Septiembre 2016 - Opci´on A

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -7 & k & k \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$

a) Estudíese para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $k = 1$, la matriz X tal que $XA = Id$.
Nota: Id denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $|A| = k(k^2 + k - 6) = 0 \Longrightarrow k = 0,\ k = 2$ y $k = -3$
Si $k = 0$ o $k = 2$ o $k = -3 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$ y $k \neq -3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) $XA = Id \Longrightarrow X = A^{-1}$: Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 & 1/4 \\ -3/2 & -1/4 & 1/4 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la regi´on del plano definida por:

$$2x - y > 1;\quad 2x - 3y < 6;\quad x + 2y > 3;\quad x + y < 8;\quad y < 3$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x+y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 2x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

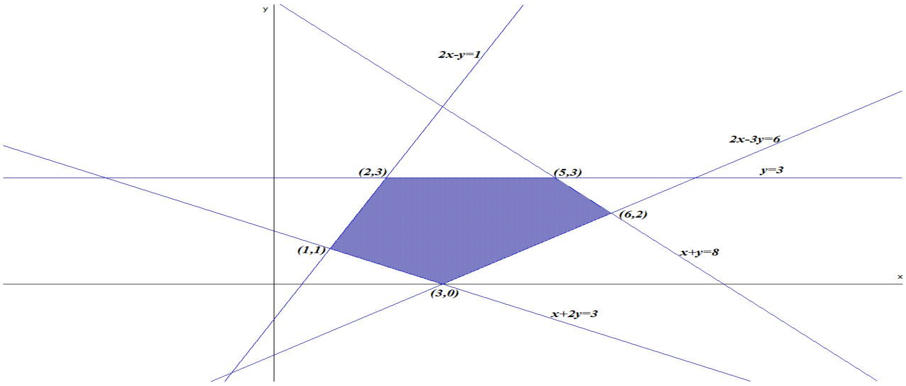
$$S : \begin{cases} 2x - y > 1 \\ 2x - 3y < 6 \\ x + 2y > 3 \\ x + y < 8 \\ y < 3 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $(3, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(5, 3)$ y $(6, 2)$:

b)

$$\begin{cases} f(3, 0) = 6 \\ f(1, 1) = 3 \ \text{Mínimo} \\ f(2, 3) = 7 \\ f(5, 3) = 13 \\ f(6, 2) = 14 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es 3 y se alcanza en el punto $(1, 1)$ y el máximo es de 14 y se alcanza en el punto $(6, 2)$.



Problema 3 *(2 puntos)* Dada la funci´on real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{ax+b}{x} & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y $x = 2$.

b) Calcúlese, para $a = 4$ y $b = -2$, el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x^2+1) = 2 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{ax+b}{x} = a+b \end{array} \right. \Longrightarrow a+b = 2$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{ax+b}{x} = \dfrac{2a+b}{2} \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \sqrt{x^3+1} = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow 2a+b = 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b = 2 \\ 2a+b = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -2 \end{array} \right.$$

b)

- $$S_1 = \int_1^2 \frac{4x-2}{x}\, dx = \int_1^2 \left(4 - \frac{2}{x}\right) dx = 4x - 2\ln|x|]_1^2 = 4 - 2\ln 2$$

$$S = |S_1| = 4 - 2\ln 2 = 2,614 \ u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 3/4$, $P(A|B) = 3/4$ y $P(B|A) = 1/4$.

a) Demuéstrese que A y B son sucesos independientes pero no incompatibles.

b) Calcúlese $P(\overline{A}|\overline{B})$.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a)
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{3/16}{3/4} = \frac{1}{4}$$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} = P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.
Como $P(A \cap B) \neq 0 \Longrightarrow A$ y B son compatibles.

b)
$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} =$$
$$\frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B))}{1 - P(B)} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

Problema 17.7.5 *(2 puntos)* El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{X} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 minutos?

Solución:

a) $n = 64$, $\overline{X} = 30$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (28,775; 31,225)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{64}} = 1,225$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{5}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq 6,63$$
$$n = 7$$

Septiembre 2016 - Opción B

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a.

$$\left\{\begin{array}{c} (a-1)x + y + z = 1 \\ x + (a-1)y + (a-1)z = 1 \\ x + az = 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los valores del a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a^2(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0, \quad a = 2$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

  $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

  $$A_2 = \left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

  Luego el sistema es incompatible.
- Si $a = 2$:

  $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

  como $F_1 = F_2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 1/9 \\ z = 2/9 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la funci´on real de variable real:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{rcl} x^2 + 2x & \text{si} & x < 0 \\ -x^2 + 3x & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

a) Estudíese la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Determínense los valores de $a \in R$ para los cuales la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $m = -2$. Calcúlese, para cada valor de a obtenido, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (x^2 + 2x) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (-x^2 + 3x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right.$$

Luego la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en todo R.
Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{rcl} 2x + 2 & \text{si} & x < 0 \\ -2x + 3 & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = 3 \end{array}\right.$$

Luego f no es derivable en $x = 0 \Longrightarrow f$ es derivable en $R - \{0\}$.

b) En $x = a$ es $m = f'(a) = -2$, hay dos casos:

- Si $x < 0$: $f'(a) = 2a + 2 = -2 \Longrightarrow a = -2$
  $b = f(-2) = 0 \Longrightarrow y = -2(x + 2)$
- Si $x \geq 0$: $f'(a) = -2a + 3 = -2 \Longrightarrow a = 5/2$
  $b = f(5/2) = \frac{5}{4} \Longrightarrow y - \dfrac{5}{4} = -2(x - \dfrac{5}{2})$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la funci´on real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a)

b) Asíntotas:

- **Verticales:**
  $x = 3$
  $$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \pm\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$
  $x = -3$
  $$\lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \pm\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$
- **Horizontales:** $y = 1$
  $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-3}{x^2-9} = 1$$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

c)

$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2-9)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 3) \cup (3, \infty)$.

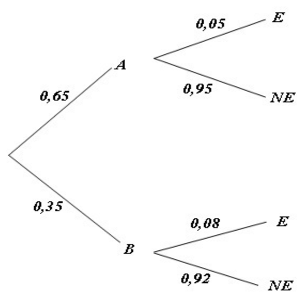
La función tiene un máximo en $(0, 1/3)$.

Problema 4 *(2 puntos)* Para efectuar cierto diagn´ostico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientras que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

Solución:



a)
$$P(E) = 0,65 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,08 = 0,0605$$

b)
$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{0{,}05 \cdot 0,65}{0,0605} = 0,5372$$

Problema 17.8.5 *(2 puntos)* El tiempo, en meses, que una persona es socia de un club deportivo, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 9$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 personas que han sido socias de ese club y se obtuvo una estancia media de $\overline{X} = 8'1$ meses. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 144 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (7'766; 10'233) para μ, determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 9)$$

a) $\sigma = 9$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $\overline{X} = 8,1$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{9}{\sqrt{100}} = 1,4805$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6,6195; 9,5805)$$

b) $n = 144$ e $IC = (7,766; 10,233) \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{X} - E = 7,766\\ \overline{X} + E = 10,233\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{X} = 8,9995\\ E = 1,2335\end{array}\right.$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1,2335\cdot\sqrt{144}}{9} = 1,645$$

Por el apartado anterior corresponde a un nivel de confianza del 90 %