Ejercicios

▪ Ejercicio 1

Un fabricante de muebles hace dos tipos de sillas, Tipo A y Tipo B. Cada silla A requiere 8 horas de trabajo-hombre (1 hombre trabajando 8 horas, 2 hombres trabajando 4 horas, etc.). La silla B necesita 5 horas-hombre. Los materiales para el tipo A cuestan 4 unidades monetarias y los del tipo B, 5 u.m. El beneficio que se obtiene haciendo la silla A es de 7/4 u.m. y el beneficio de la silla B 3/2 u.m. El fabricante tiene que tener en cuenta las siguientes condiciones:

1º Un contrato para fabricar 15 sillas del tipo A como mínimo y 10 tipo B por semana,

2º sólo se pueden trabajar 320 horas-hombre por semana,

3º el coste total de material por semana, para todas las sillas producidas, no deberá sobrepasar las 200 u.m.

Hallar el número de sillas de cada tipo que habrán de fabricarse por semana, para que el beneficio sea máximo.

▪ Ejercicio 2

La compañía "Perrito caliente" produce dos tipos de alimentos para perros, marcas A y B, respectivamente. Cada lata de la marca A contiene 200 g de carne y 100 g de harina. La marca B contiene 140 g de carne y 160 de harina por lata. Las instalaciones pueden manipular un máximo de 78 kg. de carne y 48 kg. de harina por hora. Si el beneficio obtenido de la marca A es de 300 ptas.. por lata y el de la marca B es de 240 ptas.. por lata, ¿cuántas latas de cada marca deben producirse por hora para maximizar el beneficio?

▪ Ejercicio 3

En un país hay dos fuentes productoras de carbón, A y B, y tres centros de consumo, 1, 2 y 3. Las fuentes producen 35 y 55 unidades, respectivamente, y los centros de consumo necesitan 30, 40 y 50 unidades, respectivamente. Los gastos de transporte de cada fuente a cada centro comercial son los que se indican en la tabla siguiente:

	1	2	3
A	1	2	4
B	3	1	5

Proponer la distribución de carbón más conveniente.

▪ Ejercicio 4

En unos grandes almacenes se necesitan entre 6 y 15 vigilantes cuando están abiertos al público y entre 4 y 7 vigilantes nocturnos. Por razones de seguridad debe haber más vigilantes cuando están abiertos. Si el salario nocturno es un 60 % más alto que el diurno, ¿cómo debe organizarse el servicio para que resulte lo más económico posible?

▪ Ejercicio 5

Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 8.000 pesetas y el de cada uno de los pequeños 6.000 pesetas. Se quiere saber cuántos autobuses de cada clase se tienen que alquilar para que el coste del viaje sea mínimo. Para ello se pide:

(a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos).*

(b) Representar la región factible. *(2'5 puntos).*

(c) *Resolver* el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos). (SJ-94)*

- **Ejercicio 6**

Un camión puede transportar como máximo 9 toneladas de mercancía por viaje. En un cierto viaje desea transportar al menos 4 toneladas de la mercancía A., y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporta de A. Sabiendo que se cobra 3.000 pesetas por tonelada de A transportada y 2.000 pesetas por tonelada de B, se quiere saber cuántas toneladas de A y B se deben cargar en el camión para obtener la ganancia máxima. Para ello se pide:

(a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos).*

(b) Representar la región factible. *(2'5 puntos).*

(c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos).* ***(SS-94).***

- **Ejercicio 7**

Dos factorías de automóviles, F_1 y F_2, producen respectivamente, 3000 y 4000 coches. Estos automóviles deben distribuirse a tres centros de ventas, C1, C2 y C3, en cantidades de 3000, 2500 y 1500 respectivamente. Los costes de transporte por vehículo desde las fábricas a los puntos de venta vienen dados en la siguiente tabla:

(en pesetas)	C_1	C_2	C_3
desde F_1	2.000	2.500	2.000
desde F_2	1.500	3.000	1.000

Determina cuántos coches hay que llevar desde cada fábrica a cada centro de ventas para que el transporte resulte más económico.

- **Ejercicio 8**

Una empresa fabrica agua de colonia de dos tipos ***A*** y ***B***. La colonia ***A*** lleva un 10 % de extracto de rosas, un 20 % de alcohol y el resto de agua. La ***B*** lleva un 30 % de extracto de rosas, un 10 % de alcohol y el resto de agua. Se dispone de 1.000 litros de extracto de rosas y 1.600 litros de alcohol. La empresa vende a 150 ptas./l el producto ***B*** y a 75 ptas./l el producto ***A***. *¿Cuántos litros de cada producto ha de fabricar para que el importe de la venta sea máximo?*

- **Ejercicio 9**

En una carpintería, que consta de tres secciones, se construyen mesas y conjuntos de 4 sillas. En la primera sección se cortan las piezas que conforman los muebles, invirtiéndose una hora en el conjunto de las 4 sillas y tres horas en la mesa . En la segunda sección se realiza el ensamblaje de las piezas, empleándose 1 h. 20 m.

tanto para las sillas como para la mesa. Por último, en la tercera sección se pulen y lacan los muebles, tardándose 2 h. 30 m. en finalizar las 4 sillas y sólo 8/7 de hora en la mesa.

Debido a las características de la empresa, sólo se puede trabajar un máximo de 61 horas semanales en las secciones 2ª y 3ª y 60 horas en la 1ª.
Sabiendo que las ganancias por el conjunto de las 4 sillas y la mesa son respectivamente, 8000 y 6000 ptas. , ¿cuál debe ser la producción para que los beneficios sean máximos?

- **Ejercicio 10**

Dos abonos están compuestos por los tres mismos ingredientes P, Q y R, aunque en distinta proporción . Así, el primer abono, cuyo precio es 12 ptas/paquete, consta de 2 unidades de P , 2 de Q y 1 de R; el segundo consta de 1 unidad de P, 2 de Q y 2 de R, siendo su precio de 15 ptas/paquete. Si el mínimo exigido en la plantación es de 8 , 10 y 6 unidades de P , Q y R , respectivamente, ¿ cuál es la combinación de los dos abonos que ofrece un costo mínimo?

- **Ejercicio 11**

Un fabricante de muebles tiene 6 unidades de madera y 28 horas disponibles durante las cuales fabricará biombos decorativos. Con anterioridad, se han vendido bien dos modelos, de manera que se limitará a producir estos dos. Estima que del modelo I requiere 2 unidades de madera y 7 horas del tiempo disponible, mientras que el modelo II requiere 1 unidad de madera y 8 horas. Los precios de los modelos son 120 y 80 dólares respectivamente. ¿Cuántos biombos de cada modelo debe fabricar si desea maximizar su ingreso en la venta?

- **Ejercicio 12**

Un taller se dedica a producir mesas y sillas. Para dicha elaboración dispone de dos materias primas roble y pino. Semanalmente dispone de 150 unidades de roble y 100 de pino y pueden trabajar a lo sumo 80 horas. Se sabe que cada mesa necesita 5 unidades de roble, 2 de pino y 4 h. de trabajo y cada silla 2 unidades de roble, 3 de pino y 2 h. de trabajo. La venta de cada mesa proporciona un beneficio neto de 12 unidades monetarias y cada silla 8 unidades monetarias. Halla el número de mesas y sillas que se deben hacer semanalmente para que los beneficios sean máximos.

- **Ejercicio 13**

Resuelve:

Maximizar Z = 40 x + 36y

$$s.a.:\begin{cases} x \le 18 \\ y \le 10 \\ 5x+3y \ge 45 \\ x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Maximizar Z = 3 x + 2 y

$$s.a.:\begin{cases} 6x+4y \le 24 \\ 10x+3y \le 30 \\ x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Maximizar Z = $x + y$

$$s.a.:\begin{cases} x-y \ge 1 \\ x+y \ge 1 \\ x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Maximizar Z = x - y

$$s.a.:\begin{cases} x+y \ge 1 \\ 2x-2y \le 1 \\ 2x-3y \ge -3 \\ x \le \frac{3}{2} \\ x \ge 0 \quad , y \ge 0 \end{cases}$$

Ejercicio 14

Una empresa dedicada a la fabricación de automóviles fabrica dos modelos. Uno utilitario de 950 cm 3 de cilindrada y otro de 1600 cm3 de cilindrada. Para ello dispone de los siguientes medios de producción diaria:

Capacidad de las máquinas	120 coches diarios
Trabajo del personal	15000 horas diarias
Acero	16000 kg
Fundición	60000 kg

Se sabe que el modelo 950 absorbe 300 kg de fundición, 100 kg de acero y 100 horas de trabajo. El modelo 1600, absorbe 500 kg de fundición, 200 de acero y 150 horas.
Cada coche del modelo 950 deja un beneficio de 7500 ptas y el modelo 1600 deja 10000 ptas de beneficio. Halla el número de coches de cada tipo que deben fabricarse diariamente para que el beneficio sea máximo.

Ejercicio 15

Los alumnos de un conservatorio de música deciden formar una orquesta. Los gustos del público exigen que haya siempre mayor o igual número de instrumentos de cuerda que de viento, y que el número de instrumentos de cuerda no debe superar el doble del número de instrumentos de viento. En total hay disponibles 20 instrumentos de viento y 30 de cuerda. Los empresarios pagan a la orquesta 25000 ptas por cada instrumento de viento y 20000 por cada uno de cuerda. Se pide:

(a) ¿De cuántos instrumentos de cuerda y cuántos de viento se debe componer la orquesta para obtener el máximo beneficio? . (*6 puntos*)

(b) Si se suprime la restricción del número total disponible de instrumentos de viento ¿varía la respuesta en el apartado ***(a)*** ?. Razonar la respuesta . En caso de que varíe, calcular la nueva solución. (*2 puntos*)

(c) Si se suprime tanto la restricción del número total disponible de instrumentos de viento como de cuerda, ¿qué ocurre con el beneficio?. Razonar la respuesta. (*2 puntos*) **(Selectividad Junio 95)**

Ejercicio 16

(a) En un problema de programación lineal, qué diferencia hay entre solución factible y solución óptima. (*1 punto*)
(b) Sea S la región del plano definida por las 5 inecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x - y \geq -2 \\ x + 2y \leq 6 \\ x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

(1) Representar gráficamente la región S y calcular sus vértices. (*4 puntos*)

(2) Considerar la función $f(x,y) = x + y$. Calcular los valores de (x , y) que hacen mínima y los que hacen máxima la, función $f(x,y)$ en la región S. Razona la respuesta. (*2 puntos*)

(3) Considerar la función $g(x,y) = -2x - 4y$. Calcular los valores de (x , y) que hacen mínima y los que hacen máxima la función $g(x,y)$ en la región S. Razona la respuesta. (*3 puntos*) **(Selectividad Junio 95)**

Ejercicio 17

Una compañía aérea tiene 2 aviones A y B para cubrir un determinado trayecto . El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede pasar de 120 vuelos y el avión B no puede hacer más de 180. Entre los dos aviones han de realizar al menos 60 vuelos y como mucho 200. Se pide:

(a) Si en cada vuelo del avión A la empresa gana 300.000 ptas y en cada vuelo del avión B, 200.000, ¿cuántos vuelos debe realizar cada avión para maximizar los beneficios de la empresa? (Explicar los pasos seguidos para resolver el problema). (*6 puntos*)

(b) ¿Se puede quitar alguna restricción sin que la solución varíe?. Razonar la respuesta. (*1 punto*)

(c) Si en cada vuelo el avión A consume el doble de litros de gasolina que el avión B, ¿cuántos vuelos ha de hacer cada avión para que el consumo de gasolina sea mínimo? (*3 puntos*) **(Selectividad Septiembre 95)**

- ## Ejercicio 18

Un fabricante de alfombras dispone de las siguientes existencias de lana: 500 kg de color azul, 400 kg de color verde y 225 kg de color rojo. Desea fabricar dos tipos de alfombras A y B. Para fabricar una de tipo A se necesitan 1 kg de lana azul y 2 kg de lana verde y para fabricar una de tipo B 2 kg de lana azul, 1 kg de lana verde y 1 kg de lana roja. Cada alfombra de tipo A se vende por 2000 ptas y cada una de tipo B por 3000 ptas. Se supone que se vende todo lo que se fabrica. Se pide:

(a) ¿Cuántas alfombras de cada tipo se han de fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. (*8 puntos*)

(b) ¿Qué cantidad de lana de cada color quedará cuando se fabrique el número de alfombras que proporciona el máximo beneficio?. (*2 puntos*) (**Selectividad junio 96**)

- ## Ejercicio 19

En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con 2 alimentos A y B. Estos alimentos contienen 3 principios nutritivos: N1 *,* N2 y N3 . Una unidad de A vale 100 ptas y contiene 2 , 1 y 1 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Una unidad de B vale 240 ptas y contiene 1, 3 y 2 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente . Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N1, N2 y N3 respectivamente. Se pide :

(a) Plantear un problema de programación lineal que permita determinar las cantidades de alimentos A y B que den lugar a la dieta de coste mínimo . (*5 puntos*) ***(b)*** Resolver el problema planteado en el apartado anterior. (*5 puntos*) (**Selectividad Septiembre 96**)

- ## Ejercicio 20

La compañía *"Amoralcán"* produce 2 tipos de alimentos para perros, marcas A y B. Cada lata de la marca A contiene 200 g de carne y 100 g de harina. La marca B contiene 140 g de carne y 160 g de harina por lata . Las instalaciones pueden manipular un máximo de 78 kg de carne y 48 kg de harina por hora. Si el beneficio obtenido de la marca A es de 300 ptas por lata y el de la marca B es de 240 ptas por lata, ¿cuántas latas de cada marca deben producirse por hora para minimizar el beneficio?

- ## Ejercicio 21

Los alumnos de 2º de bachillerato, con el objetivo de recaudar fondos para la excursión de fin de curso, deciden vender paquetes de dulces facilitados por una empresa local. Disponen de 10 kg de polvorones y 8 kg de mantecados. Acuerdan hacer paquetes de 2 tipos: unos, a un precio de 300 ptas, formado por 100 g de polvorones y 150 g de mantecados, y los otros, a un precio de 400 ptas, con 200 g de polvorones y 100 g de mantecados. ¿Cuántos paquetes de cada tipo les convendrá vender?

Ejercicio 22

(***Selectividad: Junio 98***) Considerar el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} y-x\geq -2 \\ -x-y\leq 2 \\ 3x+y\leq 3 \end{cases}$. Se pide:

(a) Representar gráficamente el conjunto S solución de dicho sistema de inecuaciones. (*3 puntos*)

(b) Determinar si $f(x,y)=3x-2y$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. (*3'5 puntos*)

(c) Determinar si $g(x,y)=-6x+4y$ alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. (*3'5 puntos*)

Ejercicio 23

(***Selectividad: Septiembre 98***) Una empresa que fabrica motos y coches en dos factorías, F_1 y F_2, ha recibido un pedido de 300 coches y 500 motos. En la factoría F_1 se producen 10 coches y 25 motos por hora y en la F_2 se producen 20 coches por hora y el mismo número de motos por hora que en la otra. Sabiendo que los costes operativos de las factorías F_1 y F_2 son 9.000 y 7.000 unidades monetarias por hora respectivamente, se pide:

(a) ¿Cuántas horas debe trabajar cada factoría para servir el pedido con los mínimos costes?, ¿cuál es el valor de estos mínimos costes?. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta. (***8 puntos***).

(b) Supón que la empresa decide que el número de horas trabajadas entre las dos factorías para servir un pedido no puede ser superior a 50. ¿Cambiaría la solución del problema? Razona la respuesta. (***2 puntos***).

Ejercicio 24

Maximiza la función $f(x,y)=4x+3y$ sujeta a las restricciones: $\{x\geq 0, y\geq 0 \geq, x+y\leq 10, 2y\geq 3x\}$.
Solución: Máximo en x = 4, y = 6

Ejercicio 25

Maximiza la función $f(x,y)=x+y$ sujeta a las restricciones: $\begin{cases} y\geq 0 \\ 2x+y\leq 2 \\ 4x+y\geq 0 \end{cases}$.

Solución: Máximo en x = -1, y = 4

Ejercicio 26

Considera la función $f(x,y)=x+3y$.
(a) Razona si f(x,y) alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto S. En caso afirmativo, calcula dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. $S=\{(x,y)\perp 2x+y\leq 4,\ x+3y\leq 7,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$.
(b) Razona si f(x,y) alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto T. En caso afirmativo, calcula dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. $T=\{(x,y)\perp 2x+y\geq 4,\ x+3y\geq 7,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$.
Solución: (a) f(x,y) alcanza el valor máximo de 7 en todos los puntos del segmento A(0, 7/4) B(1,2); el valor mínimo de 0 se alcanza en el punto D(0,0). **(b)** f no alcanza el máximo pues se puede hacer todo lo grande que queramos y el mínimo 7 se consigue en todos los puntos del segmento B(1,2) C(7,0).

Ejercicio 27

Una fábrica produce muebles clásicos y funcionales. Para su fabricación, requiere tiempo de proceso de construcción y pintura. El clásico precisa una unidad de tiempo de construcción y tres de pintura, y el funcional, dos de construcción y una de pintura. La situación actual de la empresa no permite utilizar más de 10 unidades de tiempo y quince de pintura. (a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones. (b) ¿Qué combinaciones de muebles se pueden fabricar? (c) Si el beneficio empresarial es función del número de unidades fabricadas de acuerdo con la relación 3C+2F, ¿cuántas unidades de cada líneas deben fabricarse para maximizar el beneficio?

Ejercicio 28

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 € y 30 € por unidad, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose la siguientes restricciones:

- El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario.
- Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
- El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, el utilizado en cada silla 2 € y cada operario dispone de 12 € diarios para material.

(a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema. (b) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (c) Razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si eso le conviene a la empresa. (d) Resuelve el problema.

Ejercicio 29

Una empresa piensa invertir hasta 36 millones de euros en una urbanización para construir viviendas de cuatro dormitorios (tipo A), cuyo costo unitario es de 400.000€, y viviendas de dos dormitorios (tipo B) que cuestan cada una 300.000€.
La normativa vigente limita el número total de viviendas a 100 de las que, como máximo, 80 pueden ser de dos dormitorios.
Si la empresa obtiene un beneficio de 40.000€ por la venta de cada vivienda tipo A y de 30.000€ por la venta de cada vivienda tipo B, determina cuántas viviendas de cada tipo debe construir para maximizar beneficios.

Ejercicio 30

Una tienda de moda está preparando su pedido de trajes para la próxima temporada. Para que cierto proveedor le haga unos precios especiales, el pedido debe incluir al menos 10 trajes de fabricación nacional y no sobrepasar los 20 trajes de ese tipo. Además, el número de trajes de fabricación nacional debería ser al menos una tercera parte del número de trajes de importación. Por otro lado, el beneficio que la tienda obtendría por la venta de cada traje de fabricación nacional sería de 120 € y de 200 € por la venta de cada uno de importación, y la tienda quiere que el beneficio total que se pueda alcanzar vendiendo todo el pedido sea como mínimo de 3.600 €.
(a) Se pretende calcular las unidades de CAD producto que se pueden pedir al proveedor cumpliendo todos los requerimientos anteriores. Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían pedir 12 trajes de fabricación nacional y 45 de importación?
(b) Calcula las unidades de cada producto que se han de pedir para minimizar el número total de trajes pedidos. Con ese pedido, ¿qué beneficio se obtendría?

Ejercicio 31

Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas. Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes. El lote del primer proveedor está formado por cuatro unidades de B y una de A. El lote del segundo proveedor está formado por una unidad de B y cuatro de A.
El primer proveedor vende cada lote a 10 €, y el segundo a 20 € el suyo. ¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el coste mínimo?

Ejercicio 32

Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G1 y G2. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo G1 es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo G2 es capaz de asfaltar 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C.
El coste semanal se estima en 3.300 € para G1 y en 3.500 para G2. Se necesitaría asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la B y 10 en la zona C.
¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Ejercicio 33

Una empresa dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para fabricar carpetas tamaño folio y tamaño cuartilla. Para la primera se necesitan 0’20 m^2 de cartón y 30 cm de cinta de goma y se vende a 1’40 € la unidad. Para la segunda se necesitan 0’15 m^2 de cartón y 27 cm de cinta de goma y se vende a 1’10 € la unidad.
(a) Representa la región factible.
(b) ¿Cuántas carpetas de cada tipo interesa fabricar para que el beneficio sea máximo? Calcula ese beneficio máximo.

Soluciones a los ejercicios de Programación lineal

1.

	número	nº de horas	Coste	Beneficio
Tipo A	x	8x	4x	(7/4)x
Tipo B	y	5y	5y	(3/2)y
Total		320	200	

Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el beneficio sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} x \geq 15 \\ y \geq 10 \\ 8x+5y \leq 320 \\ 4x+5y \leq 200 \\ x, y \in Naturales \end{array}\right\}$ Función objetivo: $B(x,y)=\frac{7}{4}x+\frac{3}{2}y$.

Solución óptima: x=30 sillas tipo A , y=16 sillas tipo B.

2.

	número de latas	nº de g. carne	nº de g. harina	Beneficio
Marca A	x	200x	100x	300x
Marca B	y	140y	160y	240y
Total		78.000	48.000	

Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el beneficio sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} 200x+140y \leq 78000 \\ 100x+160y \leq 48000 \\ x, y \in Naturales \end{array}\right\}$ Función objetivo: $B(x,y)=300x+240y$.

Solución óptima: x=320 latas marca A , y=100 latas marca B.

3.

	1	2	3	Total
A	x	y	35-x-y	35
B	30-x	40-y	-15+x+y	55
Total	30	40	20	90

Buscamos los pares de números (x,y) que minimicen el coste sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 35-x-y \geq 0 \\ 30-x \geq 0 \\ 40-y \geq 0 \\ -15+x+y \geq 0 \end{array}\right\}$ Función objetivo: $C(x,y)=-x+2y+195$.

Solución óptima: x=0 , y=35.

4.

	nº de vigilantes	Salario
Diurnos	x	x
Nocturnos	y	1’6y

Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el salario sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} x \geq 6 \\ x \leq 15 \\ y \geq 4 \\ y \leq 7 \\ x \geq y \\ x, y \in Naturales \end{array}\right\}$ Función objetivo: $S(x, y) = x + 1'6y$.

Solución óptima: x=6 diurnos , y=4 nocturnos.

5.

	número	nº de plazas	Coste	nº de conductores
A(40 plazas)	x	40x	6000x	x
B(50 plazas	y	50y	8000y	y

Buscamos los pares de números (x,y) que minimicen el coste sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ 40x + 50y \geq 400 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \in Naturales \end{array}\right\}$ Función objetivo: $C(x, y) = 6000x + 8000y$.

Solución óptima: x=5 autobuses tipo A , y=4 autobuses tipo B.

6. <u>Análisis de los datos</u>

Mercancías	**Número de Tm por viaje**	**Beneficio (en cientos de miles de PTA.)**
A	x	3x
B	y	2y

➢ **<u>Condiciones</u>**

1. nº de Tm de mercancías A y B deben ser números positivos
2. nº total de Tm de ambas mercancías ***no debe sobrepasar*** 9 Tm
3. nº de Tm de mercancía A debe ser ***mayor o igual*** a 4
4. nº de Tm de B ***mayor o igual*** a la mitad de Tm de A

➢ **<u>Planteamiento</u>**

Debemos determinar los pares (x,y) tales que verifiquen el conjunto de ***restricciones*** siguiente:

$\left\{\begin{array}{c} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 4 \\ y \geq \frac{x}{2} \end{array}\right.$ y que ***maximicen*** las ganancias $G(x, y) = 3x + 2y$ miles de pesetas.

➢ **<u>Resolución:</u>**

x	0	4	6	9
$y = 9 - x$	9	5	3	0
$y = \frac{x}{2}$	0	2	3	$\frac{9}{2}$

Solución óptima: x=6 Tm., y=3 Tm.

7. Construyamos otro cuadro para reorganizar los datos, suponiendo que de la factoría ***F1*** se distribuyen ***x*** coches a ***C1*** e ***y*** a ***C2.***

	a ***C1*** (3000)	a ***C2*** (2500)	a ***C3*** (1500)
desde ***F1*** (3000)	*x*	*y*	3000-(*x*+*y*)
desde ***F2*** (4000)	3000-*x*	2500-*y*	*x*+*y*-1500

A ***C3*** llegarán 3.000-(*x*+*y*) coches desde ***F1***; los sobrantes después de enviar *x* a ***C1*** e *y* a ***C2*** desde ***F1***, donde se fabrican 3.000.
Si en ***C1*** se necesitan 3.000 coches y desde ***F1*** se han enviado *x*, desde ***F2*** habrá que enviar los que faltan, 3.000-*x*.
Análogo razonamiento se hace para C2 y C3.
La cantidad de dinero que se necesita para transportar estos vehículos es D = 2000x + 2500y + 2000(3000-x-y) + 1500(3000-x) + 3000(2500-y) + 1000(x+y-1500) = =16500000 - 500x - 1500y.
El objetivo es que esta cantidad sea **mínima.** Las **restricciones** son que todas las cantidades de coches transportadas deben ser no negativas. Con esto, el problema puede plantearse como sigue:

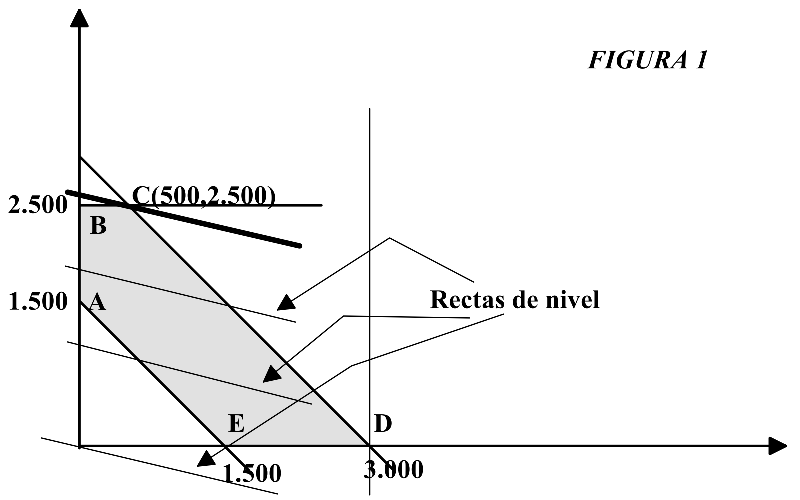
Minimizar D = 16.500.000 - 500 x - 1.500 y

$$\text{sujeto a:}\quad \left.\begin{array}{c} x \geq 0;\quad y \geq 0 \\ 3.000 - x - y \geq 0 \\ 3.000 - x \geq 0 \\ 2.500 - y \geq 0 \\ x + y - 1.500 \geq 0 \end{array}\right\}$$

La representación gráfica de estas restricciones viene dada en la ***figura 1***. Las rectas de nivel asociadas a la función objetivo toman su valor mínimo en el punto ***C***. Los vértices del polígono de soluciones factibles son: A(0, 1.500); B(0, 2.500); C(500, 2.500); D(3.000, 0); E(1.500, 0).
El mínimo lo toma la función objetivo en el punto C(500, 2.500), con un coste de 12'5 millones de pesetas. Por tanto, el número de coches que hay que llevar de las factorías a los centros de venta será:

	a C1	***a C2***	***a C3***
Desde F1	500	2.500	0
Desde F2	2.500	500	1.000

FIGURA 1



8. Sean *x* los litros fabricados de la colonia A e *y* los litros de la colonia B. El 10 % de *x* es 0'1.*x*; el 20 % de *x* es 0'2.*x*; .... Con estas hipótesis se obtiene el siguiente cuadro:

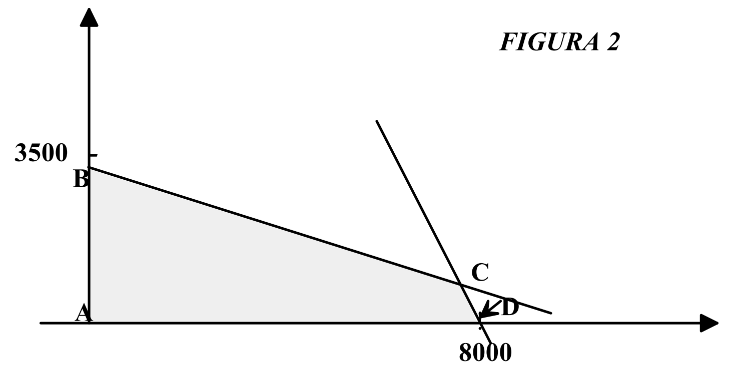
	Litros	Rosas	Alcohol	Agua	Ganancia
Colonia A	*x*	*0'1.x*	*0'2.x*	*0'7.x*	*75.x*
Colonia B	*y*	*0'3.y*	*0´1.y*	*0'6.y*	*150.y*
		1.000	1.600	Ilimitada	

El objetivo es que el importe de la venta sea máximo, esto es:

Maximizar: *G = 75.x + 150.y*

sujeto a: $$\left.\begin{array}{r} 0'1\cdot x+0'3\cdot y\leq 1000 \\ 0'2\cdot x+0'1\cdot y\leq 1600 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es la representada en la ***Figura 2.*** La recta de nivel de valor máximo es la que pasa por el punto ***C(7.600, 800)***. Los vértices del conjunto de soluciones factibles son A(0,0); B(0, 3333'3); C(7600, 800) y D(8000, 0). La función objetivo toma, respectivamente, los valores 0, 500.000, 690.000 y 600.000. Por tanto, el importe de la venta será máximo cuando se fabriquen 7.600 litros de la colonia A y 800 litros de la colonia B.



Solución óptima: x=7600 litros de A, y=800 litros de B.

9.

	nº elementos	Tiempo(min) corte	Tiempo(min) ensamblaje	Tiempo(min) pulido	Beneficio
conjuntos de 4 sillas	x	60x	80x	150x	8000x
mesas	y	180y	80y	(480/7)y	6000y
Total		3.600	3.660	3.660	

Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el beneficio sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} 60x+180y\leq 3600 \\ 80x+80y\leq 3660 \\ 150x+\frac{480}{7}y\leq 3660 \\ x,y\in N \end{array}\right\}$ Función objetivo: $B(x,y)=8000x+6000y$.

Solución óptima: x=18 conjuntos de 4 sillas, y=24 mesas.

10.

	nº paquetes	P	Q	R	Coste
Abono A	x	2x	2x	x	12x

Abono B	y	y	2y	2y	15y

Buscamos los pares de números (x,y) que minimicen el coste sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} 2x+y\geq 8 \\ 2x+2y\geq 10 \\ x+2y\geq 6 \\ x,y\in N \end{array}\right\}$ Función objetivo: $C(x,y)=12x+15y$.

Solución óptima: x=4 paquetes de A, y=1 paquete de B.

15(a).

	nº instrumentos	Beneficio
Cuerda	x	20000x
Viento	y	25000y

Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el beneficio sujetos a las restricciones.

Restricciones: $y\left\{\begin{array}{c} x\geq y \\ x\leq 2y \\ y\leq 20 \\ x\leq 30 \\ x,y\in N \end{array}\right\}$ Función objetivo: $B(x,y)=20000x+25000y$.

Solución óptima: x=30 , y=20.

15(b).

Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el beneficio sujetos a las restricciones.

Restricciones: $y\left\{\begin{array}{c} x\geq y \\ x\leq 2y \\ x\leq 30 \\ x,y\in N \end{array}\right\}$ Función objetivo: $B(x,y)=20000x+25000y$.

Solución óptima: x=30 , y=30.

15(c).

Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el beneficio sujetos a las restricciones.

Restricciones: $y\left\{\begin{array}{c} x\geq y \\ x\leq 2y \\ x,y\in N \end{array}\right\}$ Función objetivo: $B(x,y)=20000x+25000y$.

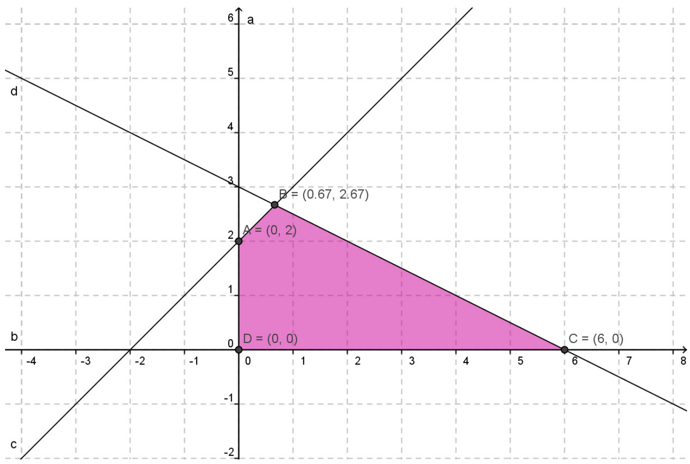
Solución óptima: No hay.

16. (a) Una solución factible en un punto de la región solución del sistema restricciones y una solución óptima es una solución factible que además optimiza la función objetivo.

(b2) f(x,y) alcanza el valor máximo en el punto C(6,0) y el mínimo en el punto D(0,0).

(b3) g(x,y) alcanza el valor máximo en el punto D(0,0) y el mínimo en todos puntos del segmento BC.

(b1) La figura de la página siguiente.



17.

	nº de vuelos	Consumo	Beneficio
A	x	2x	300000x
B	y	y	200000y

(a) Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el beneficio sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} x > y \\ x \leq 120 \\ y \leq 180 \\ x+y \geq 60 \\ x+y \leq 200 \\ x, y \in N \end{array}\right\}$ Función objetivo: $B(x,y) = 300000x + 200000y$.

Solución óptima: x=120 vuelos de A, y=80 vuelos de B.

(b) $y \leq 180$ porque no determina el conjunto de soluciones factibles.

(c) **Solución óptima: x=31 vuelos de A, y=29 vuelos de B para minimizar el consumo.**

18.

➢ **Análisis de los datos**

Tipos de alfombras	Número de alfombras	Nº kg de lana azul	Nª kg de lana verde	Nª kg de lana roja	Beneficio (en miles de PTA)
A	x	x	2x	0	2x
B	y	2y	y	y	3y
Nº kg existencias		500	400	225	

➢ **Condiciones**

1. nº kg de lana azul ***no debe sobrepasar*** los 500 kg de existencias.
2. nº kg de lana verde ***no debe sobrepasar*** los 400 kg de existencias.
3. nº kg de lana roja ***no debe sobrepasar*** los 225 kg de existencias.
4. El número de alfombras ha de ser un número natural.

➢ **Planteamiento**

Debemos determinar los pares (x, y) que verifiquen el conjunto de ***restricciones*** siguientes:

$$\begin{cases} x+2y \le 500 \\ 2x+y \le 400 \\ y \le 225 \\ x, y \in N \end{cases}$$

y que ***maximicen*** la función objetivo beneficio $B(x,y) = 2x + 3y$miles de pesetas.

➢ **Resolución:**

Solución óptima: x=100 alfombras A , y=200 alfombras B. Sobran 25 kg de lana roja.

19.

➢ **Análisis de los datos**

Tipos de alimentos	Nº de unidades de alimento	Nº de unidades de N1	Nº de unidades de N2	Nº de unidades de N3	Coste (en PTA)
A	x	2x	x	x	100x
B	y	y	3y	2y	240y

➢ **Condiciones**

1. ***Al menos*** 4 unidades de N1 para una persona.
2. ***Al menos*** 6 unidades de N2 para una persona.
3. ***Al menos*** 5 unidades de N3 para una persona.
4. El número de unidades de alimento ha de ser un número real positivo.

➢ **Planteamiento**

Debemos determinar los pares (x, y) que verifiquen el conjunto de ***restricciones*** siguientes:

$$\begin{cases} 2x+y \ge 4 \\ x+3y \ge 6 \\ x+2y \ge 5 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

y que ***minimicen*** la función objetivo coste $C(x,y) = 100x + 240y$ pesetas.

➢ **Resolución (Tabla de puntos de cada una de las rectas):**

x	0	1	$\frac{6}{5}$	2	3	5	6
$y = 4-2x$	4	2	$\frac{8}{5}$	0			
$y = \frac{6-x}{3}$	2		$\frac{8}{5}$		1		0
$y = \frac{5-x}{2}$	$\frac{5}{2}$	2			1	0	

Solución óptima: x=3 unidades de A , y=1 unidad de B.

20.

	nº paquetes	Polvones (kg)	Mantecados (kg)	Beneficio
TIPO A	x	0'1x	0'15x	300x
TIPO B	y	0'2y	0'1y	400y

Buscamos los pares de números (x,y) que maximicen el Beneficio sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} 0'1x+0'2y \le 10 \\ 0'15x+0'1y \le 8 \\ x,y \in N \end{array}\right\}$ Función objetivo: $B(x,y)=300x+400y$.

Solución óptima: x=30 paquetes de A, y=35 paquetes de B.

21. (b) 3x-2y NO tiene mínimo y alcanza el máximo en x=5/4, y=-3/4.

(c) -6x+4y No tiene máximo y alcanza el mínimo en x=5/4, y=-3/4.

22.

	nº horas trabajo	nº coches	nº motos	Costes
Factoría 1	x	10x	25x	9000x
Factoría 2	y	20y	25y	7000y

Buscamos los pares de números (x,y) que minimicen el Coste sujetos a las restricciones.

Restricciones: $\left\{\begin{array}{c} 19x+20y \ge 300 \\ 25x+25y \ge 500 \\ x,y \in N \end{array}\right\}$ Función objetivo: $C(x,y)=9000x+7000y$.

(a) Solución óptima: x=0 horas en la factoría 1, y=20 horas en la factoría 2 para obtener un coste mínimo de 140.000 u.m.

(b) No cambia la solución óptima añadiendo la restricción $x+y \le 50$.

Resumen teórico

Función objetivo: Es la función que hay que maximizar o minimizar.

Restricciones: Son cada una de las condiciones que debe cumplir la solución.

Región factible: Es el conjunto de todas las soluciones posibles de un problema de programación lineal. En el caso de dos variables, la región factible es una región del plano.

Solución óptima: Es la solución (o soluciones) factible que optimiza la función objetivo. Se encuentra siempre en un punto extremo de la región factible.

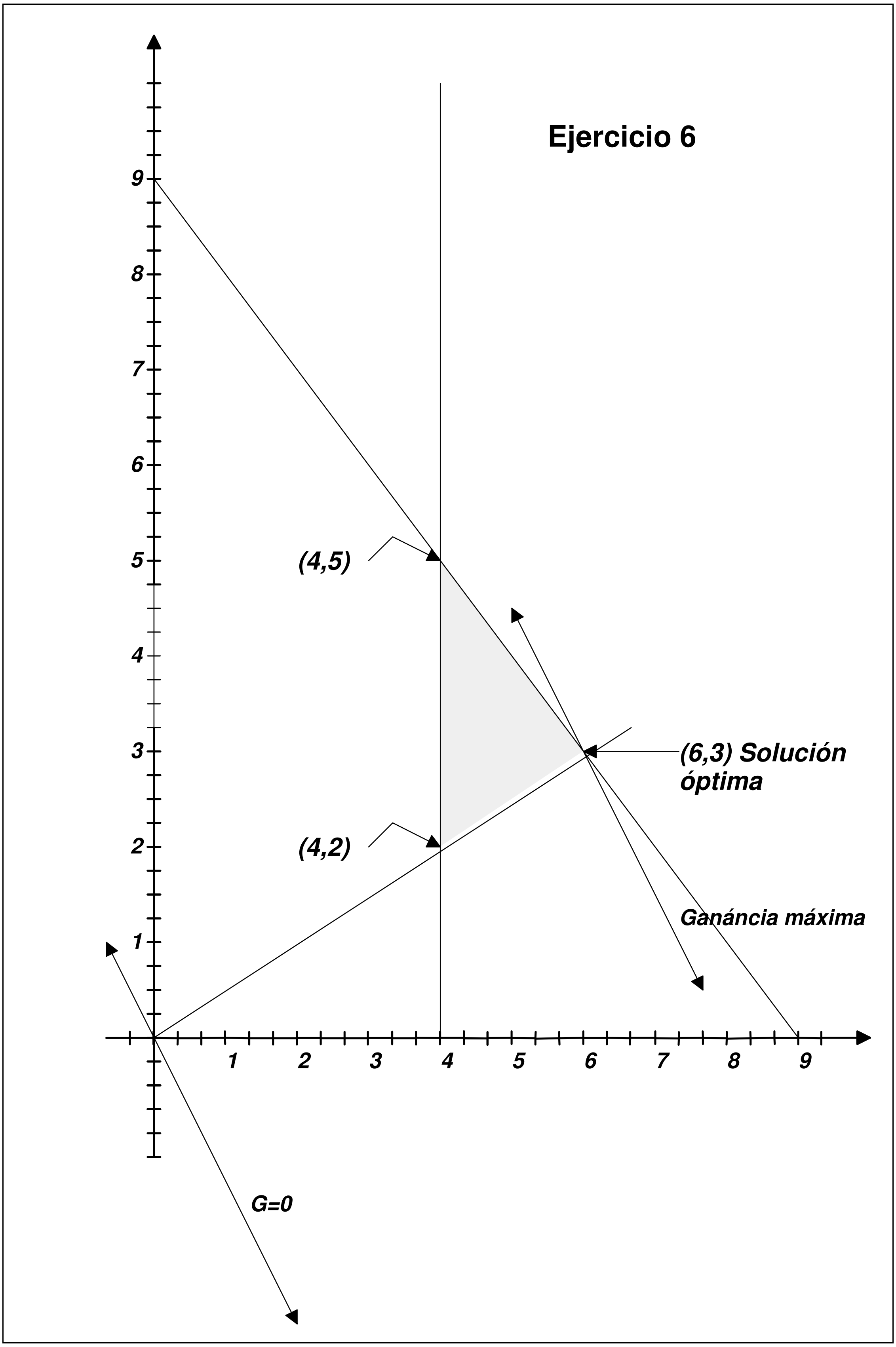
Rectas de nivel asociadas a la función objetivo: Son rectas en las que la función objetivo toma el mismo valor en cualquiera de sus puntos. Las rectas de nivel son paralelas entre sí.

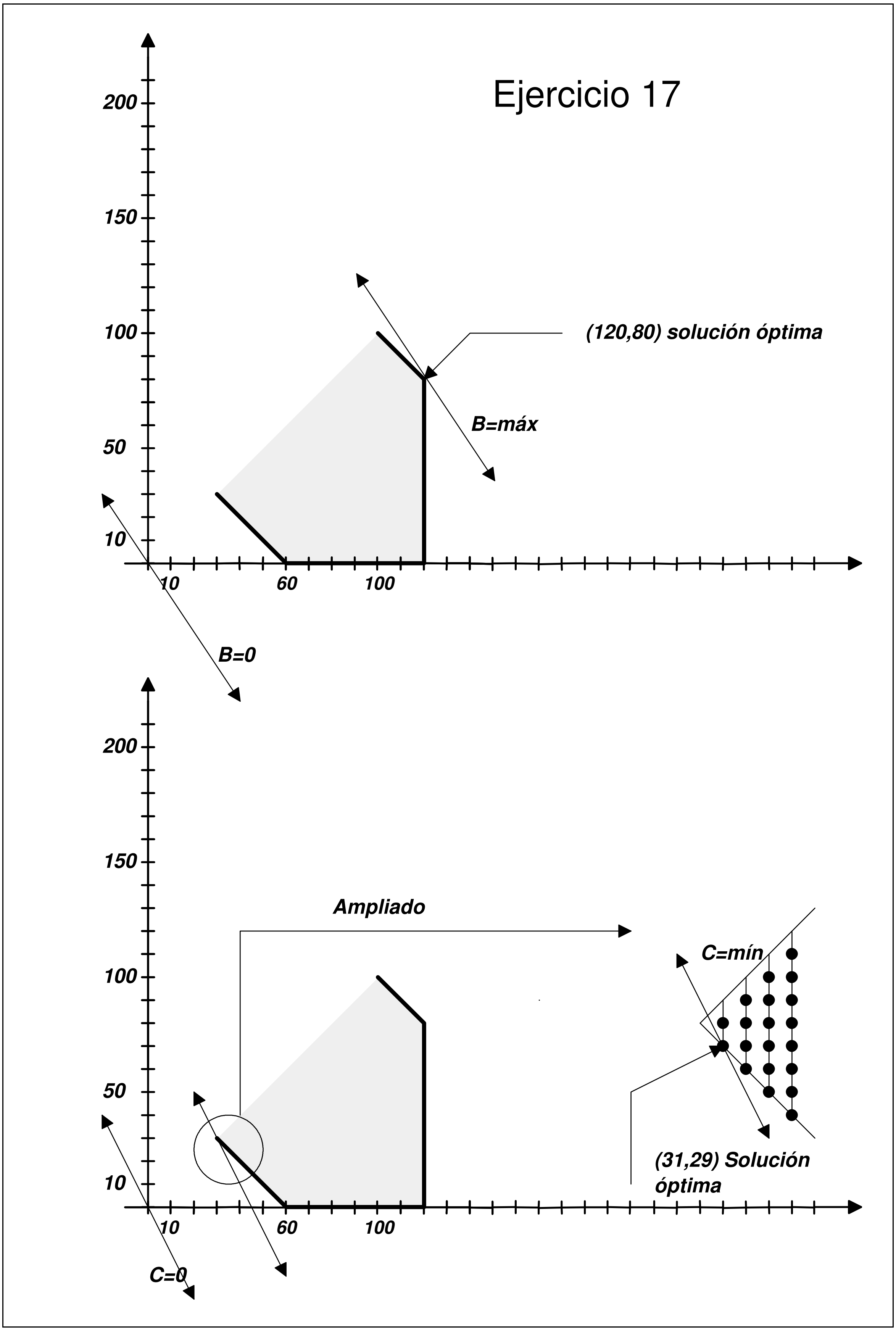
De forma general, los problemas de programación lineal pueden definirse como los del cálculo del máximo o mínimo de una función lineal de una o varias variables, cuando éstas están sujetas a una serie de restricciones de carácter lineal. De acuerdo con esto, el objetivo de la programación lineal no es calcular el mayor o menor valor de una función, sino el mayor o menor valor de esa función que sea compatible con las restricciones que pesan sobre sus variables. De forma esquemática, la formulación general sería:

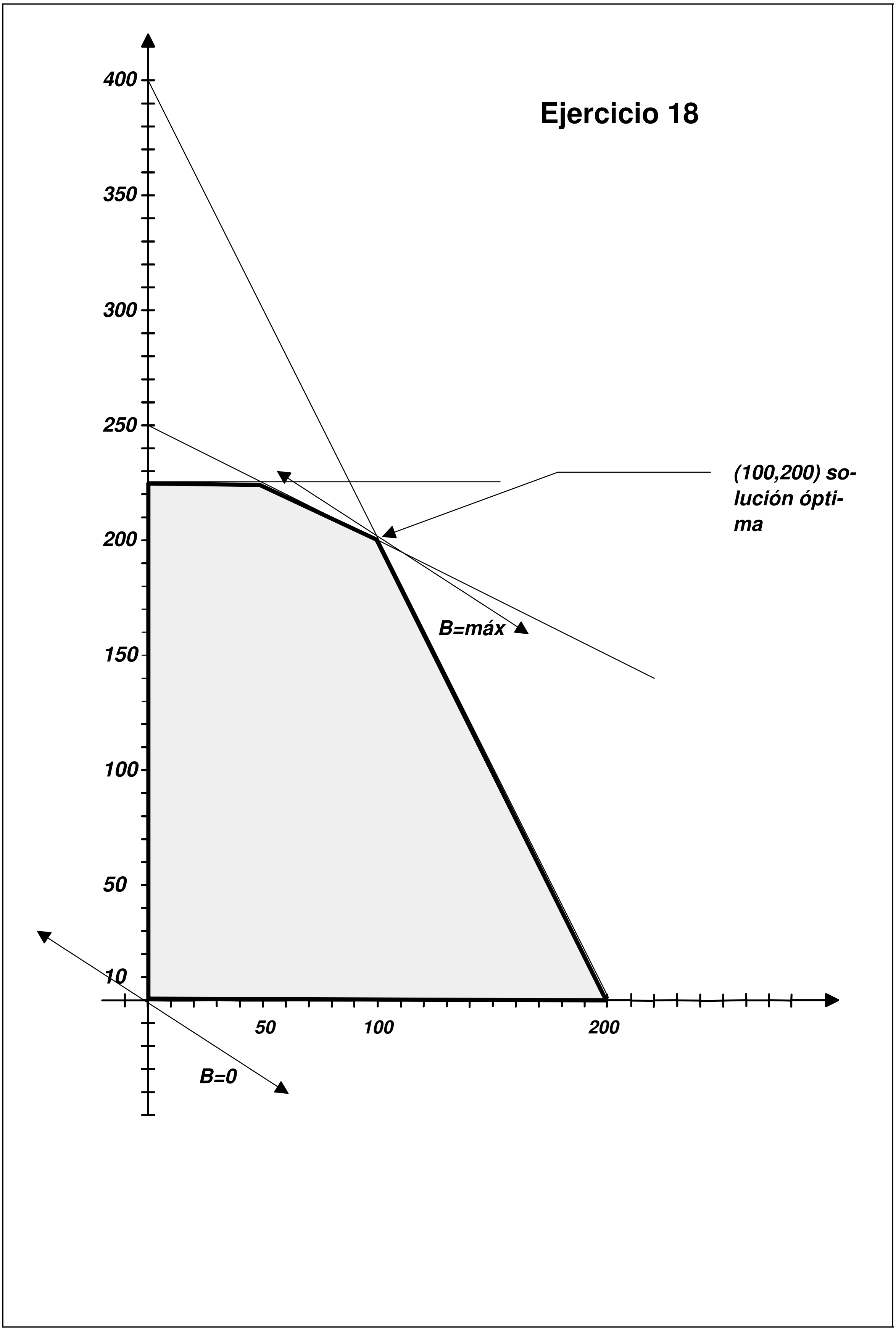
Optimizar: *f(x,y)*

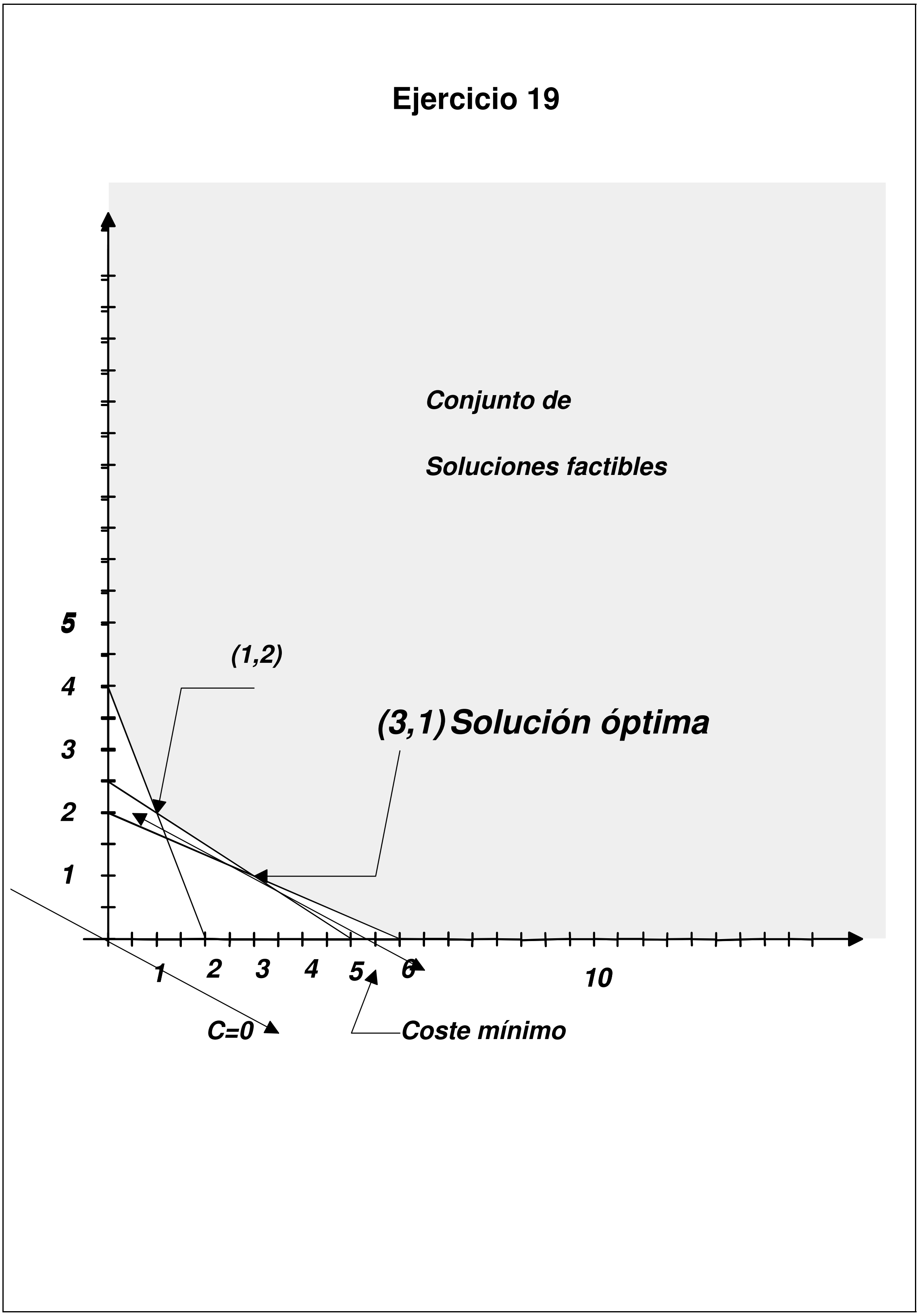
sujeto a: $\left.\begin{array}{c} g_1(x,y) \ge 0 \\ g_2(x,y) \ge 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_n(x,y) \ge 0 \end{array}\right\}$

La solución del problema consiste en encontrar los valores de x e y que optimicen f(x,y) al mismo tiempo que verifican las restricciones dadas por $g_1, g_2, ..., g_n$.


Ejercicio 6
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
(4,5)
(4,2)
(6,3) Solución óptima
Ganáncia máxima
G=0


Ejercicio 17
200
150
100
50
10
10
60
100
(120,80) solución óptima
B=máx
B=0
200
150
100
50
10
10
60
100
Ampliado
C=mín
(31,29) Solución óptima
C=0


Ejercicio 18
400
350
300
250
200
150
100
50
10
50
100
200
(100,200) solución óptima
B=máx
B=0


Ejercicio 19
Conjunto de
Soluciones factibles
5
(1,2)
4
(3,1) Solución óptima
3
2
1
1
2
3
4
5
6
10
C=0
Coste mínimo

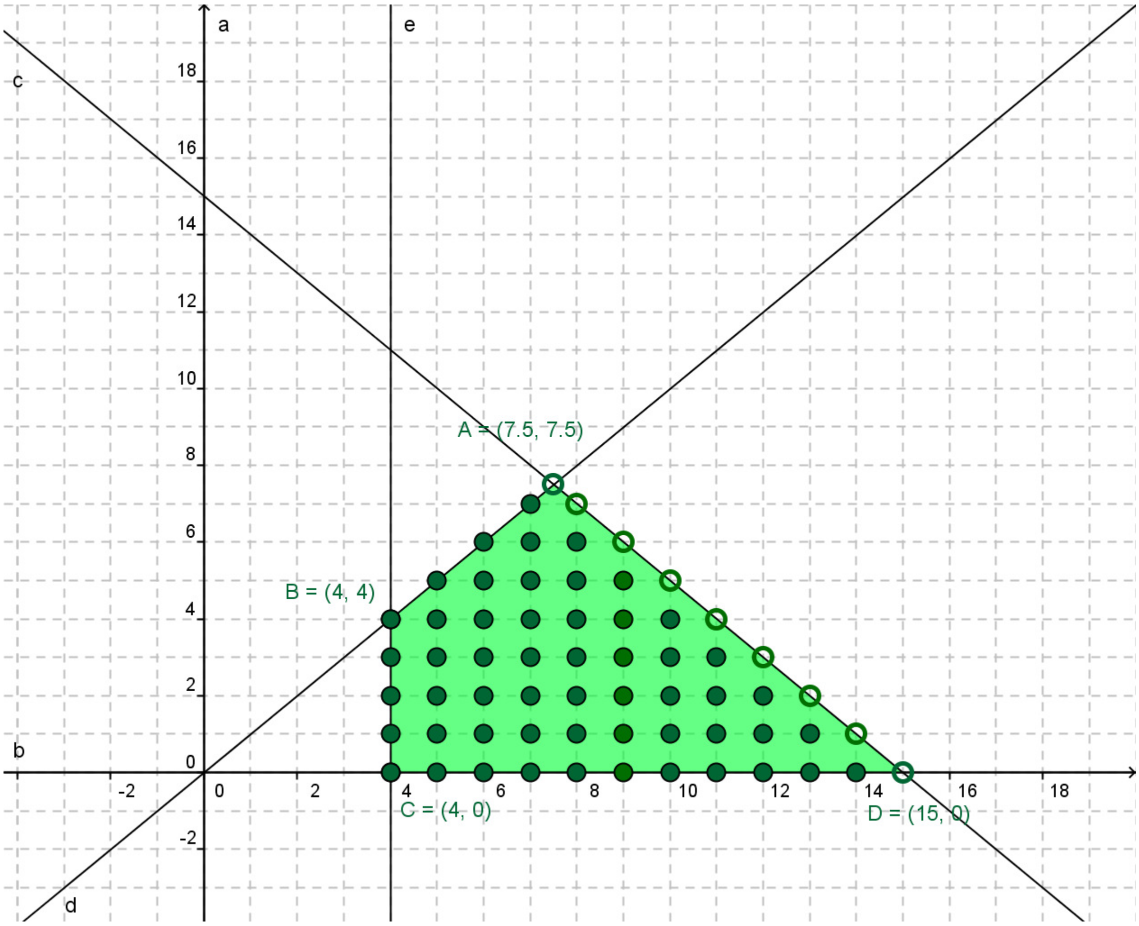
Soluciones a los ejercicios de Programación lineal

(1) Queremos maximizar la función F(x,y) = x + y sujeta a las restricciones: $\left\{ \begin{array}{c} x \geq y \\ x \geq 4 \\ x + y < 15 \\ x, y \in N \end{array} \right\}$

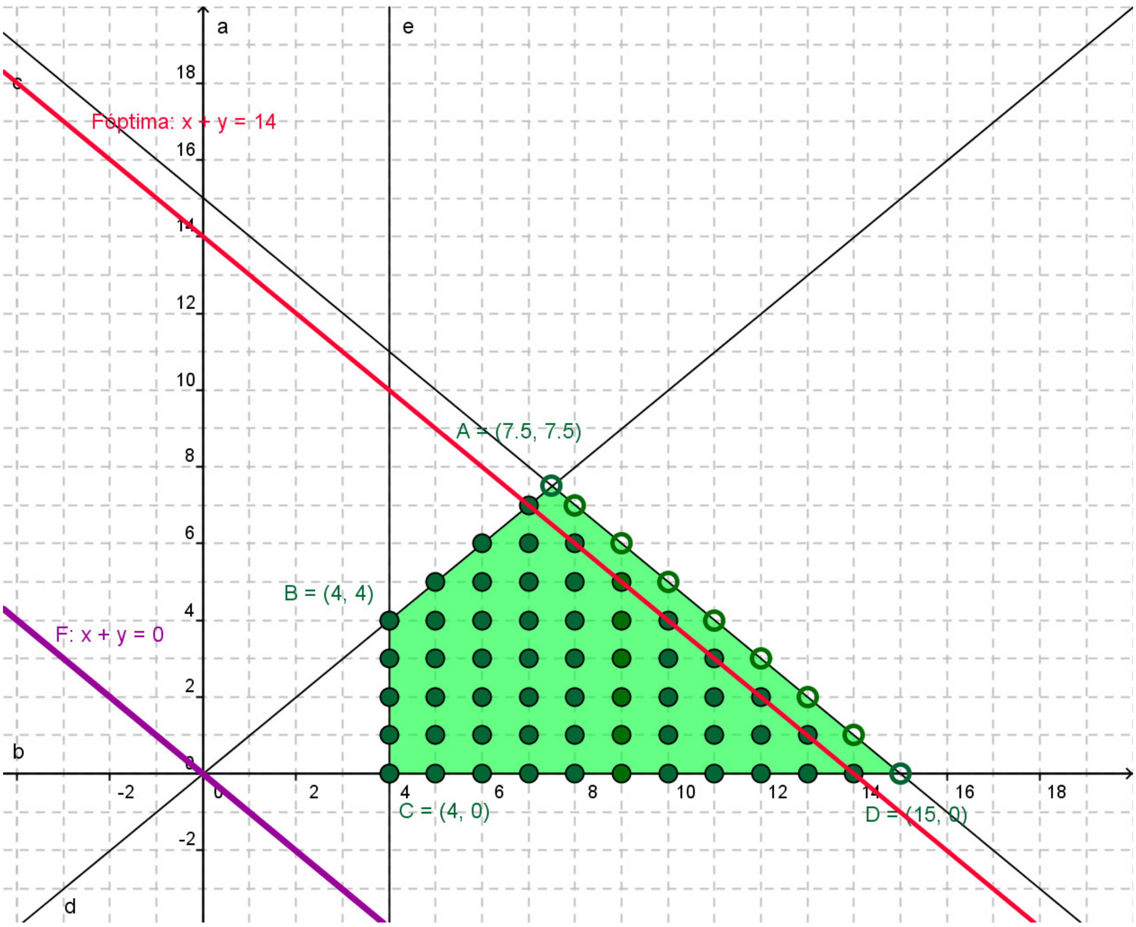
(2) Queremos maximizar la función F(x,y) = x + y sujeta a las restricciones: $\left\{ \begin{array}{c} x \geq y \\ x \geq 4 \\ x, y \in N \end{array} \right\}$

(3) Queremos minimizar la función F(x,y) = x + y sujeta a las restricciones: $\left\{ \begin{array}{c} x \geq y \\ x \geq 4 \\ x, y \in N \end{array} \right\}$

(1) Al resolver el sistema de inecuaciones obtenemos el siguiente conjunto de soluciones factibles:

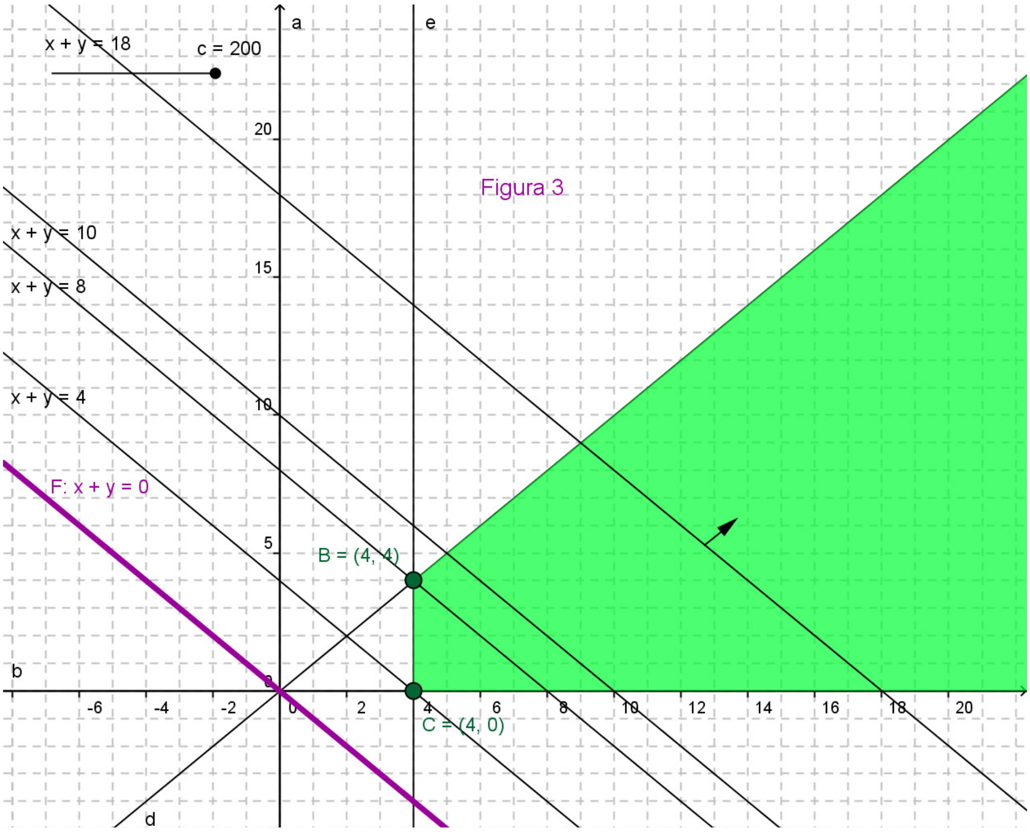


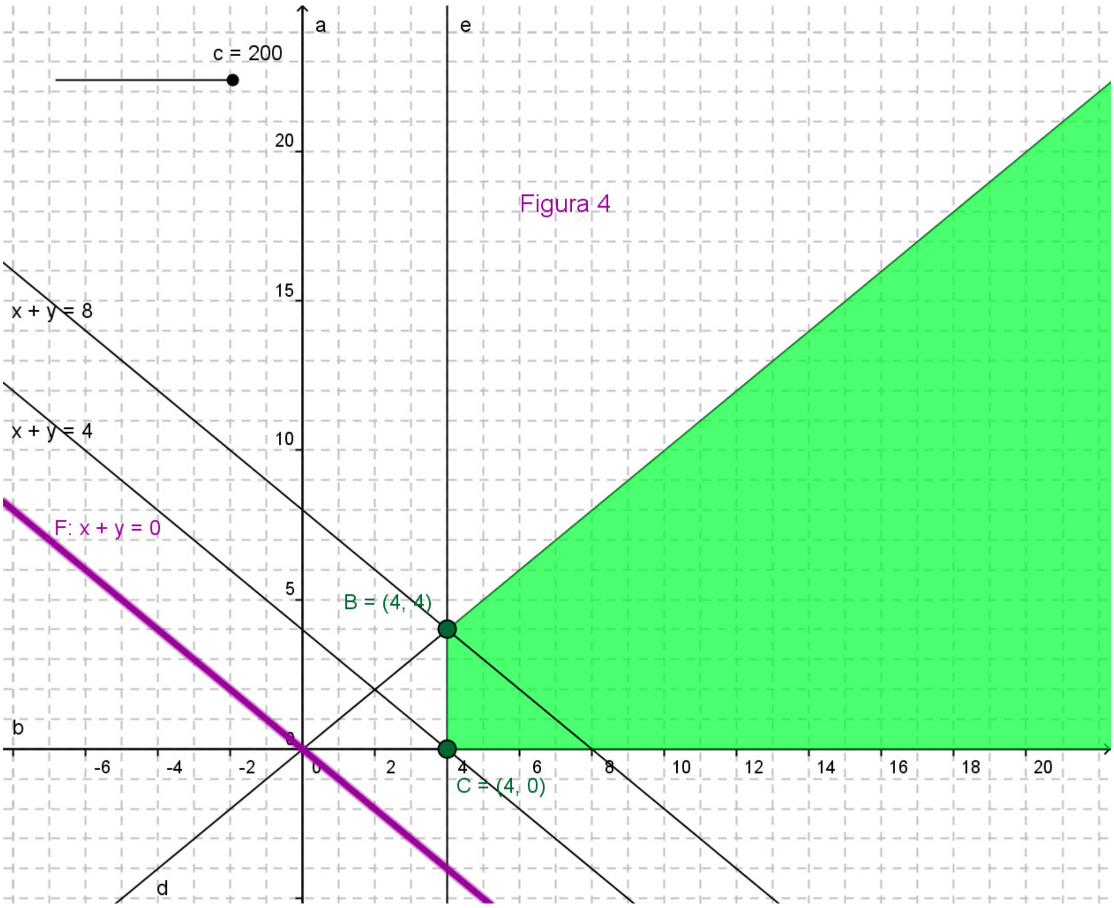
Los puntos (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,6), (9,5), (10,4), (11,3), (12,2), (13,1), (14,0) y (4,0) constituyen los vértices del recinto.
Representamos la recta x+y=0. Trazamos rectas paralelas a ella hasta que encontremos la paralela que corta al conjunto de soluciones factibles y que tiene un término independiente más grande. Si observamos en la gráfica siguiente, la recta que interesa tiene por ecuación x+y=14. Dicha recta pasa por los puntos (7,7), (8,6), (9,5), (10,4), (11,3), (12,2), (13,1) y (14,0) del conjunto de soluciones factibles y constituyen las soluciones óptimas.



(2) Al resolver el sistema de inecuaciones obtenemos el conjunto de soluciones factibles de la figura (3). Es un conjunto abierto. Representamos la recta x+y=0 y comenzamos a trazar paralelas a dicha recta que corten al conjunto de soluciones factibles. Observamos que ese proceso no tiene fin, es decir, no hay una última paralela de ecuación x+y=K con k el mayor posible. Por lo tanto, no existe solución óptima.

(3) Al resolver el sistema de inecuaciones obtenemos el conjunto de soluciones factibles de la figura (4). Es un conjunto abierto. Representamos la recta x+y=0 y comenzamos a trazar paralelas a dicha recta que corten al conjunto de soluciones factibles. Observamos que la paralela, con un término independiente más pequeño, que corta al conjunto de soluciones factibles es la recta de ecuación x+y=4 y pasa por un único punto C(4,0) del conjunto de soluciones factibles. Por lo tanto la solución óptima es x = 4, y = 0.


x + y = 18
c = 200
a
e
20
Figura 3
x + y = 10
15
x + y = 8
x + y = 4
10
F: x + y = 0
5
B = (4, 4)
b
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
C = (4, 0)
d


a
e
c = 200
20
Figura 4
15
x + y = 8
x + y = 4
10
F: x + y = 0
5
B = (4, 4)
b
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
C = (4, 0)
d