 cm3 de cilindrada. Para ello dispone de los siguientes medios de producción diaria:

Capacidad de las máquinas	120 coches diarios
Trabajo del personal	15000 horas diarias
Acero	16000 kg
Fundición	60000 kg

Se sabe que el modelo 950 absorbe 300 kg de fundición, 100 kg de acero y 100 horas de trabajo. El modelo 1600, absorbe 500 kg de fundición, 200 de acero y 150 horas.
Cada coche del modelo 950 deja un beneficio de 7500 ptas y el modelo 1600 deja 10000 ptas de beneficio. Halla el número de coches de cada tipo que deben fabricarse diariamente para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 15

Los alumnos de un conservatorio de música deciden formar una orquesta. Los gustos del público exigen que haya siempre mayor o igual número de instrumentos de cuerda que de viento, y que el número de instrumentos de cuerda no debe superar el doble del número de instrumentos de viento. En total hay disponibles 20 instrumentos de viento y 30 de cuerda. Los empresarios pagan a la orquesta 25000 ptas por cada instrumento de viento y 20000 por cada uno de cuerda. Se pide:

(a) ¿De cuántos instrumentos de cuerda y cuántos de viento se debe componer la orquesta para obtener el máximo beneficio? . (*6 puntos*)

(b) Si se suprime la restricción del número total disponible de instrumentos de viento ¿varía la respuesta en el apartado ***(a)*** ?. Razonar la respuesta . En caso de que varíe, calcular la nueva solución. (*2 puntos*)

(c) Si se suprime tanto la restricción del número total disponible de instrumentos de viento como de cuerda, ¿qué ocurre con el beneficio?. Razonar la respuesta. (*2 puntos*) **(Selectividad Junio 95)**

Ejercicio 16

(a) En un problema de programación lineal, qué diferencia hay entre solución factible y solución óptima. (*1 punto*)
(b) Sea S la región del plano definida por las 5 inecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x - y \geq -2 \\ x + 2y \leq 6 \\ x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

(1) Representar gráficamente la región S y calcular sus vértices. (*4 puntos*)

(2) Considerar la función $f(x,y) = x + y$. Calcular los valores de $(x\ ,\ y)$ que hacen mínima y los que hacen máxima la, función $f(x,y)$ en la región S. Razona la respuesta. (*2 puntos*)

(3) Considerar la función $g(x,y) = -2x - 4y$. Calcular los valores de $(x\ ,\ y)$ que hacen mínima y los que hacen máxima la función $g(x,y)$ en la región S. Razona la respuesta. (*3 puntos*) **(Selectividad Junio 95)**

Ejercicio 17

Una compañía aérea tiene 2 aviones A y B para cubrir un determinado trayecto . El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede pasar de 120 vuelos y el avión B no puede hacer más de 180. Entre los dos aviones han de realizar al menos 60 vuelos y como mucho 200. Se pide:

(a) Si en cada vuelo del avión A la empresa gana 300.000 ptas y en cada vuelo del avión B, 200.000, ¿cuántos vuelos debe realizar cada avión para maximizar los beneficios de la empresa? (Explicar los pasos seguidos para resolver el problema). (*6 puntos*)

(b) ¿Se puede quitar alguna restricción sin que la solución varíe?. Razonar la respuesta. (*1 punto*)

(c) Si en cada vuelo el avión A consume el doble de litros de gasolina que el avión B, ¿cuántos vuelos ha de hacer cada avión para que el consumo de gasolina sea mínimo? (*3 puntos*) **(Selectividad Septiembre 95)**

- **Ejercicio 18**

Un fabricante de alfombras dispone de las siguientes existencias de lana: 500 kg de color azul, 400 kg de color verde y 225 kg de color rojo. Desea fabricar dos tipos de alfombras A y B. Para fabricar una de tipo A se necesitan 1 kg de lana azul y 2 kg de lana verde y para fabricar una de tipo B 2 kg de lana azul, 1 kg de lana verde y 1 kg de lana roja. Cada alfombra de tipo A se vende por 2000 ptas y cada una de tipo B por 3000 ptas. Se supone que se vende todo lo que se fabrica. Se pide:

(a) ¿Cuántas alfombras de cada tipo se han de fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. (*8 puntos*)

(b) ¿Qué cantidad de lana de cada color quedará cuando se fabrique el número de alfombras que proporciona el máximo beneficio?. (*2 puntos*) **(Selectividad junio 96)**

- **Ejercicio 19**

En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con 2 alimentos A y B. Estos alimentos contienen 3 principios nutritivos: N1 , N2 y N3 . Una unidad de A vale 100 ptas y contiene 2 , 1 y 1 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Una unidad de B vale 240 ptas y contiene 1, 3 y 2 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente . Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Se pide :

(a) Plantear un problema de programación lineal que permita determinar las cantidades de alimentos A y B que den lugar a la dieta de coste mínimo . (*5 puntos*) ***(b)*** Resolver el problema planteado en el apartado anterior. (*5 puntos*) **(Selectividad Septiembre 96)**

- **Ejercicio 20**

La compañía *"Amoralcán"* produce 2 tipos de alimentos para perros, marcas A y B. Cada lata de la marca A contiene 200 g de carne y 100 g de harina. La marca B contiene 140 g de carne y 160 g de harina por lata . Las instalaciones pueden manipular un máximo de 78 kg de carne y 48 kg de harina por hora. Si el beneficio obtenido de la marca A es de 300 ptas por lata y el de la marca B es de 240 ptas por lata, ¿cuántas latas de cada marca deben producirse por hora para minimizar el beneficio?

- **Ejercicio 21**

Los alumnos de 2º de bachillerato, con el objetivo de recaudar fondos para la excursión de fin de curso, deciden vender paquetes de dulces facilitados por una empresa local. Disponen de 10 kg de polvorones y 8 kg de mantecados. Acuerdan hacer paquetes de 2 tipos: unos, a un precio de 300 ptas, formado por 100 g de polvorones y 150 g de mantecados, y los otros, a un precio de 400 ptas, con 200 g de polvorones y 100 g de mantecados. ¿Cuántos paquetes de cada tipo les convendrá vender?

Ejercicio 22

(***Selectividad: Junio 98***) Considerar el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} y-x \geq -2 \\ -x-y \leq 2 \\ 3x+y \leq 3 \end{cases}$. Se pide:

(a) Representar gráficamente el conjunto S solución de dicho sistema de inecuaciones. (*3 puntos*)

(b) Determinar si $f(x,y) = 3x - 2y$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. (*3'5 puntos*)

(c) Determinar si $g(x,y) = -6x + 4y$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. (*3'5 puntos*)

Ejercicio 23

(***Selectividad: Septiembre 98***) Una empresa que fabrica motos y coches en dos factorías, F_1 y F_2, ha recibido un pedido de 300 coches y 500 motos. En la factoría F_1 se producen 10 coches y 25 motos por hora y en la F_2 se producen 20 coches por hora y el mismo número de motos por hora que en la otra. Sabiendo que los costes operativos de las factorías F_1 y F_2 son 9.000 y 7.000 unidades monetarias por hora respectivamente, se pide:

(a) ¿Cuántas horas debe trabajar cada factoría para servir el pedido con los mínimos costes?, ¿cuál es el valor de estos mínimos costes?. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta. (***8 puntos***).

(b) Supón que la empresa decide que el número de horas trabajadas entre las dos factorías para servir un pedido no puede ser superior a 50. ¿Cambiaría la solución del problema? Razona la respuesta. (***2 puntos***).

Ejercicio 24

Maximiza la función $f(x,y) = 4x + 3y$ sujeta a las restricciones: $\{x \geq 0, y \geq 0 \geq, x + y \leq 10, 2y \geq 3x\}$.
Solución: Máximo en x = 4, y = 6

Ejercicio 25

Maximiza la función $f(x,y) = x + y$ sujeta a las restricciones: $\begin{cases} y \geq 0 \\ 2x+y \leq 2 \\ 4x+y \geq 0 \end{cases}$.

Solución: Máximo en x = -1, y = 4

Ejercicio 26

Considera la función $f(x,y) = x + 3y$.
(a) Razona si f(x,y) alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto S. En caso afirmativo, calcula dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. $S = \{(x,y) \perp 2x + y \leq 4,\ x + 3y \leq 7,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
(b) Razona si f(x,y) alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto T. En caso afirmativo, calcula dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. $T = \{(x,y) \perp 2x + y \geq 4,\ x + 3y \geq 7,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.
Solución: (a) f(x,y) alcanza el valor máximo de 7 en todos los puntos del segmento A(0, 7/4) B(1,2); el valor mínimo de 0 se alcanza en el punto D(0,0). **(b)** f no alcanza el máximo pues se puede hacer todo lo grande que queramos y el mínimo 7 se consigue en todos los puntos del segmento B(1,2) C(7,0).

Ejercicio 27

Una fábrica produce muebles clásicos y funcionales. Para su fabricación, requiere tiempo de proceso de construcción y pintura. El clásico precisa una unidad de tiempo de construcción y tres de pintura, y el funcional, dos de construcción y una de pintura. La situación actual de la empresa no permite utilizar más de 10 unidades de tiempo y quince de pintura. (a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones. (b) ¿Qué combinaciones de muebles se pueden fabricar? (c) Si el beneficio empresarial es función del número de unidades fabricadas de acuerdo con la relación 3C+2F, ¿cuántas unidades de cada líneas deben fabricarse para maximizar el beneficio?

Ejercicio 28

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 € y 30 € por unidad, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose la siguientes restricciones:

- El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario.
- Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, el utilizado en cada silla 2 € y cada operario dispone de 12 € diarios para material.

(a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema. (b) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (c) Razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si eso le conviene a la empresa. (d) Resuelve el problema.

Ejercicio 29

Una empresa piensa invertir hasta 36 millones de euros en una urbanización para construir viviendas de cuatro dormitorios (tipo A), cuyo costo unitario es de 400.000€, y viviendas de dos dormitorios (tipo B) que cuestan cada una 300.000€.

La normativa vigente limita el número total de viviendas a 100 de las que, como máximo, 80 pueden ser de dos dormitorios.

Si la empresa obtiene un beneficio de 40.000€ por la venta de cada vivienda tipo A y de 30.000€ por la venta de cada vivienda tipo B, determina cuántas viviendas de cada tipo debe construir para maximizar beneficios.

Ejercicio 30

Una tienda de moda está preparando su pedido de trajes para la próxima temporada. Para que cierto proveedor le haga unos precios especiales, el pedido debe incluir al menos 10 trajes de fabricación nacional y no sobrepasar los 20 trajes de ese tipo. Además, el número de trajes de fabricación nacional debería ser al menos una tercera parte del número de trajes de importación. Por otro lado, el beneficio que la tienda obtendría por la venta de cada traje de fabricación nacional sería de 120 € y de 200 € por la venta de cada uno de importación, y la tienda quiere que el beneficio total que se pueda alcanzar vendiendo todo el pedido sea como mínimo de 3.600 €.

(a) Se pretende calcular las unidades de CAD producto que se pueden pedir al proveedor cumpliendo todos los requerimientos anteriores. Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían pedir 12 trajes de fabricación nacional y 45 de importación?

(b) Calcula las unidades de cada producto que se han de pedir para minimizar el número total de trajes pedidos. Con ese pedido, ¿qué beneficio se obtendría?

Ejercicio 31

Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas. Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes. El lote del primer proveedor está formado por cuatro unidades de B y una de A. El lote del segundo proveedor está formado por una unidad de B y cuatro de A.

El primer proveedor vende cada lote a 10 €, y el segundo a 20 € el suyo. ¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el coste mínimo?

▪ Ejercicio 32

Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G1 y G2. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo G1 es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo G2 es capaz de asfaltar 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C.
El coste semanal se estima en 3.300 € para G1 y en 3.500 para G2. Se necesitaría asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la B y 10 en la zona C.
¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

▪ Ejercicio 33

Una empresa dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para fabricar carpetas tamaño folio y tamaño cuartilla. Para la primera se necesitan 0’20 m^2 de cartón y 30 cm de cinta de goma y se vende a 1’40 € la unidad. Para la segunda se necesitan 0’15 m^2 de cartón y 27 cm de cinta de goma y se vende a 1’10 € la unidad.
(a) Representa la región factible.
(b) ¿Cuántas carpetas de cada tipo interesa fabricar para que el beneficio sea máximo? Calcula ese beneficio máximo.