Junio 2016 - Opción A

Problema 1 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$.

b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?
Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C.

Solución:

a) $|A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^T| \cdot |A^{-1}| = |C|^2 = 4$
$(|C| = |C^T|$ y $|A| \cdot |A^{-1}| = 1)$

b)

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$$

No es una matriz cuadrada y, por tanto, $\nexists M^{-1}$.

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \le 5; \quad y - x \le 3; \quad \frac{1}{2}x - y \le -2$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

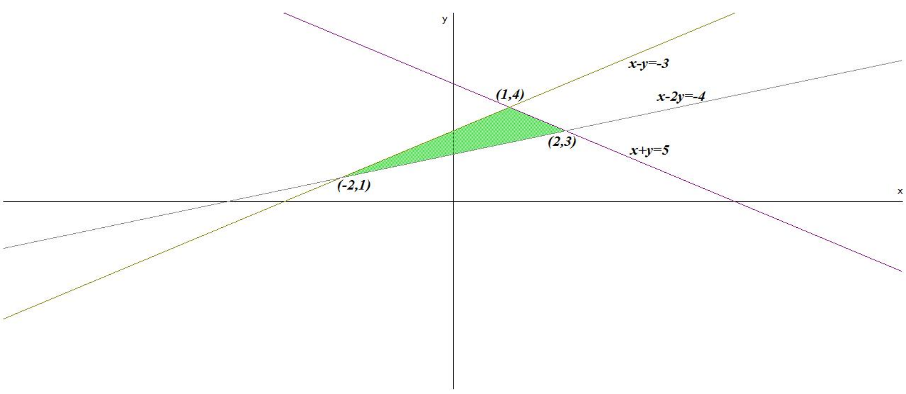
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x+y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 2x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \le 5 \\ x - y \ge -3 \\ x - 2y \le -4 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $(-2, 1)$, $(1, 4)$, y $(2, 3)$:



b)

$$\begin{cases} z(-2, 1) = -3 \text{ Mínimo} \\ z(1, 4) = 6 \\ z(2, 3) = 7 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es -3 euros y se alcanza en el punto $(-2, 1)$ y el máximo es de 7 y se alcanza en el punto $(2, 3)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la funci´on real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 8$$

a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) $x^3 + 8 = 0 \Longrightarrow x = -2$ luego hay que separar dos áreas S_1 en el intervalo $[-3, -2]$ y S_2 en el intervalo $[-2, -1]$.

$$S_1 = \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-3}^{-2} = -\frac{33}{4}$$

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 8)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{-1} = \frac{17}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{33}{4} + \frac{17}{4} = \frac{25}{2}\ u^2$$

b) $b = f(1) = 9$, $f'(x) = 3x^2$, $m = f'(1) = 3$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 9 = 3(x - 1)$

Problema 4 *(2 puntos)* Una conocida orquesta sinf´onica est´a compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.

b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Solución:

$$P(H) = 0,55,\ \ P(M) = 0,45,\ \ P(C) = 0,3,\ \ P(C|M) = 0,25$$

a)

$$P(M|C) = \frac{P(C|M)P(M)}{P(C)} = \frac{0,25 \cdot 0,45}{0,30} = 0,17$$

b)

$$P(H \cap C) + P(M \cap C) = P(C) \Longrightarrow P(H \cap C) = P(C) - P(M \cap C) =$$

$$P(C) - P(C|M)P(M) = 0,3 - 0,25 \cdot 0,45 = 0,1875$$

Problema 5 *(2 puntos)* La produccion diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribuci´on normal de media μ desconocida y desviaci´on t ´ıpica $\sigma = 50$ litros.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 dias escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas,$\overline{X}$, sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{50}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \simeq 384,16$$
$$n = 384$$

b) $n = 25$, $\mu = 950$: $\overline{X} \approx N\left(950; \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(950; 10)$

$$P(\overline{X} \le 940) = P\left(Z \le \frac{940 - 950}{10}\right) = P(Z \le -1) =$$

$$1 - P(Z \le 1) = 1 - 0,8413 = 0,157$$

Junio 2016 - Opción B

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\1&2&3&0\\1&a&2&0\end{array}\right);\quad |A|=-2a+4=0\Longrightarrow a=2$$

- Si $a\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=2$:

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\1&2&3&0\\1&2&2&0\end{array}\right);\quad |A|=0\ \text{y}\ \left|\begin{array}{cc}2&1\\2&3\end{array}\right|=4\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

  como $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2=$Rango$(A)<$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c}x+2y+z=1\\x+2y+3z=0\\x+2z=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=1/4\\z=-1/2\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la funci´on real de variable real:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{-x+b}{x-2}&\text{si}\quad x\leq -1\\\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}&\text{si}\quad x>-1\end{array}\right.$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x=-1$.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Continuidad en $x=-1$

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{-x+b}{x-2}=-\frac{1+b}{3}\\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{2x+6}{2x+4}=2\end{array}\right.$$

Luego $-\dfrac{1+b}{3}=2\Longrightarrow b=-7$

b) Asíntotas:

- Si $x \leq -1$ no hay asíntotas verticales ($x = 2$ no está en la rama). Si hay horizontales $y = -1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x + b}{x - 2} = -1$$

- Si $x > -1$ no hay asíntotas verticales, los valores que anulan el denominador ($x = -1$ y $x = -3$) no están en la rama. Si hay horizontales $y = 1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 3} = 1$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una funci´on real de variable real es:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$$

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a)

$$f(x) = \int (6x^2 + 4x - 2)\, dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C$$

$$f(0) = 5 \Longrightarrow C = 5 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$$

b) $6x^2 + 4x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 1/3$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1/3, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1/3)$.

La función tiene un mínimo en $(1/3, 125/27)$ y un máximo en $(-1, 7)$.

Problema 4 *(2 puntos)* Tenemos dos urnas A y B. La urna A con-tiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la ur-na B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calc´ulese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

b) Las dos bolas extraídas sean blancas.

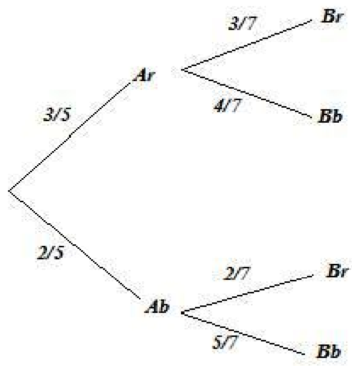
Solución:

a)

$$P(Br) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0,371$$

b)

$$P(Ab \cap Bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{5} = 0,286$$



Problema 5 *(2 puntos)* El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palam´os, se puede aproximar por una variable aleatoria con distri-buci´on normal de media μ desconocida y desviaci´on t´ıpica $\sigma = 5$ gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{X} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 5$, $n = 25$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $\overline{X} = 70$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{25}} = 1,96$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (68,04; 71,96)$$

b) $\mu = 70$, $n = 12 \Longrightarrow 855/12 = 71,25$ la probabilidad pedida sería

$$P\left(\overline{X} \geq 71{,}25\right) = P\left(Z \geq \frac{71{,}25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P\left(Z \geq 0{,}87\right) = 1 - P\left(Z \geq 0{,}87\right) =$$

$$1 - 0,8023 = 0,1977$$