

Junio 2016 - Opción A (Coincidentes)

Problema 1 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones

lineales dependiente de $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x + y + az = a - 2 \\ ax - y + z = a - 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del a .

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 2a^2 - 8 = 0 \implies a = \pm 2$$

- Si $a \neq \pm 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3$$

como $\text{Rango}(\bar{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \implies$ el sistema es incompatible.

- Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

como $F_3 = F_1 - F_2 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ -y + z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + 4$$

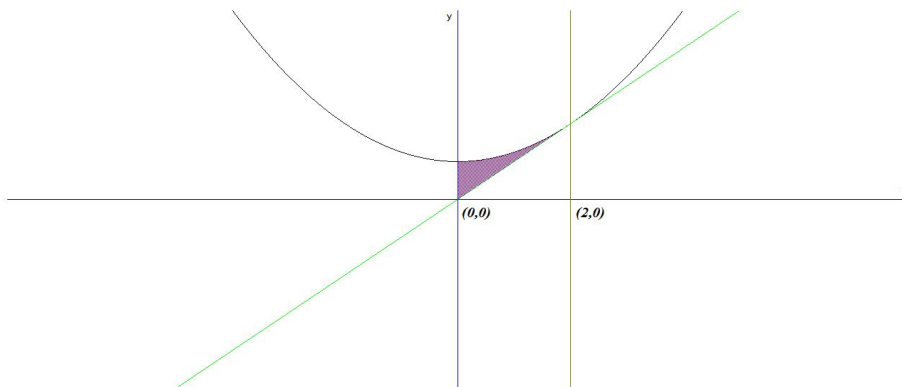
- a) Escribese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.
- b) Determínese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, la recta $y = 4x$ y el eje de ordenadas.

Solución:

- a) $b = f(2) = 8$, $f'(x) = 2x$, $m = f'(2) = 4$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 8 = 4(x - 2)$
- b) $f(x) = g(x) \implies x^2 - 4x + 4 = 0 \implies x = 2$ (doble), como el eje de ordenadas (OY) es la recta $x = 0$ el intervalo de integración es $[0, 2]$.

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{8}{3} u^2$$



Problema 3 (2 puntos) Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

- a) Determinéense las asíntotas de $f(x)$.
- b) Determinéense los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.

Solución:

- a) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} - x \right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

b) $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2} = 0 \implies x = 1$ y $x = -5$:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-5, 1)$.

La función tiene un mínimo en $(1, 0)$ y un máximo en $(-5, -12)$.

Problema 4 (2 puntos) Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,8$. Calcúlese:

a) $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: \overline{S} denota el suceso complementario del suceso S .

Solución:

$$P(A) = 0,5, \quad P(B) = 0,2$$

a) Como A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$$

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})} = \frac{1 - 0,6}{0,8} = 0,5$$

Problema 5 (2 puntos) El peso en kilogramos (kg) de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0,60$ kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{X} = 3,250$ kg. Determine un intervalo de confianza al 98 % para μ .

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ , con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 2,325$, $n = 100$ y $\overline{X} = 3,25$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325 \frac{0,6}{\sqrt{100}} = 1,325$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (3,1105; 3,3895)$$

b) $E = 0,2$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$0,2 = 1,96 \frac{0,6}{\sqrt{n}} \implies n \geq 34,5744 \implies n = 35$$

Junio 2016 - Opción B (Coincidentes)

Problema 1 (2 puntos) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo a un número real.

- Determinése a para que la matriz A admita inversa.
- Para $a = 1$, determinése la matriz X que verifica $A \cdot X + A = Id$.

Solución:

- $|A| = a(2 - a) = 0 \implies a = 0$ y $a = 2$
Si $a = 0$ o $a = 2 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$.
- $A \cdot X + A = I \implies A \cdot X = I - A \implies X = A^{-1}(I - A)$:
Para $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5; \quad 2x - y \geq -2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 1$$

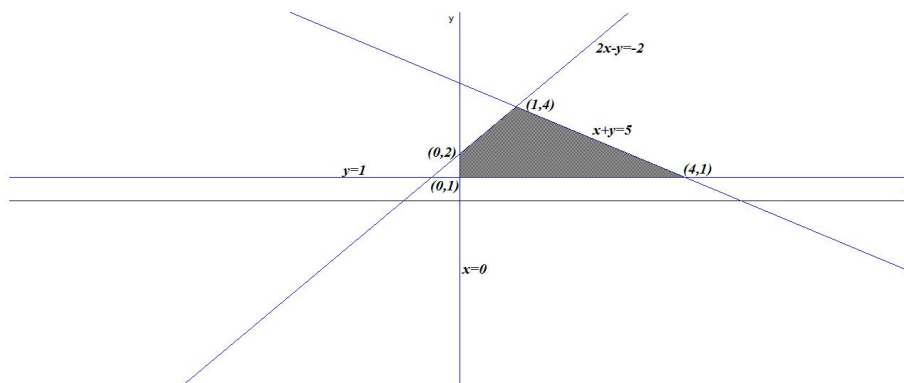
- Representése la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- Obtéganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x - 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

- Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 2x - 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x - y \geq -2 \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 4)$, y $(4, 1)$:



b)

$$\begin{cases} f(0,1) = -3 \\ f(0,2) = -6 \\ f(1,4) = -10 \text{ M\u00ednimo} \\ f(4,1) = 5 \text{ M\u00e1ximo} \end{cases}$$

El m\u00ednimo es -10 y se alcanza en el punto (1, 4) y el m\u00e1ximo es de 5 y se alcanza en el punto (4, 1).

Problema 3 (2 puntos) Se considera la funci\u00f3n real de variable real $f(x) =$

$$x^3 - 2x^2 + ax + b$$

- a) Determin\u00e9nse los valores de los par\u00e1metros reales a y b si se sabe que la recta $y = x$ es tangente a la gr\u00e1fica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- b) Para $a = 1$ y $b = 0$, calc\u00faese el \u00e1rea del recinto plano limitado por la gr\u00e1fica de $f(x)$ y el eje OX .

Soluci\u00f3n:

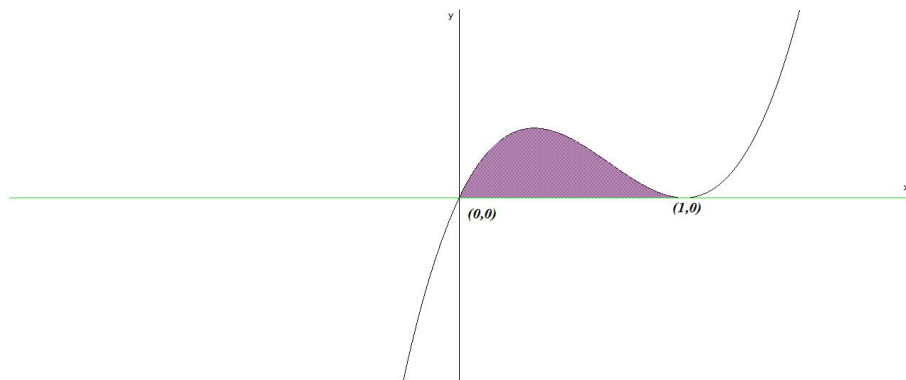
a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + a \implies m = f'(0) = a = 1$.

El punto de tangencia es com\u00fan a la curva y a la recta ($y = x$), luego es el $(0, 0) \implies f(0) = b = 0$.

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x = 0 \implies x = 0$ y $x = 1$:

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{12} u^2$$

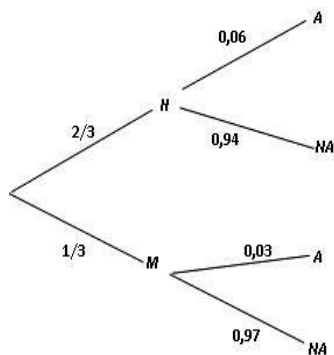


Problema 4 (2 puntos) En cierta población animal tratada genéticamente, el número de hembras es el doble que el número de machos. Se observa que el 6 % de los machos de esa población padece albinismo, mientras que entre las hembras únicamente el 3 % padece albinismo. Calcúlese la probabilidad de que un individuo de esa población elegido al azar:

- Padezca albinismo.
- Sea hembra, en el supuesto de que padezca albinismo.

Solución:

$H \equiv$ Hembra, $M \equiv$ Macho.



$$P(H) = \frac{2}{3}, \quad P(M) = \frac{1}{3}, \quad P(A|M) = 0,06, \quad P(A|H) = 0,03$$

a)

$$P(A) = P(A|H) \cdot P(H) + P(A|M) \cdot P(M) = \frac{2}{3} \cdot 0,06 + \frac{1}{3} \cdot 0,03 = 0,05$$

b)

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A)} = \frac{0,06 \cdot 2/3}{0,05} = 0,8$$

Problema 5 (2 puntos) La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo de confianza (159; 165). Determinése el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.
- b) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, \bar{X} , sea mayor que 156 km.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

- a) $\sigma = 16$, $n = 81$ y $IC = (159; 165)$

$$\begin{cases} \bar{X} - E = 159 \\ \bar{X} + E = 165 \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{X} = 162 \\ E = 3 \end{cases}$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 3 = z_{\alpha/2} \frac{16}{\sqrt{81}} \implies z_{\alpha/2} = 1,6875$$

$$P(Z \leq 1,69) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9545 \implies$$

$$\alpha = 0,091 \implies NC = 1 - 0,091 = 0,909 = 90,9\%$$

- b) $\mu = 160$, $n = 64$, $\bar{X} \approx N\left(160, \frac{16}{\sqrt{64}}\right) = N(160, 2)$

$$P(\bar{X} \geq 156) = P\left(Z \geq \frac{156 - 160}{2}\right) =$$

$$P(Z \geq -2) = 1 - P(Z \leq -2) = 1 - (1 - P(Z \leq 2)) = P(Z \leq 2) = 0,9772$$