10.3. Junio 2009 - Opción A

Problema 10.3.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz = & 4 \\ 2x- & y+ & 2z = & 5 \\ -x+ & 3y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.

b) Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & k & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 5k - 5 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Compatible Indeterminado.

b) Si $k = 1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 4 \\ 2x- & y+ & 2z = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Si $k = 0$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & = & 4 \\ 2x- & y+ & 2z = & 5 \\ -x+ & 3y- & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 10.3.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

a) Determínense los extremos relativos de f.

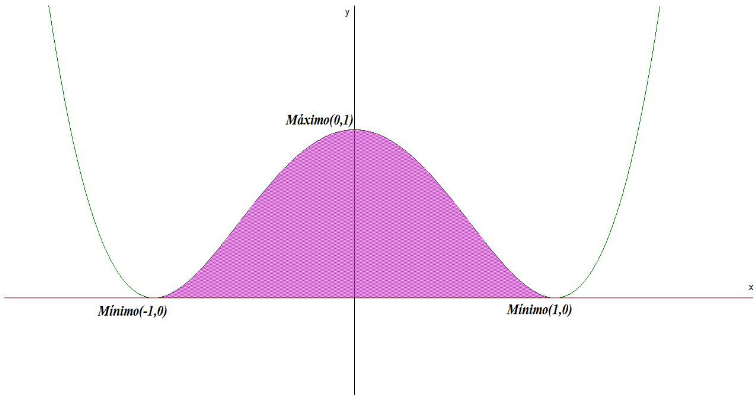
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de f y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente



La función es creciente en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(0, 1)$ y dos mínimos en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

b) $a = 3 \Longrightarrow f(3) = 64$, $m = f'(3) = 96$. La ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y - 64 = 96(x - 3) \Longrightarrow 96x - y - 224 = 0$$

- $$S_1 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}\; u^2$$

- $$S = |S_1| = \frac{16}{15}\; u^2$$

Problema 10.3.3 *(2 puntos)* Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = \frac{1}{2};\;\; P(B) = \frac{1}{3};\;\; P(C) = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3};\;\; P(A \cap B \cap C) = 0;\;\; P(A|B) = P(C|A) = \frac{1}{2}$$

a) Calcúlese $P(C \cap B)$.

b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

a)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \cap A) = P(C|A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - P(B \cap C) + 0 \Longrightarrow P(B \cap C) = 0$$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$

Problema 10.3.4 *(2 puntos)* Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una determinada familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.

a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95 %?

b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

Solución:

a)

$$N(\mu, 55), \quad n = 81, \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$P\left(\left|\overline{X} - \lambda\right| \leq 10\right) \geq 0{,}95 \Longrightarrow P\left(\left|\overline{X} - \lambda\right| \leq 10\right) = P\left(|Z| \leq \frac{10}{55/\sqrt{81}}\right) =$$

$$P\left(|Z| \leq 1{,}64\right) = 0{,}9495 \leq 0{,}95$$

No podemos asegurar esa hipótesis.

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 116,2084 \Longrightarrow n = 117$$

10.4. Junio 2009 - Opción B

Problema 10.4.1 *(3 puntos)* Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Solución:

Sea x cantidad de petróleo tipo A.

Sea y cantidad de petróleo tipo B.

	Gasolina	Fuel − oil	Coste
A	$0,1$	$0,35$	350
B	$0,05$	$0,55$	400
Total	10	50	

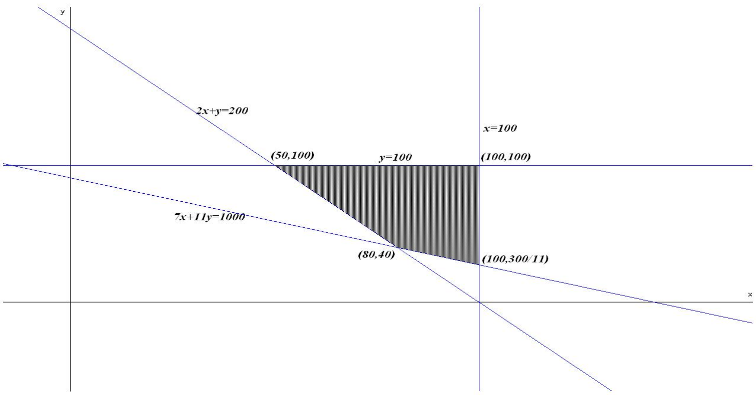
La función objetivo: $z(x,y) = 350x + 400y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 0,1x + 0,05y \geq 10 \\ 0,35x + 0,55y \geq 50 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + y \geq 200 \\ 7x + 11y \geq 1000 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lcr} z(80,40) & = & 44000 \\ z(50,100) & = & 57500 \\ z(100,300/11) & = & 45909,09 \\ z(100,100) & = & 75000 \end{array}$$

Luego para obtener el mínimo coste se deberán comprar 80 toneladas del petróleo tipo A y 40 toneladas del tipo B, con un coste de 44000 euros.



Problema 10.4.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-a}$$

a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

b) Para $a = -1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_0^b f(x)\, dx = 0$

Solución:

a) Para que f tenga asíntotas verticales $x^2 - x - a = 0 \Longrightarrow$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

- Si $a = -1/4$ la única asíntota vertical que hay es $x = \dfrac{1}{2}$
- Si $a < -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a < 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas verticales.
- Si $a > -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a > 0 \Longrightarrow$ hay dos asíntotas verticales:

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$$

b)

$$\int_0^b \frac{2x-1}{x^2-x+1}\, dx = \ln|x^2-x+1|\big]_0^b = \ln(b^2-b+1) = 0 \Longrightarrow$$

$$b^2 - b + 1 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

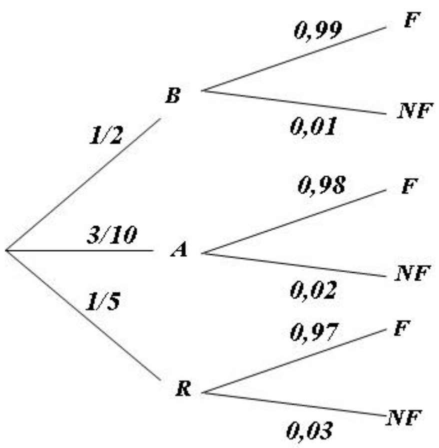
Problema 10.4.3 *(2 puntos)* Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul y 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea de color azul

Solución:

$$P(B) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2},\ \ P(B) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10},\ \ P(B) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$



- $$P(NF) = \frac{1}{2}\cdot 0,01 + \frac{3}{10}\cdot 0,02 + \frac{1}{5}\cdot 0,03 = 0,017$$

- $$P(A|NF) = \frac{P(NF|A)\cdot P(A)}{P(NF)} = \frac{0,02\cdot 3/10}{0,017} = 0,35294$$

Problema 10.4.4 *(2 puntos)* Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación metereológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtiene las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros):

$$9,1;\ 4,9;\ 7,3;\ 2,8;\ 5,5;\ 6,0;\ 3,7;\ 8,6;\ 4,5;\ 7,6$$

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95 %.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meterelógica mediante dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98 %.

Solución:

a) $N(\mu, 2)$, $n = 10$, $\overline{X} = 6$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = \left((\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}76039; 7{,}23961)$$

b) $E = 1$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}325$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 21{,}6225$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 22$.

10.5. Septiembre 2009 - Opción A

Problema 10.5.1 *(3 puntos)* Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0,3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas de taller de fabricación y 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Solución:

Sea x m^2 de tipo A.

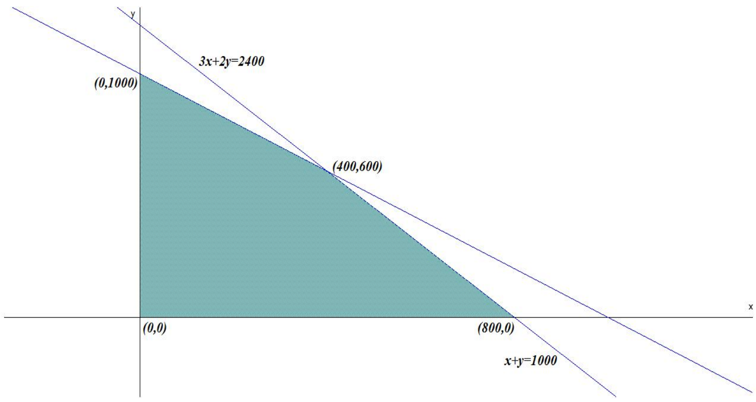
Sea y m^2 de tipo B.

	Fabricación	Barnizado	Beneficio
A	0, 3	0, 2	4
B	0, 2	0, 2	3
Total	240	200	

La función objetivo: $z(x,y) = 4x + 3y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 0,3x + 0,2y \leq 240 \\ 0,2x + 0,2y \leq 200 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x + 2y \leq 2400 \\ x + y \leq 1000 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$



$$\begin{array}{rcl} z(0,1000) & = & 3000 \\ z(400,600) & = & 3400 \\ z(800,0) & = & 3200 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberán vender 400 m^2 del tipo A y 600 del tipo B. El benficio de esta venta es de 3400 euros.

Problema 10.5.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x + 24 & \text{si} & x \leq -3 \\ x^2 + 9 & \text{si} & -3 < x \leq 2 \\ -x + 15 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

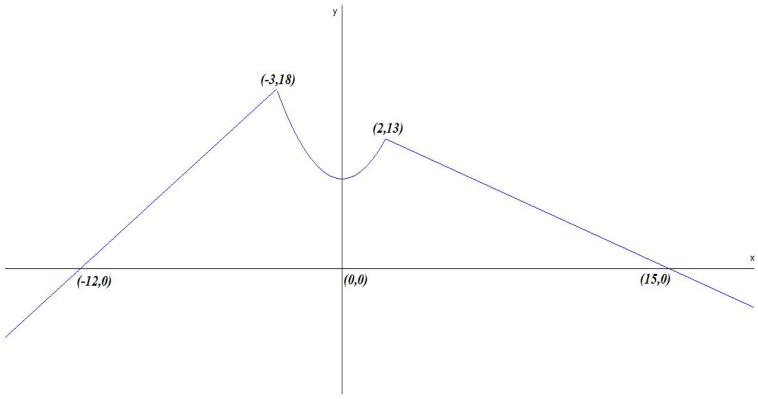
a) Represéntese gráficamente la función f.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a) La representación gráfica es:



b) En $x = 1$ la función es $f(x) = x^2+9 \Longrightarrow f'(x) = 2x$ tenemos $f(1) = 10$ y $m = f'(1) = 2 \Longrightarrow y - 10 = 2(x-1) \Longrightarrow y = 2x + 8$

c) Cálculo del área:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8 + \int_{-3}^{2}(x^2+9)\,dx + \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 13 = 81 + \left[\frac{x^3}{3} + 9x\right]_{-3}^{2} + \frac{169}{2} = \frac{1333}{6}\,u^2$$

Problema 10.5.3 *(2 puntos)* En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a las empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %.

a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

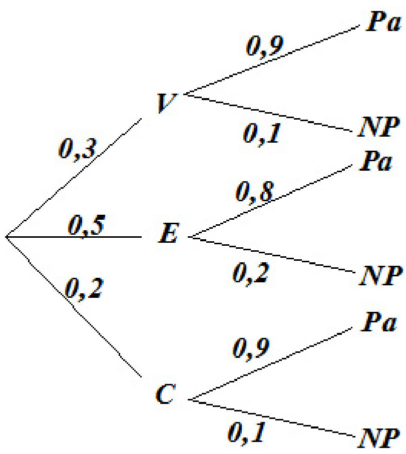
Solución:

V: crédito para vivienda, E: crédito para empresa y C: crédito para consumo.

Pa: pagados y NP: no pagados.

a) $P(Pa) = P(V)\cdot P(Pa|V) + P(E)\cdot P(Pa|E) + P(C)\cdot P(Pa|C) = 0,3\cdot 0,9 + 0,5\cdot 0,8 + 0,2\cdot 0,9 = 0,85$

b)
$$P(C|Pa) = \frac{P(Pa|C)\cdot P(C)}{P(Pa)} = \frac{0,9\cdot 0,2}{0,85} = 0,21176$$



Problema 10.5.4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95 %.

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

Solución:

Tenemos $N(3{,}25, 0{,}8)$, $n = 64$

a) $\sigma = 1,32$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = 5,175$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 27$.

b) $N(4,36; 1,32) \Longrightarrow \overline{X} \sim N(4,36; 0,33)$

$$P(4 \le \overline{X} \le 5) = P\left(\frac{4-4,36}{0,33} \le Z \le \frac{5-4,36}{0{,}33}\right) =$$

$$P(-1,09 \le Z \le 1,94) = P(Z \le 1,94) - P(Z \le -1,09) = 0{,}8359$$

10.6. Septiembre 2009 - Opción B

Problema 10.6.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 3\\ x+ & ky+ & z= & 3\\ kx- & & 3z= & 6 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & k & 1 & 3\\ k & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2-2k+3=0 \Longrightarrow k=1,\ \ k=-3$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $k = 1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

Dos filas son iguales y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Si $k = -3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 1 & 3\\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 3\\ -3 & 0 & 6 \end{array}\right| = -60 \neq 0$$

en este caso Rango$(A) = 2$ y como hay un menor de orden 3 distinto de cero el Rango$\overline{A} = 3$ y el sistema, en este caso, es incompatible.

b) $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 3\\ x- & & 3z= & 6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 6+3\lambda\\ y = -3-4\lambda\\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) $k = 3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 3\\ x+ & 3y+ & z= & 3\\ 3x- & & 3z= & 6 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x=5/2\\ y=0\\ z=1/2 \end{array}\right.$$

Problema 10.6.2 *(3 puntos)* El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.

b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.

c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pédidas (es decir, beneficio negativo).

Solución:

a) para ello calculamos:

- Puntos de corte:

  Con el eje de abcisas hacemos $x = 0 \Longrightarrow B(0) = -10 \Longrightarrow (0, -10)$

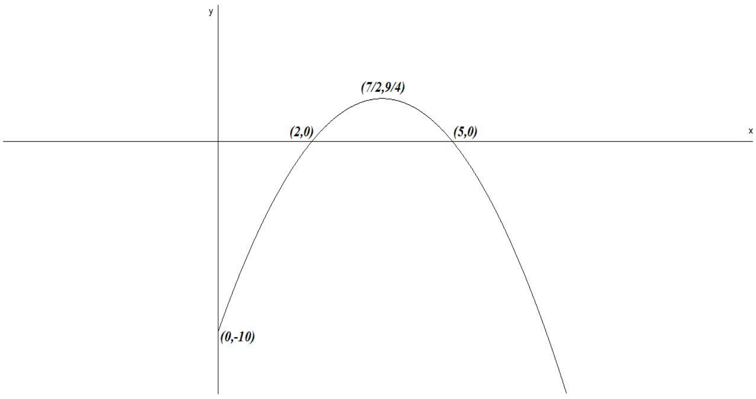
  Con el eje de ordenadas hacemos $B(x) = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5 \Longrightarrow (2, 0)$ y $(5, 0)$

- Máximos y mínimos:

$$B'(x) = -2x + 7 = 0 \Longrightarrow x = \frac{7}{2} \Longrightarrow \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(7/2) = -2 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo}$$

b) El beneficio máximo es $B(7/2) = 9/4 \Longrightarrow$ 2250 euros con una producción de $7/2$ hectolitros.



c) La producción debe de estar comprendida entre 2 y 5 hectolitros semanales.

Problema 10.6.3 *(2 puntos)* La probabilidad de que un habitante de cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:

a) al menos uno de los dos tipos de música.

b) la música clásica y también la moderna.

c) sólo la música clásica.

d) sólo la música moderna.

Solución:

LLamamos M al suceso le gusta la música moderna y C al suceso le gusta la música clásica. Los datos del problema: $P(M) = 0,55$, $P(C) = 0,4$ y $P(\overline{M \cup C}) = 0,25$

a) $P(M \cup C) = 1 - P(\overline{M \cup C}) = 1 - 0,25 = 0,75$

b) $P(M \cap C) = P(M) + P(C) - P(M \cup C) = 0,55 + 0,40 - 0,75 = 0,20$

c) $P(C \cap \overline{M}) = P(C) - P(M \cap C) = 0,40 - 0,20 = 0,20$

d) $P(M \cap \overline{C}) = P(M) - P(M \cap C) = 0,55 - 0,20 = 0,35$

Problema 10.6.4 *(2 puntos)* Se supone que la estancia (en días) de un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media de un paciente en dicho hospital.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?

Solución:

a)

$$N(\mu, 9) \;\; n = 20, \;\; \overline{X} = 8, \;\; z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4{,}0556; 11{,}9444)$$

b) $E = 2$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 77{,}79$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser $n = 78$.

Capítulo 11

Año 2010

11.1. Modelo 2010 - Opción A

Problema 11.1.1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z= & 1\\ & 2y+ & kz= & 2\\ x+ & y+ & z= & 1\end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $k = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1\\ 0 & 2 & k & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\Longrightarrow |A| = k^2 - k = 0 \Longrightarrow k = 0,\ \ k = 1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = 0$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 2 & 0\end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La primera fila y la tercera son iguales y como $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Si $k = 3$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & z = & 1 \\ & 2y+ & 3z = & 2 \\ x+ & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1/3 \\ y = 0 \\ z = 2/3 \end{array} \right.$$

Problema 11.1.2 *(3 puntos)* Se considera la curva de ecuación cartesiana:

$$y = x^2$$

a) Calcúlense las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva propuesta es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva propuesta, la recta tangente a dicha curva en el punto $P(1, 1)$ y el eje OX.

Solución:

a) $y = x \Longrightarrow m = 1$:

$$y = x^2 \Longrightarrow y' = 2x = 1 \Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

El punto es el $(a, f(a)) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

b) Calculamos la recta tangente a la curva en el punto $(a, b) = (1, 1)$:

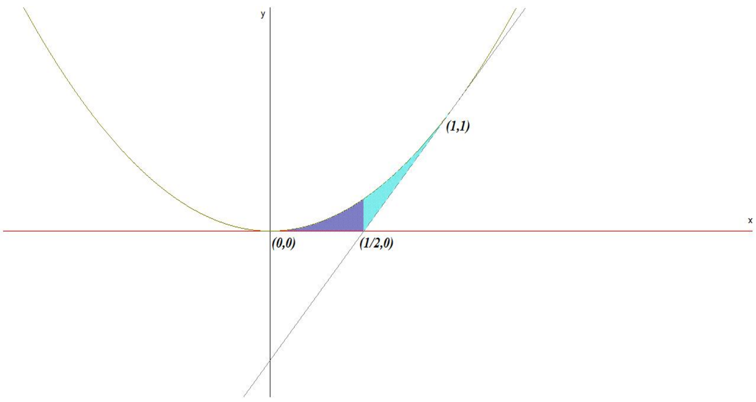
$$m = f'(1) = 2 \Longrightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Longrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Como se puede apreciar en la figura el área buscada consta de dos partes, por un lado será el área entre la función y el eje de abcisas en el intervalo $(0, 1/2)$ y por otra parte el área encerrada por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x - 1$ en el intervalo $(1/2, 1)$

- $$S_1 = \int_0^{1/2} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{24}\ u^2$$

- $$S_1 = \int_{1/2}^{1} (x^2 - 2x + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{24}\ u^2$$

- $$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{12}\ u^2$$



Problema 11.1.3 *(2 puntos)* Según un cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se seleciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:

Lamamos $A = \{\text{Tiene contratado internet}\}$ y $B = \{\text{Tiene contratado TV por cable}\}$

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,33, \quad P(A \cap B) = 0,2$$

a)
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,33 - 0,2 = 0,13$$

b)
$$P(\text{Ninguno}) = 1 - P(\text{Alguno}) = 1 - P(A \cup B) =$$
$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0,53 = 0,47$$

Problema 11.1.4 *(2 puntos)* Se supone que la duración de una bombilla fabricada por una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 900 horas y desviación típica 80 horas. La empresa vende 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. ¿En cuántos lotes puede esperarse que la duración media de las bombillas que componen el lote sobrepase 910 horas?

Solución:

La distribución de la media en un lote:

$$N(900, 80), \quad n = 100 \Longrightarrow N(900, 80/\sqrt{100}) = N(200, 8)$$
$$P(\overline{X} > 910) = P\left(Z > \frac{910 - 900}{8}\right) =$$
$$1 - P(Z < 1{,}25) = 1 - 0,8943502263 = 0,1056497736$$

La probabilidad calculada es la de que la media de un lote sobrepase las 910 horas y, como tenemos 1000 lotes, el número de lotes en los que esperamos que se sobrepasen las 910 horas será de $1000 \cdot 0,1056497736 \simeq 105$ lotes

11.2. Modelo 2010 - Opción B

Problema 11.2.1 *(3 puntos)* Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada 100 metros de cable de tipo A fabricados es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual a 1000 euros. Calcúlese los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para maximizar el beneficio y determínese dicho beneficio máximo.

Solución:

Sea x cantidad de cable tipo A.

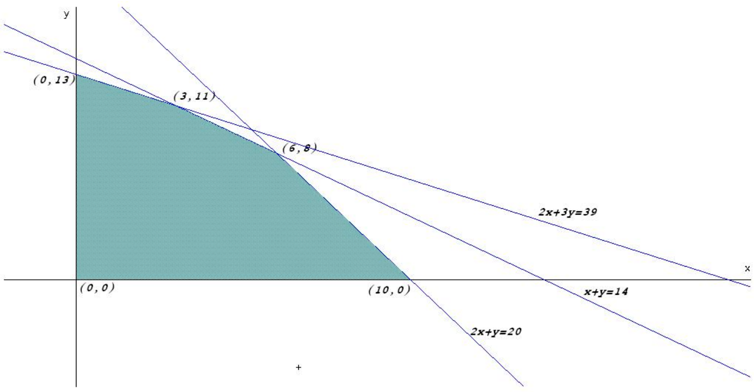
Sea y cantidad de cable tipo B.

	Cobre	Titánio	Aluminio	Beneficio
A	10	2	1	1500
B	15	1	1	1000
Total	195	20	14	

La función objetivo: $z(x, y) = 1500x + 1000y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + 3y \leq 39 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$



$$\begin{array}{rcl} z(0, 13) & = & 13000 \\ z(3, 11) & = & 15500 \\ z(6, 8) & = & 17000 \\ z(10, 0) & = & 15000 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberan fabricar 600 metros del tipo A y 800 metros del tipo B, con un beneficio de 17000 euros.

Problema 11.2.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

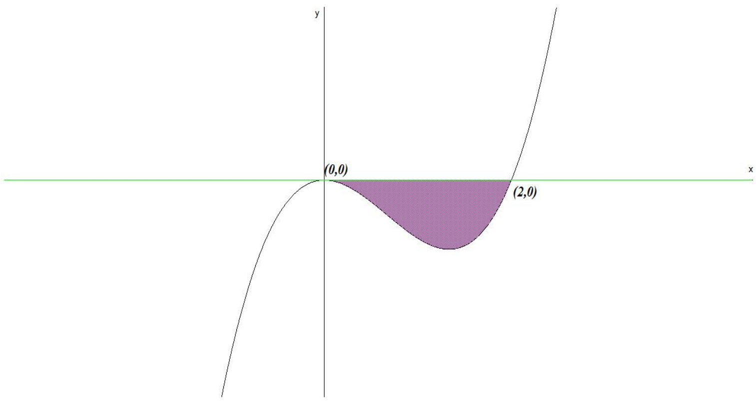
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c, \quad a, b, c \in R$$

a) ¿Qué valores deben tomar a, b y c para que la gráfica de f pase por el punto $(0,0)$ y además tenga un máximo relativo en el punto $(1,2)$?

b) Para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$, determínense los puntos de corte de f con los ejes de coordenadas.

c) Para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f y el eje OX.

Solución:



a) Tenemos:

- Pasa por el punto $(0,0) \Longrightarrow f(0) = c = 0$
- Tiene un máximo relativo en el punto $(1,2) \Longrightarrow f'(1) = 0$ y $f(1) = 2$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Longrightarrow 3a + 2b = 0, \text{ y } a + b + c = 2$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ 3a + 2b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 6 \\ c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -4x^3 + 6x^2$$

b) Tenemos que $f(x) = x^3 - 2x^2$

Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 2 \Longrightarrow (0,0)$, $(2,0)$.

Con el eje OY : $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, $(0,0)$

c) Luego los límites de integración serían los intervalos $[0,2]$:

$$F(x) = \int (x^3 - 2x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3}$$

$$S = |F(2) - F(0)| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}\ u^2$$

Problema 11.2.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B), \quad P(A \cap B), \quad P(\overline{A}|B), \quad P(\overline{B}|A)$$

Solución:

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \dfrac{1}{20} \Longrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \dfrac{19}{20}$
- $P(\overline{A \cup B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{19}{20} = \dfrac{3}{10}$
- $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/2 - 3/10}{1/2} = \dfrac{2}{5}$
- $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{3/4 - 3/10}{3/4} = \dfrac{3}{5}$

Problema 11.2.4 *(2 puntos)* La temperatura corporal de cierta especie de aves se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media 40,5ºC y desviación típica 4,9ºC. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 aves de esa especie. Sea $\overline{X}$ la media muestral de las temperaturas observadas.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté comprendida entre 39,9ºC y 41,1ºC?

Solución:

a) $N(40{,}5; 4{,}9)$, $n = 100$ entonces $\overline{X}$ se distribuye según una normal $N(40{,}5, 4{,}9/\sqrt{100}) = N(40{,}5; 0{,}49)$ de media 40,5ºC y desviación típica 0,49ºC, luego la varianza será de $0,49^2 = 0,2401$ ºC.

b)

$$P\left(39,9 < \overline{X} < 41,1\right) = P\left(\frac{39,9 - 40,5}{0,49} < \overline{X} < \frac{41,1 - 40,5}{0,49}\right) =$$

$$P\left(-1,22 < Z < 1,22\right) = P(Z < 1,22) - P(Z < -1,22) =$$

$$2P(Z < 1,22) - 1 = 0,7775351250$$

11.3. Junio 2010 - Opción A

Problema 11.3.1 *(3 puntos)* Un club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros. Se estima que el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes españoles, mientras que el importe total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes extranjeros. Los estatutos del club limitan a un máximo de 800000 euros la inversión total en jugadores extranjeros y exigen que la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser como mínimo de 500000 euros. Además, la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros. ¿Qué cantidad debe invertir el club en cada tipo de fichajes para que el importe de las camisetas vendidas sea máximo? Calcúlese dicho importe máximo. Justifíquese.

Solución:

Sea x cantidad invertida en españoles.

Sea y cantidad invertida en extranjeros.

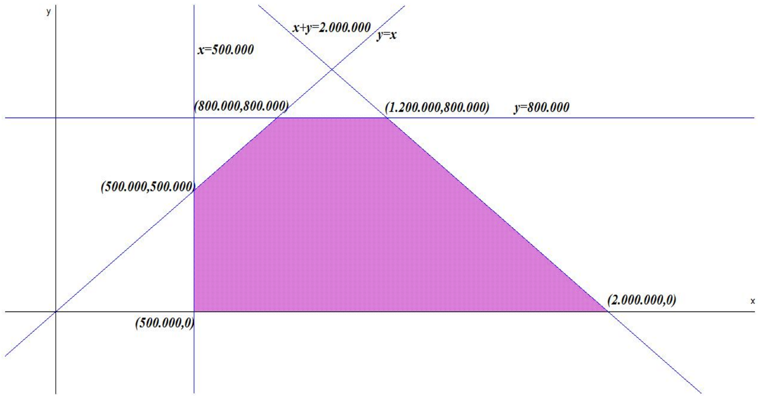
La función objetivo: $z(x, y) = 0,1x + 0,15y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{r} x + y \le 2000000 \\ y \le 800000 \\ x \ge 500000 \\ x \ge y \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lcr} z(800000, 800000) & = & 200000 \\ z(1200000, 800000) & = & 270000 \\ z(500000, 500000) & = & 125000 \\ z(500000, 0) & = & 50000 \\ z(2000000, 0) & = & 200000 \end{array}$$

Luego para obtener el máximo beneficio se deberan invertir 1.200.000 euros en fichajes españoles y 800.000 euros en fichajes extranjeros. El beneficio de esta operación sería de 270.000 euros.



Problema 11.3.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) Determínense su asíntotas.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las rectas verticales $x = 2$, $x = 3$, la gráfica de f y la recta de ecuación $y = x+1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: La única posible es $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

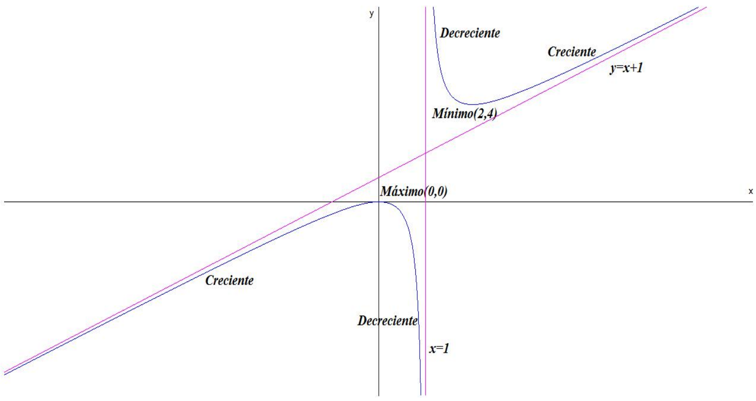
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1$$

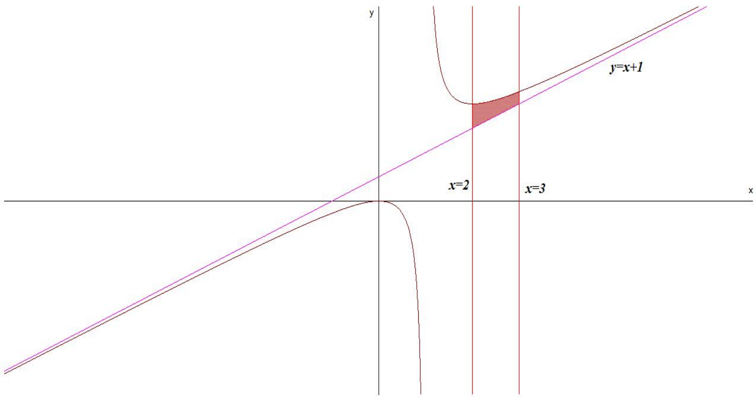
$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$

b)

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 2$$





	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, 2)$.

La función tiene un Máximo en el punto $(0, 0)$ y un Mínimo en el punto $(2, 4)$.

c)

$$S = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{x-1} - x - 1 \right) dx = \int_2^3 \frac{x^2}{x-1} \, dx = \ln|x-1|]_2^3 = \ln 2 \ u^2$$

Problema 11.3.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,4$; $P(A \cap B) = 0,1$. Calcúlense las siguientes probabilidades:

$$a)P(A \cup B); \quad b)P(\overline{A} \cup \overline{B}); \quad c)P(A|B); \quad d)P(\overline{A} \cap B)$$

Solución:

$a)P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8$

$b)P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,9$

$c)P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,25$

$d)P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,3$

Problema 11.3.4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de vida útil en miles de horas (Mh) de un cierto modelo de televisor, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 Mh. Para una muestra aleatoria simple de 4 televisores de dicho modelo, se obtiene una media muestral de 19,84 Mh de vida útil.

a) Hállese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo de vida útil medio de los televisores de dicho modelo.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto del error de la estimación de la media poblacional mediante la media muestral sea inferior a 0,2 Mh con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

a)

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(19,84 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{4}}; 19,84 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{4}}\right) = (19,35; 20,33)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,2}\right)^2 = 24,01$$

El tamaño mínimo muestral debe ser de $n = 25$ televisores.

11.4. Junio 2010 - Opción B

Problema 11.4.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} kx- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & kz = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2+k+2 = 0 \Longrightarrow k = -1, \ \ k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{rr} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que : $|C_1C_2C_3| = |C_1C_3C_4| = |C_1C_2C_4| = |C_2C_3C_4| = 0$

$\left|\begin{array}{rr} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & 2z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} - \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

c) Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} - & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y & = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 4 \\ z = 10 \end{array}\right.$$

Problema 11.4.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcl} -x^2 - x + a & \text{si} & x \le 1 \\ \dfrac{3}{bx} & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) Calcúlense los valores de a, b, para que f sea continua y derivable en todos los puntos.

b) Para $a = 6$, $b = 3/4$, determínense los puntos de corte de la gráfica f con los ejes de coordenadas.

c) Para $a = 6$, $b = 3/4$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f, el eje OX y la recta vertical $x = 2$.

Solución:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lcl} -2x - 1 & \text{si} & x \le 1 \\ -\dfrac{3}{bx^2} & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) Tenemos:

- Continua en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = -2 + a, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{b} \Longrightarrow$$

$$-2 + a = \frac{3}{b} \Longrightarrow -2b + ab = 3$$

- Derivable en $x = 1$:

$$f'(1^-) = -3, \quad f'(1^+) = -\frac{3}{b} \Longrightarrow -3 = -\frac{3}{b} \Longrightarrow b = 1$$

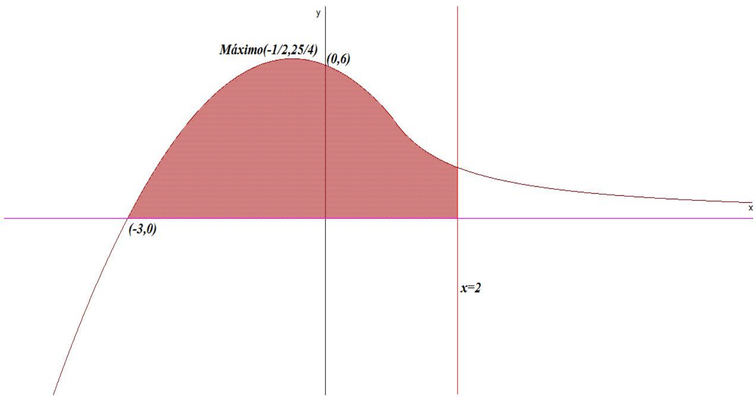
- Continua y derivable en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} -2b + ab = 3 \\ b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 5 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

b) Si $a = 6$, $b = 3/4$:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -x^2 - x + 6 & \text{si} & x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

- Corte con el eje OY: hacemos $x = 0$, que estaría en la primera rama y tendríamos el punto $(0, 6)$.
- Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0$ y tendríamos en la primera rama $-x^2 - x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 2$ pero esta última solución no es válida al no estar en la primera rama. Tendríamos el punto $(-3, 0)$



Para dibujar la gráfica observamos que cuando $x \longrightarrow +\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{4}{x} = 0 \Longrightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal. Si, por el contrario, cuando $x \longrightarrow -\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (-x^2 - x + 6) = \infty$ no habría asíntotas. Para calcular los extremos, observamos que la derivada de la segunda rama no puede ser nula y, por el contrario, la derivada de la primera rama se anularía en el punto $x = -1/2$ donde presentaría un máximo.

c)

$$S = \int_{-3}^{1} (-x^2 - x + 6)\, dx + \int_{1}^{2} \frac{4}{x}\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\Bigg]_{-3}^{1} + 4\ln x]_1^2 = \frac{56}{3} + 4\ln 2 \ u^2$$

Problema 11.4.3 *(2 puntos)* Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener al menos un seis en el total de los lanzamientos.

b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

Solución:

- $$P(\text{algún seis}) = 1 - P(\text{ningún seis}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,6651020233$$

- $$P(6, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, \overline{6}, 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,01339591906$$

Problema 11.4.4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente de una cierta empresa se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 llamadas y se obtiene un tiempo medio de espera igual a 6 minutos.

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de espera de una llamada a dicha línea de atención al cliente.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que debe observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total igual o inferior a 1 minuto?

Solución:

a)
$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$
$$\left(6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{100}}; 6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{100}}\right) = (5,902; 6,098)$$

b)
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,5}\right)^2 = 3,84$$

El tamaño mínimo muestral debe ser de $n = 4$ llamadas.

11.5. Septiembre 2010 - Opción A

Problema 11.5.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente de un parámetro real a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $a = 0$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 22 \\ x- & 4y+ & az = & 7a \end{array} \right.$$

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & a & 7a \end{array} \right), \quad |A| = 15 - 5a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 3 & 21 \end{array} \right), \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

Claramente se observa que $F_3 = F_2 - F_1$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 22 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + (1/5)\lambda \\ y = -4 + (4/5)\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 11.5.2 *(3 puntos)* El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlense las dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

Solución:

LLamamos x a la longitud del lado horizontal e y a la longitud del lado vertical.

$$x \cdot y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2}{x}, \;\; p(x, y) = 2x + 2y$$

$$C(x, y) = 50(x + 2y) \Longrightarrow C(x) = 50\left(x + \frac{4}{x}\right) = \frac{50(x^2 + 4)}{x}$$

$$C'(x) = \frac{50(x^2 - 4)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 2, \quad x = -2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$C'(x)$	$+$	$-$	$+$
$C(x)$	creciente	decreciente	creciente

El mínimo estaría en el punto $x = 2$, es decir, el coste mínimo sería de 200 euros y correspondería a unas dimensiones de 2 metros de lado horizontal y 1 metro de lado vertical.

Problema 11.5.3 *(2 puntos)* Sean tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A|C) \geq P(B|C), \quad P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C})$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es cierta:

$$\text{a) } P(A) < P(B); \quad \text{b) } P(A) \geq P(B)$$

Nota.- $\overline{C}$ representa el suceso complementario de C.

Solución:

$$P(A|C) \geq P(B|C) \Longrightarrow \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \geq \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \Longrightarrow P(A \cap C) \geq P(B \cap C)$$

$$P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C}) \Longrightarrow \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \geq \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \Longrightarrow P(A \cap \overline{C}) \geq P(B \cap \overline{C})$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap C) + P(A \cap \overline{C}) = P(A) \\ P(B \cap C) + P(B \cap \overline{C}) = P(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A) \geq P(B)$$

Luego es falso que $P(A) < P(B)$, se cumple que:

$$P(A) \geq P(B)$$

Problema 11.5.4 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.

b) Determínese el intervalo de confianza del 95 % para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

Solución:

$$N(\mu, 320), \quad n = 36$$

a)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{300}{320} = 0,9375$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow$$

$$P(Z < 0,9375) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,8289 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,3422$$

$$P(|\mu - \overline{X}| > 50) = \alpha = 0,3422 \text{ nivel de significación}$$

b)

$$\overline{X} = 4820, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4715,47; 4924,53)$$

11.6. Septiembre 2010 - Opción B

Problema 11.6.1 *(3 puntos)* Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6m^2 por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

Solución:

LLamamos x al número de kg de pintura comprados al proveedor A y, llamamos y al número de kg de pintura comprados al proveedor B.

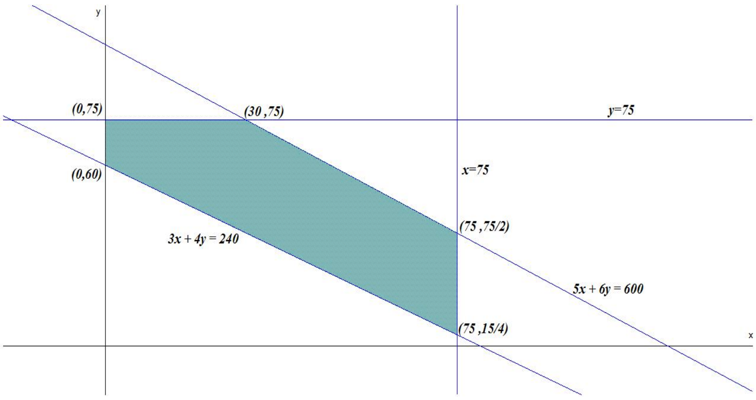
Proveedor	Rendimiento	Precio
A	6	1
B	8	1,2

Función Objetivo: Mín $z(x, y) = x + 1,2y$

Sujeto a:

$$\begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1,2y \leq 120 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 4y \geq 240 \\ 5x + 6y \leq 600 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Tenemos:



$$\begin{cases} z(0, 75) = 90 \\ z(0, 60) = 72 \\ z(30, 75) = 120 \\ z(75, 75/2) = 120 \\ z(75, 15/4) = 79,5 \end{cases}$$

El mínimo coste, de 72 euros, corresponde a la compra de 0 kg del proveedor A y 60 kg del proveedor B.

Problema 11.6.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -3x^2 + b & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \log x + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a, b, para que f sea continua en todos los puntos.

b) Para $a = 0$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

c) Para $a = 0$, $b = 3$, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Nota.- La notación log representa logaritmo neperiano.

Solución:

a) En $x = -1$:

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-}(2x^2 - a) = 2 - a, \quad \lim_{x\longrightarrow -1^+}(-3x^2 + b) = -3 + b \Longrightarrow a + b = 5$$

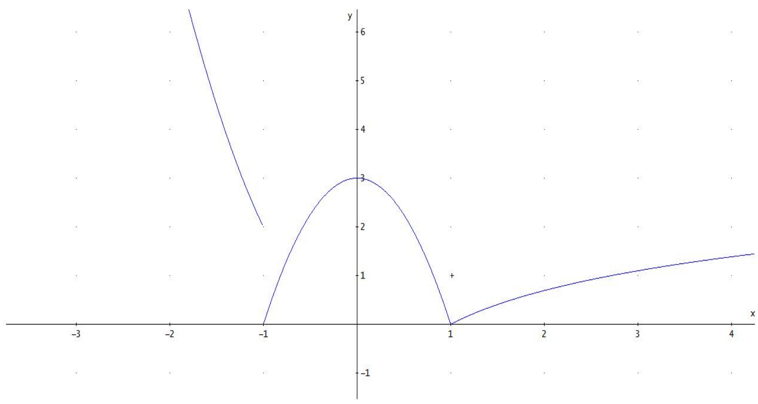
En $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}(-3x^2 + b) = -3 + b, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}(\log x + a) = a \Longrightarrow a - b = -3$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \end{array}\right.$$

b) Tenemos:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 2x^2 & \text{si} & x \le -1 \\ -3x^2 + 3 & \text{si} & -1 < x < 1 \\ \log x & \text{si} & x \ge 1 \end{array}\right.$$



c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)\,dx = -x^3 + 3x\Big]_{-1}^{1} = 4$$

.

Problema 11.6.3 *(2 puntos)* Se consideran los siguientes sucesos:

- Suceso A=La economía de un cierto país está en recesión.

- Suceso B=Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.

Se sabe que:

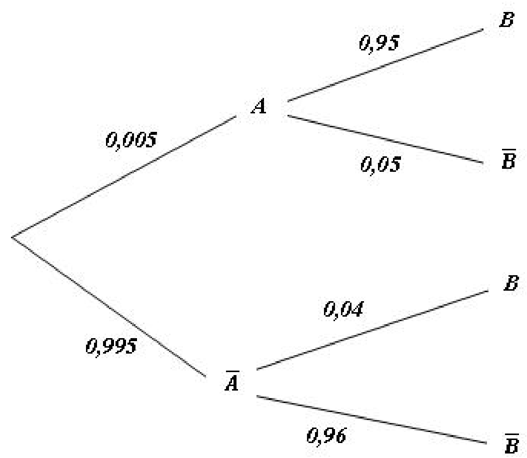
$$P(A) = 0,005, \quad P(B|A) = 0,95, \quad P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,96$$

a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.

b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Nota.- La notación $\overline{A}$ representa el suceso complementario de A.

Solución:



a)
$$P(\overline{B} \cap A) = 0,005 \cdot 0,05 = 0,00025$$

b)
$$P(B) = 0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,04 = 0,04455$$

Problema 11.6.4 *(2 puntos)* Para estimar la media de una población con distribución normal de desviación típica igual a 5, se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño 100, con la que se ha obtenido el intervalo de confianza (173,42;175,56) para dicha media poblacional.

a) Calcúlese la media de la muestra seleccionada.

b) Calcúlese el nivel de confianza del intervalo obtenido.

Solución:

$$N(\mu, 5), \quad n = 100, \quad (173,42; 175,56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - z_{\alpha/2} \dfrac{5}{10} = 173,42 \\ \\ \overline{X} + z_{\alpha/2} \dfrac{5}{10} = 175,56 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 174,49 \\ \\ z_{\alpha/2} = 2{,}14 \end{array} \right.$$

a) $\overline{X} = 174,49$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}14 \Longrightarrow P(Z < 2{,}14) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,9838 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0324 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 1 - 0,0324 = 0,9676.$

$$\text{Nivel de Confianza} = \ 96,76\,\%$$

Capítulo 12

Año 2011

12.1. Modelo 2011 - Opción A

Problema 12.1.1 *(3 puntos)* Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la septima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.

Solución:

Sea x : precio de la mochila, y : precio del bolígrafo y z : precio del libro.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=48 \\ \dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{7}z=8 \\ x=y+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=48 \\ 7x+14y+6z=336 \\ x-y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=24 \\ y=3 \\ z=21 \end{array}\right.$$

Problema 12.1.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx-6$$

a) Calcúlense a y b para que la función f tenga un máximo relativo en $x=1$ y un mínimo relativo en $x=2$

b) Para $a=b=0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y=8x-6$.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$.

f tenga un máximo relativo en $x = 1 \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow 2a + b = -6$

f tenga un mínimo relativo en $x = 2 \Longrightarrow f'(2) = 0 \Longrightarrow 4a + b = -24$

$$\left\{\begin{array}{c} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -24 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = -9 \\ b = 12 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

b) $a = b = 0 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - 6$ y $g(x) = 8x - 6$:

$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^3 - 6 = 8x - 6 \Longrightarrow 2x^3 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = \pm 2$

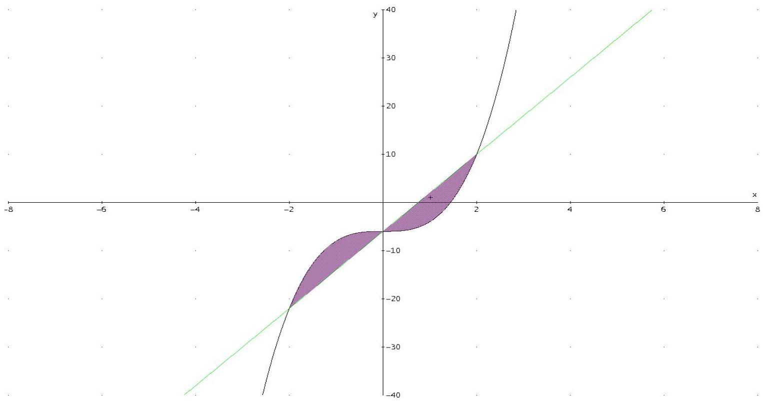
Límites de integración: $[-2, 0]$, $[0, 2]$

$$F(x) = \int (2x^3 - 8x)\, dx = \frac{x^4}{2} - 4x^2$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (2x^3 - 8x)\, dx = F(0) - F(-2) = 8$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (2x^3 - 8x)\, dx = F(2) - F(0) = -8$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 16 \ u^2$$



Problema 12.1.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a $\frac{7}{12}$. Se sabe además que $P(A|B) = \frac{1}{2}$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra A ó B.

b) Calcúlese la probabilidad de que ocurra A.

Solución:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6},\quad P(\overline{A\cup B})=\frac{7}{12},\quad P(A|B)=\frac{1}{2}$$

a) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-\dfrac{7}{12}=\dfrac{5}{12}$.

b)
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Longrightarrow P(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A|B)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow$$
$$P(A)=P(A\cup B)+P(A\cap B)-P(B)=\frac{5}{12}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

Problema 12.1.4 *(2 puntos)* Se supone que el nivel de glucosa en sangre de los individuos de la población (medido em miligramos por decílitro) se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 35 mg/dl. ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que permite garantizar que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ es menor que 20 mg/dl con una probabilidad mayor o igual a 0,98?

Solución:

La distribución de la media es: $N(\mu,35)$ y $z_{\alpha/2}=2{,}325$

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=\left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2=16{,}55$$

Como n tiene que ser un número natural $n=17$

12.2. Modelo 2011 - Opción B

Problema 12.2.1 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ -1 & a & 0\\ 0 & -6 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a=2$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $a=2$, calcúlese, si existe, la matriz X que satisface $AX=B$.

Solución:

a) $|A| = 5 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{5}$:

Si $a = \pm\sqrt{5} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow A$ no tiene inversa.

Si $a \neq \pm\sqrt{5} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow A$ si tiene inversa.

b) Para $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Problema 12.2.2 *(3 puntos)* Una empresa produce cable de fibra óptica, que vende a un precio de x euros por metro. Se estima que la venta diaria de cable (en miles de metros) se expresa en términos del precio mediante la función:

$$D(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

a) Obténgase la función $I(x)$ que determina los ingresos diarios de la empresa en función del precio x.

b) Calcúlese el precio x que ha de fijarse para que el ingreso diario sea máximo y calcúlese dicho ingreso máximo.

c) Detérminense las asíntotas de $I(x)$ y esbócese la gráfica de la función $I(x)$.

Solución:

a)

$$I(x) = \frac{6000x}{x^2 + 1}$$

b)

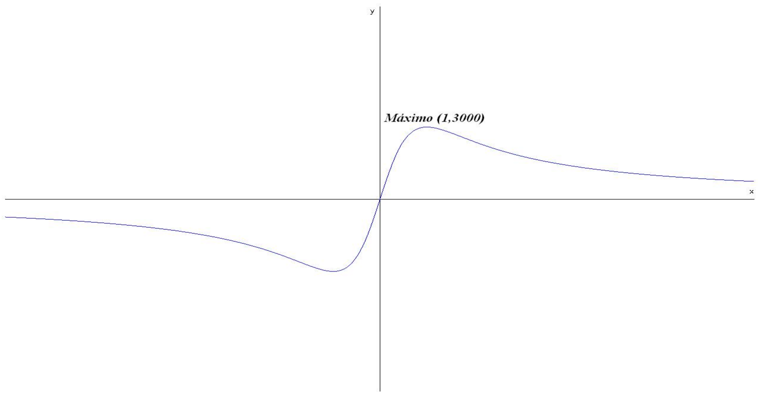
$$I'(x) = \frac{6000(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$I'(x)$	$-$	$+$	$-$
$I(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función presenta un máximo en el punto de abcisa $x = 1$ lo que supone un ingreso máximo: $I(1) = 3000$ euros.

c) Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{6000x}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$
- Oblicuas: No hay al haber horizontales.



Problema 12.2.3 *(2 puntos)* En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0,2. Entre los habitantes que siguen una dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0,3. Se elige al azar un habitante de la población.

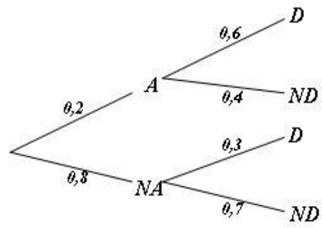
a) Calcúlese la probabilidad de que practique deporte regularmente.

b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?

Solución:

a) $P(D) = 0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0{,}3 = 0,36$

b)
$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,36} = 0{,}333$$



Problema 12.2.4 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica $\sigma = 2$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25 y se obtiene una media muestral igual a 12.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para estimar la media de la variable aleatoria.

b) Determínese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 0,1 con un nivel de confianza de al menos el 95 %.

Solución:

a) $N(\mu, 2)$, $n = 25$, $\overline{X} = 12$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (11,342; 12,658)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 1536,64$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 1537$

12.3. Junio 2011 - Opción A

Problema 12.3.1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z = & a \\ & ay+ & z = & 1 \\ ax+ & y+ & az = & a \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resúelvase el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $a = 3$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a & a \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a^2(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas, luego en estos casos el sitema es compatible determinado.

Si a=1:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene dos filas iguales, claramente el sistema es compatible indeterminado.

Si a=0:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

El Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A})$ por lo que el sistema es incompatible

b) Cuando $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 1 \\ & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) Cuando $a = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & y+ & z = & 3 \\ & 3y+ & z = & 1 \\ 3x+ & y+ & 3z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 8/9 \\ y = 1/3 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 12.3.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2}$

a) Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados. Determínense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.

c) Calcúlese la integral definida $\int_2^3 f(x)\,dx$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{\pm\sqrt{2}\}$y el único punto de corte es $(0,0)$.

Asíntotas:

- Verticales: $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$

$$\lim_{x\longrightarrow -\sqrt{2}^-} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow \sqrt{2}^-} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow \sqrt{2}^+} \frac{3x}{x^2-2} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x}{x^2-2} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f(1) = -3$ $f'(x) = -\dfrac{3(x^2+2)}{(x^2-2)^2} \Longrightarrow f'(1) = -9$

$$y + 3 = -9(x-1) \Longrightarrow 9x + y - 6 = 0$$

c)

$$\int_2^3 \frac{3x}{x^2-2}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2-2|\bigg]_2^3 = \frac{3}{2}\ln\frac{7}{2} = 1,879$$

Problema 12.3.3 *(2 puntos)* En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0,4, de molinos eólicos con probabilidad 0,26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

a) por alguna de las dos instalaciones,

b) solamente por una de las dos.

Solución:

Sean los sucesos A: energía solar y B: energía eólica

$$P(A) = 0,4, \quad P(B) = 0,26$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,54.$

b)

$$P(\text{sólo uno}) = P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B) = P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B) = 0,42$$

Problema 12.3.4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 5 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver TV es de 3 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de μ sea menor o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) $N(\mu, 15)$, $n = 400$, $\overline{X} = 180$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (178,53; 181,47)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 7,51$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 8$

12.4. Junio 2011 - Opción B

Problema 12.4.1 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de k para los cuales la matriz A no es invertible.

b) Para $k = 0$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.

c) Para $k = 0$, resuélvase la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ \ k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Si existe A^{-1}.

b) Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 12.4.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \\ \dfrac{x^2 - b}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese a, b para que f sea continua y derivable en $x = -1$

b) Para $a = 1$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el valor b para que $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx = 6$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \\ \dfrac{x^2 - b}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{x^2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

Por la continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1-} \frac{a}{x} = -a$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1+} \frac{x^2 - b}{4} = \frac{1 - b}{4}$$

$$-a = \frac{1 - b}{4} \Longrightarrow 4a - b = -1$$

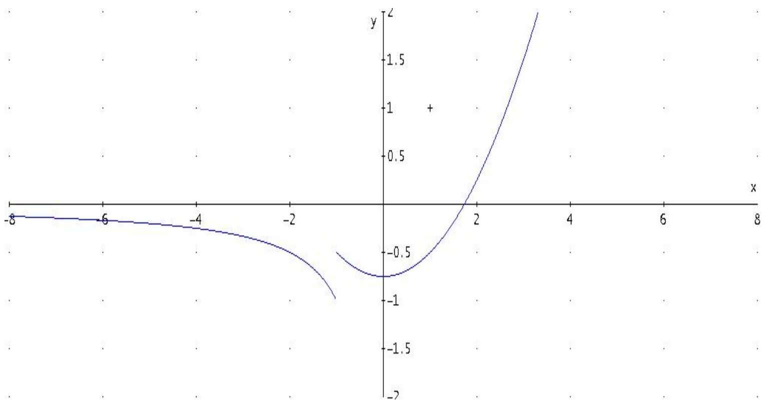
Por la derivabilidad en $x = -1$:

$$f'(-1^-) = -a, \quad f'(-1^+) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Luego $b = 3$ y $a = 1/2$.

b) Para $a = 1$, $b = 3$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \\ \dfrac{x^2 - 3}{4} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$



c)

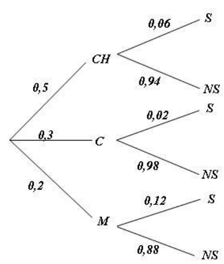
$$\int_0^3 \frac{x^2 - b}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - bx \right) \Bigg]_0^3 = \frac{1}{4}(9 - 3b) = 6 \Longrightarrow b = -5$$

Problema 12.4.3 *(2 puntos)* En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0,5, de que sea un camión es 0,3 y de que sea una motocicleta es 0,2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0,06 para un coche, 0,02 para un camión y 0,12 para una motocicleta. En un momento dado, un vehículo pasa por el radar.

a) Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida.

b) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida,¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta?

Solución:



a) $P(S) = 0,5 \cdot 0,06 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,12 = 0,06$

b)
$$P(M|S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)} = \frac{0,2 \cdot 0,12}{0,06} = 0,46$$

Problema 12.4.4 *(2 puntos)* Se supone que el precio (en euros) de un refresco se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,09. Se toma una muestra aleatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resulta:

$$1,50; \quad 1,60; \quad 1,10; \quad 0,90; \quad 1,00; \quad 1,60; \quad 1,40; \quad 0,90; \quad 1,30; \quad 1,20$$

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestral y la μ sea menor o igual que 0,10 euros con probabilidad mayor o igual que 0,99.

Solución:

a) $N(\mu; 0{,}09)$, $n = 10$, $\overline{X} = 1{,}25$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1{,}194; 1{,}306)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 5{,}37$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 6$

12.5. Septiembre 2011 - Opción A

Problema 12.5.1 *(3 puntos).* Se considera la región S acotada plana definida por las cinco condiciones siguientes:

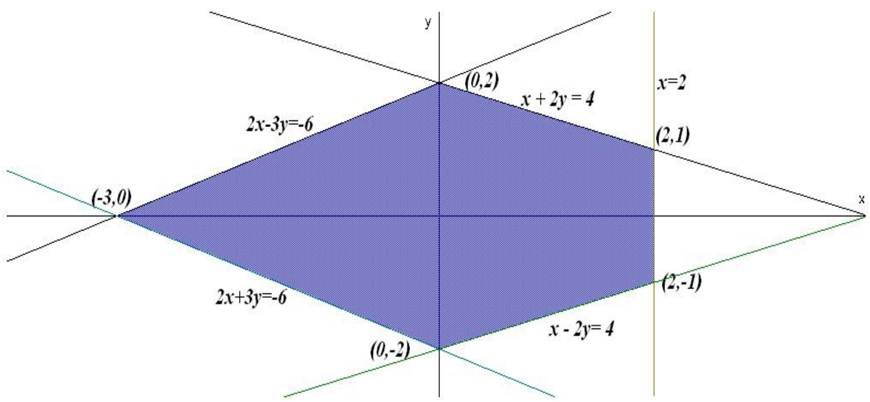
$$x + 2y \leq 4; \;\; x - 2y \leq 4; \;\; 2x - 3y \geq -6; \;\; 2x + 3y \geq -6; \;\; x \leq 2$$

a) Dibújese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S y especifíquense los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S sería:



b) $f(x,y) = 2x + y$:

$$\begin{cases} f(-3,0) = -6 \\ f(0,2) = 2 \\ f(0,-2) = -2 \\ f(2,1) = 5 \\ f(2,-1) = 3 \end{cases}$$

El valor mínimo se encuentra en el punto $(-3,0)$ vale -6. El valor máximo se encuentra en el punto $(2,1)$ y vale 5.

Problema 12.5.2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta horizontal $y = 1$, la recta vertical $x = 1$.

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$:

- Asíntotas verticales no hay ya que el denominador no se anula nunca. Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

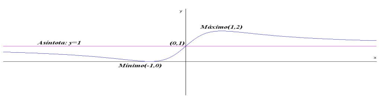
  Oblicuas no hay al haber horizontales.

- $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

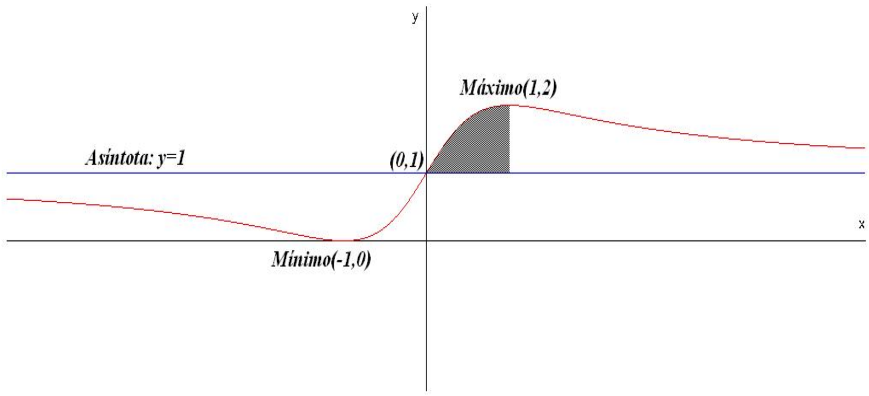
  La función presenta un mínimo en el punto $(-1,0)$ y un máximo en el punto $(1,2)$.

b) La función tiene un punto de corte con los ejes en $(0,1)$:



c)

$$S = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 \right) dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln|x^2+1|\Big]_0^1 = \ln 2 \;\; u^2$$



Problema 12.5.3 *(2 puntos).* Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0,49 y la probabilidad de que nazca un niño es 0,51. Una familia tiene dos hijos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

Solución:

a) V_1: el primer hijo es niño, V_2: el segundo hijo es niño. M_1: el primer hijo es niña, M_2: el segundo hijo es niña.

$$P(V_1 \cap V_2 | V_2) = \frac{P(V_1 \cap V_2 \cap V_2)}{P(V_2)} = \frac{0,51 \cdot 0,51}{0,51} = 0,51$$

b) Si el suceso A es al menos un niño y el B es dos niños tendremos que $A \cap B = B$ y

$$P(A) = 1 - P(M_1 \cap M_2) = 1 - 0,49^2 = 0,7599$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0,51^2}{0,7599} = 0,342$$

Problema 12.5.4 *(2 puntos).* Se supone que la presión diastólica en una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 98 mm y desviación típica 15 mm. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 9.

a) Calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 100 mm.

b) Si se sabe que la media muestral es mayor que 100 mm, ¿cuál es la probabilidad de que sea también menor que 104 mm?

Solución:

$$N(98;15)\quad n=9\Longrightarrow\ \overline{X}\equiv N(98;5)$$

a) $P(\overline{X}\ge 100)=P\left(\frac{\overline{X}-98}{5}\ge\frac{100-98}{5}\right)=P\left(Z\ge\frac{2}{5}\right)=1-P(Z\le 0,4)=$ $1-0,6554=0,3446$

b) Sea $A=\{\overline{X}\le 104\}$ y sea $B=\{\overline{X}\ge 100\}$:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(100\le\overline{X}\le 104)}{P(\overline{X}\ge 100)}=\frac{P(0,40\le Z\le 1,2)}{P(Z\ge 0,40)}=$$

$$\frac{P(Z\le 1,2)-P(Z\le 0,40)}{1-P(Z\le 0,40)}=\frac{0,8849-0,6554}{1-0,6554}=\frac{0,2295}{0,3446}=0,6659$$

12.6. Septiembre 2011 - Opción B

Problema 12.6.1 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&a\\1&b\end{pmatrix};\ I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\ O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

a) Calcúlense a, b para que se verifique la igualdad $AB=BA$.

b) Calcúlense c, d para que se verifique la igualdad $A^2+cA+dI=O$.

c) Calcúlense todas las soluciones del sistema lineal:

$$(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&a\\1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a\\1&b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\2&a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a\\b&b\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=2\end{array}\right.$$

b) $A^2 + cA + dI = O$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ c+1 & c+d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -1 \\ d = 0 \end{array} \right.$$

c)

$$(A-I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 12.6.2 *(3 puntos).* Se considera un rectángulo R de lados x, y.

a) Si el perímetro de R es igual a 12 m, calcúlense x, y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.

b) Si el área de R es igual a 36 m^2 , calcúlense x, y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

Solución:

a) El perímetro $2x + 2y = 12 \Longrightarrow x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Hay que optimizar la función $S(x, y) = x \cdot y \Longrightarrow S(x) = x(6 - x) = -x^2 + 6x$:

$$S'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego la función presenta un máximo en $x = 3\,m$, luego $y = 3\,m$ lo que corresponde a un área de $9\,m^2$.

b) Ahora sabemos que $R = x \cdot y = 36 \Longrightarrow y = 36/x$ y queremos optimizar el perímetro $P(x, y) = 2x + 2y \Longrightarrow P(x) = 2x + 72/x$:

$$P(x) = \frac{2x^2 + 72}{x} \Longrightarrow P'(x) = \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 6$$

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 6)$	$(6, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

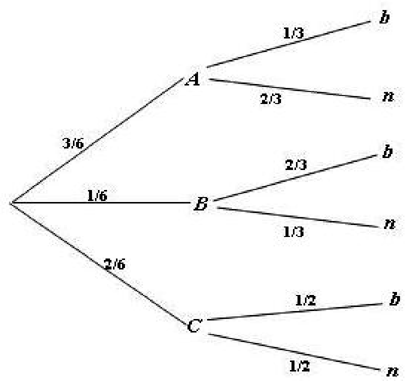
Luego la función presenta un mínimo en $x = 6\,m$ y, por tanto, $y = 6\,m$.

Problema 12.6.3 *(2 puntos).* Se dispone de tres urnas, A, B y C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A, si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

b) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

Solución:



a)
$$P(b) = \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9} = 0,444$$

b)
$$P(C|b) = \frac{P(b|C)P(C)}{P(b)} = \frac{1/2\cdot 1/3}{0,444} = 0,375$$

Problema 12.6.4 *(2 puntos).* Para determinar el coeficiente de inteligencia θ de una persona se le hace contestar un conjunto de tests y se obtiene la media de sus puntuaciones. Se supone que la calificación de cada test se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media θ y desviación típica 10.

a) Para una muestra aleatoria simple de 9 tests, se ha obtenido una media muestral igual a 110. Determínese un intervalo de confianza para θ al 95 %.

b) ¿Cuál es el número mínimo de tests que debería realizar la persona para que el valor absoluto del error en la estimación de su coeficiente de inteligencia sea menor o igual que 5, con el mismo nivel de confianza?

Solución:

a) $N(\theta, 10)$, $n = 9$, $\overline{X} = 110$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (103,467; 116,534)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 15,3664$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 16$

12.7. Septiembre 2011 (Reserva)- Opción A

Problema 12.7.1 *(3 puntos).* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} 4x + 3y + 5z = 5 \\ x + y + 3z = 1 \\ 2x + ay + (a^2 - 2)z = 3 \end{array}\right.$$

a) Escríbase el sistema en forma matricial.

b) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

c) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2 - 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 3 \end{array}\right)$$

b)

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & a^2 - 2 \end{array}\right| = a^2 - 7a + 6 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = 6$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 6 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD. Sistema compatible determinado.
- Si $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \ F_3 = F_1 - 2F_2 \Longrightarrow \text{SCI}$$

El sistema es compatible indeterminado.

- Si $a = 6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 34 & 3 \end{array} \right) \text{ y } \left| \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{array} \right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{SI}$$

El sistema es incompatible.

c)

$$\left\{ \begin{array}{c} 4x + 3y + 5z = 5 \\ x + y + 3z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 4\lambda \\ y = -1 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 12.7.2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = 2(x-1)^2(x+3)$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcúlense sus extremos relativos.

b) Calcúlense los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Solución:

a)

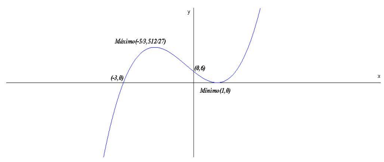
$$f'(x) = 2(x-1)(3x+5) = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -5/3$$

	$(-\infty, -5/3)$	$(-5/3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5/3) \cup (1, \infty)$ y es decreciente en $(-5/3, 1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(-5/3, 512/27)$ y un mínimo en $(1, 0)$.

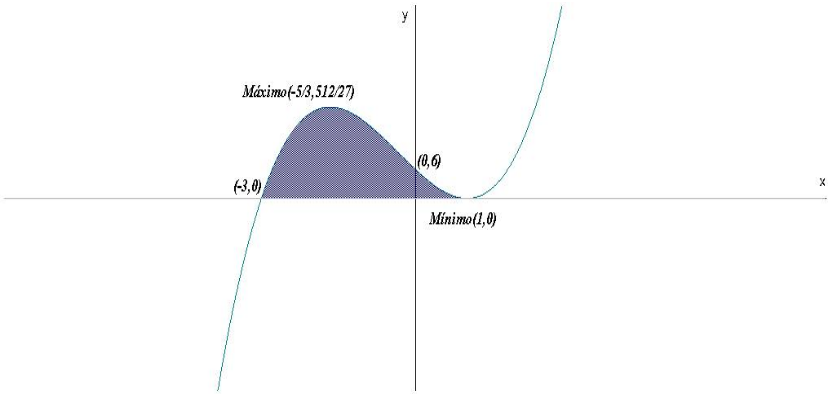
b) Para $x = 0 \Longrightarrow (0, 6)$ y para $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0), \;\; (-3, 0)$



c)

$$\int_{-3}^{1} 2(x-1)^2(x+3)\,dx = \int_{-3}^{1} (2x^3+2x^2-10x+6)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-5x^2+6x\right]_{-3}^{1} = \frac{128}{3}\,u^2$$



Problema 12.7.3 *(2 puntos).* La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a $7/9$, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es $5/7$. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos.

a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple.

b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.

Solución:

$$P(A)=\frac{7}{9},\quad P(\overline{A})=\frac{2}{9},\quad P(B)=\frac{5}{7},\quad P(\overline{B})=\frac{2}{7}$$

a)

$$P(\text{sólo uno}) = P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B) = \frac{7}{9}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{7} = \frac{8}{21} = 0,381$$

b)

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{7}{9}+\frac{5}{7}-\frac{7}{9}\cdot\frac{5}{7} = \frac{59}{63} = 0,937$$

Problema 12.7.4 *(2 puntos).* Se supone que la altura (en cm) que alcanza la espuma de un cierto detergente para lavadoras durante un lavado estándar se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1,5 cm. Una muestra aleatoria simple de 10 lavados de ese tipo ha dado las siguientes alturas de espuma:

$$7;\quad 4;\quad 4;\quad 5;\quad 7;\quad 6;\quad 2;\quad 8;\quad 6;\quad 1$$

a) Determínese un intervalo de confianza del 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el valor absoluto del error máximo en la estimación sea de 0,5 cm con el mismo nivel de confianza?

Solución:

$$N(\mu; 1,5),\quad n = 10\ \ \overline{X} = 5$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4,22; 5,78)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,645 \cdot 1,5}{0,5}\right)^2 = 24,354 \Longrightarrow n = 25$$

12.8. Septiembre 2011 (Reserva)- Opción B

Problema 12.8.1 *(3 puntos).* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A^{-1}A^T$.- **Nota**.- La notación A^T representa a la matriz transpuesta de A.

b) Resuélvase la ecuación matricial: $\dfrac{1}{4}A^2 - AX = B$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)$$

$$\frac{1}{4}A^2 - B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 12.8.2 *(3 puntos).* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si} \quad x \le 1/2 \\ bx + c & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

Calcúlense los valores de a, b, c para que f satisfaga todas las condiciones siguientes:

- $a > 0$
- La función f es continua y derivable en $x = 1/2$.
- El valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = -2$, $x = 0$, es igual a $32/3$.

Solución:

- Por la continuidad en $x = 1/2$:

$$\lim_{x\longrightarrow (1/2)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (1/2)^-} ax^2 = \frac{a}{4}$$

$$\lim_{x\longrightarrow (1/2)^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow (1/2)^+} (bx + c) = \frac{b}{2} + c$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{2} + c \Longrightarrow a - 2b - 4c = 0$$

- Por la derivabilidad en $x = 1/2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si} \quad x \le 1/2 \\ b & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'((1/2)^-) = a \\ f'((1/2)^+) = b \end{cases} \Longrightarrow a = b$$

- Por el área:

$$\int_{-2}^{0} ax^2\,dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{8a}{3} = \frac{32}{3} \Longrightarrow a = 4$$

Luego $a = 4$, $b = 4$ y $c = -1$.

Problema 12.8.3 *(2 puntos).* Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
NoApto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto?

b) Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Solución:

	Chico	Chica	Total
Apto	12109	9863	21972
NoApto	1717	1223	2940
Total	13826	11086	24912

$\Longrightarrow$

	Chico	Chica	Total
Apto	$0,486$	$0,396$	$0,882$
NoApto	$0,069$	$0,049$	$0,118$
Total	$0,555$	$0,445$	1

Sean los sucesos V: Chico, M: Chica, A: Apto y $\overline{A}$: No Apto.

a) $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) = 0,445 + 0,882 - 0,396 = 0,931$

b)

$$P(\overline{A}|V) = \frac{P(\overline{A} \cap V)}{P(V)} = \frac{0,069}{0,555} = 0,124$$

Problema 12.8.4 *(2 puntos).* Se supone que la estatura de los individuos de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media 170 cm y desviación típica 4 cm.

a) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple de 16 individuos. Calcúlese $P(\overline{X} < 167)$.

b) Se extrae de dicha población una muestra aleatoria simple y resulta que $P(\overline{X} > 172) = 0,0062$. Determínese el tamaño de la muestra extraída.

Solución:

a) $N(\overline{X}; \sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170; 1)$:

$$P(\overline{X} < 170) = P\left(Z < \frac{167 - 170}{1}\right) =$$

$$P(Z < -3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

b) $N(\overline{X}; \sigma/\sqrt{n}) \equiv N(170; 4/\sqrt{n})$:

$$P(\overline{X} > 172) = P\left(Z > \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}}\right) =$$

$$1 - 0,0062 = 0,9938 \Longrightarrow \frac{172 - 170}{4/\sqrt{n}} = 2,5 \Longrightarrow \sqrt{n} = 5 \Longrightarrow n = 25$$

Capítulo 13

Año 2012

13.1. Modelo 2012 - Opción A

Problema 13.1.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k

$$\begin{cases} x + ky + kz = k \\ x + y + z = k \\ ky + 2z = k \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para k = 4.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k & k \\ 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{array}\right); \ |A| = k^2 - 3k + 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right); \ F_1 = F_2 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b)

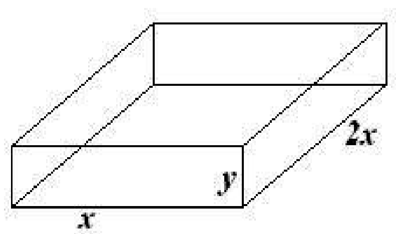
$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{c} x + 4y + 4z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ 4y + 2z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

Problema 13.1.2 *(3 puntos)* Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 cm^3 de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, anchura, altura) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

Solución:



$$V = 2x^2y = 9000 \Longrightarrow y = \frac{4500}{x^2}$$

$$S(x,y) = 4x^2 + 6xy \Longrightarrow S(x) = 4x^2 + \frac{27000}{x} = \frac{4x^3 + 27000}{x}$$

$$S'(x) = \frac{8x^3 - 27000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 15$$

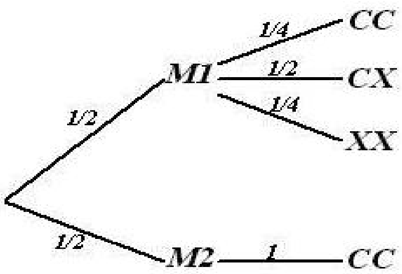
Comprobamos que es un mínimo por la segunda derivada

$$S''(x) = \frac{8(x^3 + 6750)}{x^3} \Longrightarrow S''(15) = 24 > 0$$

Luego se trata de un mínimo en $x = 15$. Las cajas tendrán de dimensiones: $15\,cm$ de ancho, $30\,cm$ de largo y $20\,cm$ de alto.

Problema 13.1.3 *(2 puntos)* Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?

Solución:



$$P(CC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}, \quad P(CC|M2) = 1$$

$$P(M2|CC) = \frac{P(CC|M2)P(M2)}{P(CC)} = \frac{4}{5}$$

Problema 13.1.4 *(2 puntos)* Se supone que la concentración de CO_2 en el aire de una determinada región, medida en partes por millón (ppm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 20 ppm.

a) Calcúlese el número mínimo de observaciones necesarias para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la población y la media muestral sea menor o igual que 2 ppm con un nivel de confianza mayor o igual que el 95 %.

b) Determínese un intervalo de confianza del 95 % para la concentración media de CO_2 en el aire de la región si la muestra elegida contiene 121 observaciones y la concentración media muestral es igual a 350 ppm. CO_2

Solución:

a) Tenemos $E = 2$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 384,16$$

Luego $n = 385$.

b) Tenemos $\overline{x} = 350$, $\sigma = 20$, $n = 121$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (346{,}436, 353{,}564)$$

13.2. Modelo 2012 - Opción B

Problema 13.2.1 *(3 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Para $a = 2$, calcúlese la matriz $B = (A^{-1}A^T)^2$.

c) Para $a = 2$, calcúlese la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$AX - A^2 = A^T$$

Nota.- A^T representa a la matriz traspuesta de A.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 3 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

Si $a = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $a \neq \pm\sqrt{3} \Longrightarrow \exists\, A^{-1}$.

b) Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

c) Con $a = 2$:

$$AX - A^2 = A^T \Longrightarrow X = A^{-1}(A^T + A^2)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 \right] = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Problema 13.2.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} & x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} & 0 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si} & x > 3 \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b y c, para que la función f sea continua en todos los puntos y derivable en $x = 0$.

b) Para $a = 0$, calcúlense b, c, para que la función f sea continua en todos los puntos y calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

c) Para $a = b = 1$, $c = 2$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

Solución:

a) f continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = c \Longrightarrow c = 2$$

f continua en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 9a + 3b + c, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 0 \Longrightarrow 9a + 3b + c = 0$$

f derivable en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} & x < 0 \\ 2ax + b & \text{si} & 0 \le x \le 3 \\ -1 & \text{si} & x > 3 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 2, \;\; f'(0^+) = b \Longrightarrow b = 2$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -8/9 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

b) Si $a = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ bx + c & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

f continua en $x = 0$:

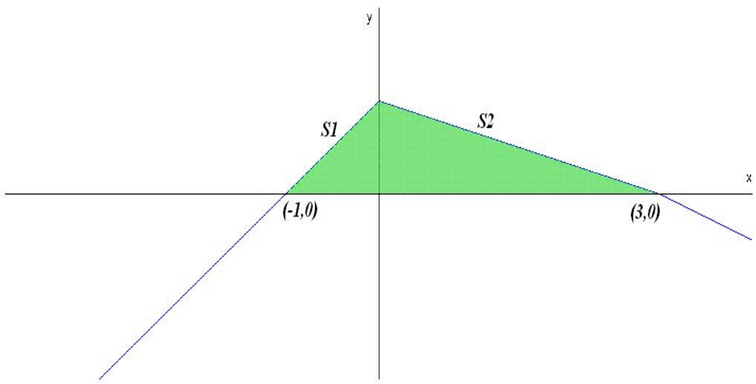
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = c \Longrightarrow c = 2$$

f continua en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 3b + c, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 0 \Longrightarrow 3b + c = 0$$

Luego $b = -2/3$ y $c = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2/3x + 2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$



$$S_1 = \int_{-1}^{0} (2x + 2)\, dx = \left. x^2 + 2x \right]_{-1}^{0} = 1$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} (-\frac{2}{3}x + 2)\, dx = \left. -\frac{x^2}{3} + 2x \right]_{0}^{3} = 3$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4\ u^2$$

c) Si $a = b = 1$, $c = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 3 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (2x + 2)\, dx + \int_{0}^{3} (x^2 + x + 2)\, dx =$$

$$x^2+2x\Big]_{-1}^{0}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\Big]_0^3=1+\frac{39}{2}=\frac{41}{2}$$

Problema 13.2.3 *(2 puntos)* Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre – benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

Solución:

a)
$$P(\text{iniciación})=\frac{200}{480}=\frac{5}{12}$$

b)
$$P(\text{perfeccionamiento}\cup\text{alevín})=\frac{280}{480}+\frac{160}{480}-\frac{150}{480}=\frac{29}{48}$$

c)
$$P(\text{perfeccionamiento}|\text{benjamín})=\frac{9}{16}$$

d)
$$P(\text{benjamín}|\text{iniciación})=\frac{7}{20}$$

Problema 13.2.4 *(2 puntos)* Se supone que la tensión de un tipo de línea eléctrica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu=100V$ y desviación típica $\sigma=10V$. ¿Cuál es la distribución de la tensión media de cuatro líneas eléctricas de ese tipo, tomadas al azar y con independencia?

Solución:

$$\overline{X} \approx N\left(\overline{X}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(100, \frac{10}{\sqrt{4}}\right) = N(100, 5)$$

13.3. Junio 2012 - Opción A

Problema 13.3.1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & 7z = & 4a-1 \\ x+ & (1+a)y- & (a+6)z = & 3a+1 \\ & ay- & 6z = & 3a-2 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema en el caso a = -3.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array}\right);\ |A| = a^2 - a - 6 = 0 \Longrightarrow a = 3,\ a = -2$$

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array}\right);\ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $a=-2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right);\ |A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})<$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-4z=-5 \\ 2y-6z=-8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda \\ y=4-3\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

c) $a=-3$

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y-7z=-13 \\ x-2y-3z=-8 \\ -3y-6z=-11 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4/3 \\ y=7/3 \\ z=2/3 \end{array}\right.$$

Problema 13.3.2 *(3 puntos)* Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

Solución:

x: N$^{\text{o}}$ de copas que debemos añadir. La producción vendrá dada por la siguiente función:

$$f(x)=(16-0,01x)(1200+x)=-0,01x^2+4x+19200$$

$$f'(x)=-0,02x+4=0 \Longrightarrow x=200$$

$$f''(x)=-0,02 \Longrightarrow f''(200)<0 \Longrightarrow \text{ en } x=200 \text{ hay un máximo}$$

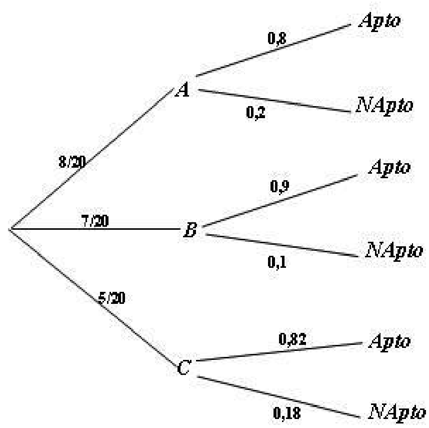
Luego hay que añadir 200 cepas.

Problema 13.3.3 *(2 puntos)* En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

Solución:



a)
$$P(Apto) = \frac{8}{50} \cdot 0,8 + \frac{7}{20} \cdot 0,9 + \frac{5}{20} \cdot 0,82 = 0,84$$

b) $P(NApto) = 1 - P(Apto) = 0,16$

$$P(B|NApto) = \frac{P(NApto|B)P(B)}{P(NApto)} = \frac{7}{32} = 0,21875$$

Problema 13.3.4 *(2 puntos)* Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día del curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

$$26 \quad 27,5 \quad 31 \quad 28 \quad 25,5 \quad 30,5 \quad 32 \quad 31,5.$$

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97 %.

Solución:

a) Tenemos $n = 8$, $\overline{X} = 29$, $\sigma = 2,8$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (27{,}372; 30{,}628)$$

b) Tenemos $E = 0{,}9$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}17$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 45{,}577$$

Luego $n = 46$.

13.4. Junio 2012 - Opción B

Problema 13.4.1 *(3 puntos)* Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.

c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 72000 \\ \dfrac{x+y}{13} = \dfrac{z}{3} \\ x + 6500 = y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 72000 \\ 3x + 3y - 13z = 0 \\ x - y = -6500 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 26000 \\ y = 32500 \\ z = 13500 \end{array}\right.$$

Problema 13.4.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 - 4x + 3 & \text{si} & x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY, y la recta $x = 2$.

Solución:

a) f continua en $x = 1$:

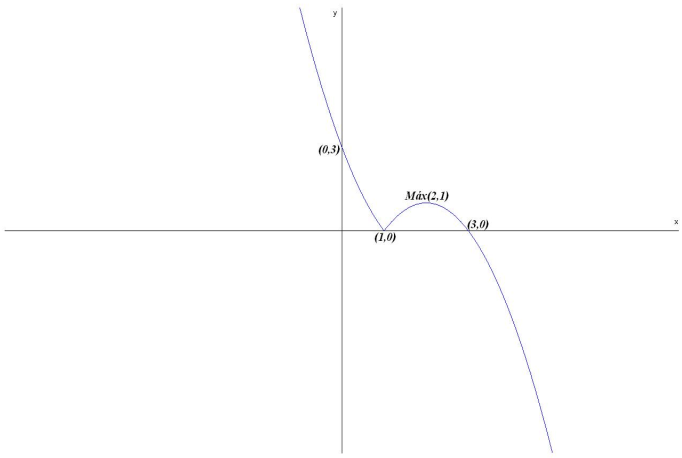
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(0) = 0$$

f no es derivable en $x = 1$:

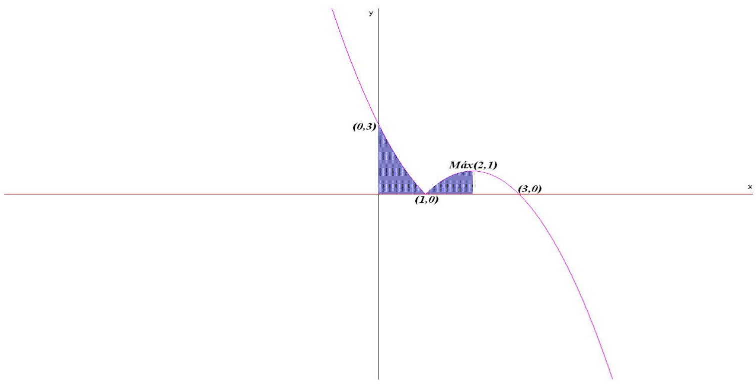
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x + 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = 2 \end{cases} \Longrightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Luego f no es derivable en $x = 1$.

b) Representación:



c) Área:



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\bigg]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2\ u^2$$

Problema 13.4.3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6 \quad P(A|B) = 0,5$$

Calcúlense:

a) $P(B)$.

b) $P(A \cup B)$.

c) $P(A)$.

d) $P(\overline{B}|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

Solución:

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

b)

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,6$$

$$P(A \cup B) = 0,4$$

c)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow$$

$$P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3$$

d)

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0,6}{0,7} = 0,86$$

Problema 13.4.4 *(2 puntos)* Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (251,6 ; 271,2) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) $N(\mu, 45)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = (251{,}6; 271{,}2) = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 251{,}6 \\ \overline{X} + E = 271{,}2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 261{,}4 \\ E = 9{,}8 \end{array} \right.$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 81$$

b) $n = 64$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}253$$

13.5. Junio 2012(coincidente) - Opción A

Problema 13.5.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{array} \right)$, $X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right)$ y $B = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right)$, se pide:

a) Para $k = 4$, calcúlese el determinante de la matriz $3A^2$.

b) Para $k = 2$, calcúlese (si existe) la matriz inversa A^{-1}.

c) Discútase la existencia de solución del sistema lineal $AX = B$ según los diferentes valores del parámetro k.

Solución:

$$|A| = 2k - 6$$

a) Si $k = 4$: $|3A^2| = 3^3 \cdot |A|^2 = 108$

b) Si $k = 2$:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} -3 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 4 & -1/2 & -1 \end{array} \right)$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & k & 1 \end{array} \right), \ |A| = 2k - 6 = 0 \Longrightarrow k = 3$$

- Si $k \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $k = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right), \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

En este caso Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema en Incompatible.

Problema 13.5.2 *(3 puntos)*) Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{4-2x}{x^2}$.

a) Determínense los máximos y mínimos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Hállense los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de f.

c) Determínense las asíntotas y los puntos de corte con los ejes. Esbócese la gráfica de f.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2x-8}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(0, 4)$.

Hoy un mínimo local en el punto $(4, -1)$.

b)

$$f''(x) = \frac{24 - 4x}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 6$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	convexa	cóncava

La función es convexa en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$ y es cóncava en el intervalo $(6, \infty)$.

Hay un punto de inflexión en el punto $(6, -2/9)$.

c)
- Puntos de corte: Con el eje de ordenadas no hay y con el eje de abcisas $4 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 2$, se trata del punto $(2, 0)$.
- Asíntotas:

a) Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{4 - 2x}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

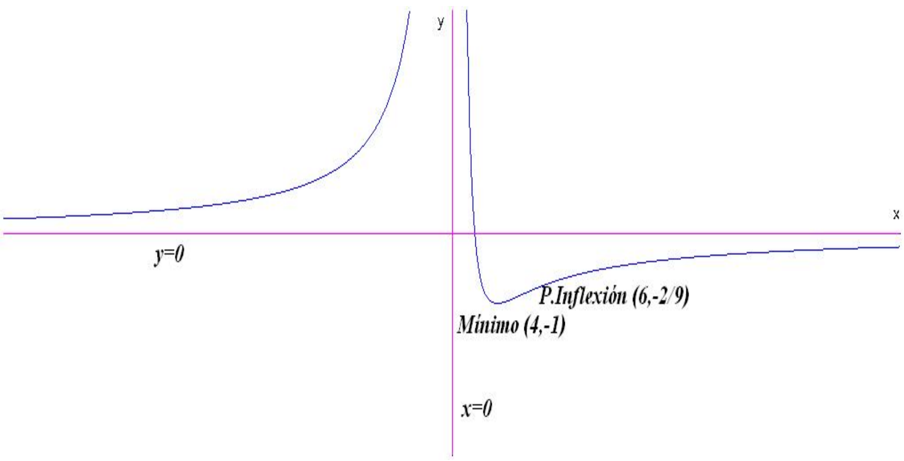
$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{4 - 2x}{x^2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

b) Verticales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{4 - 2x}{x^2} = 0$$

c) Oblicuas no hay por haber horizontales.

d) Representación gráfica:



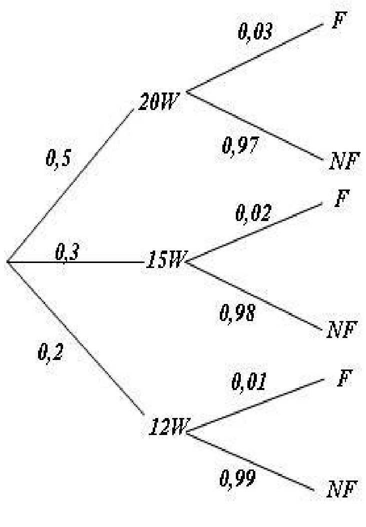
Problema 13.5.3 *(2 puntos)* Una ferretería tiene en su almacén bombillas de bajo consumo: 500 bombillas de 20 W, 300 de 15 W y 200 de 12 W. Los controles de calidad realizados por la empresa que fabrica las bombillas han permitido determinar las probabilidades de fallo de cada tipo de producto durante la primera hora de encendido, siendo de 0,03 para las bombillas de 20 W, de 0,02 para las de 15 W y de 0,01 para las bombillas de 12 W.

a) Se elige al azar una bombilla del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo durante la primera hora de encendido?

b) Se somete al control de calidad una bombilla del almacén elegida al azar y falla en su primera hora de encendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bombilla de 20 W?

Solución:

$$P(20W) = 0,5, \;\; P(15W) = 0,3, \;\; P(12W) = 0,2$$



a)

$$P(F) = P(20W)P(F|20W)+P(15W)P(F|15W)+P(12W)P(F|12W) =$$

$$0,5 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,01 = 0,023$$

b)

$$P(20W|F) = \frac{P(F|20W)P(20W)}{P(F)} = \frac{0,03 \cdot 0,5}{0,023} = 0,652$$

Problema 13.5.4 *(2 puntos)* El consumo anual de carne en un cierto país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal con desviación típica 16 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 residentes y se obtiene un consumo medio de 42 kg de carne al año. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el consumo anual medio de carne en dicho país.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener la muestra para garantizar, con el mismo nivel de confianza, que el error de la estimación del consumo anual medio sea menor que 1 kg?

Solución:

a) Tenemos $n = 64$, $\overline{X} = 42$, $\sigma = 16$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (38{,}71; 45{,}29)$$

b) Tenemos $E = 1$, $\sigma = 16$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 692{,}34$$

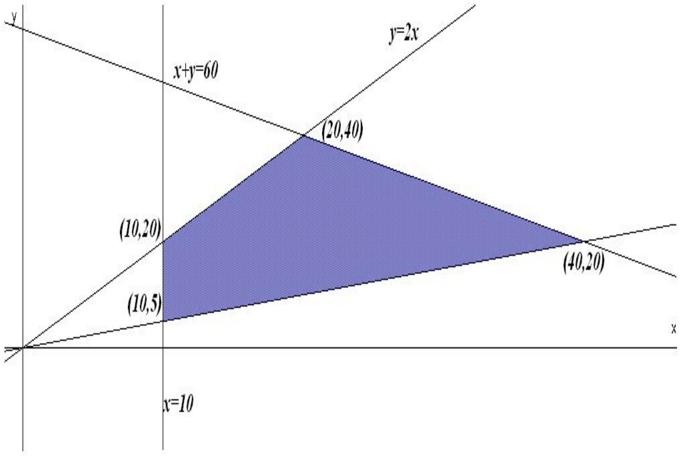
Luego $n = 693$.

13.6. Junio 2012(coincidente) - Opción B

Problema 13.6.1 *(3 puntos)* Una compañía aérea oferta hasta un máximo de 60 plazas en sus vuelos diarios entre Madrid y Lisboa. Las plazas de clase turista se ofrecen a 40 euros, mientras que las de primera clase tienen un precio de venta de 75 euros. Por normativa internacional, el número de plazas ofertadas de primera clase debe ser inferior o igual al doble de las plazas de clase turista y superior o igual a la mitad de las plazas de dicha clase turista. Además, por motivos de estrategia empresarial, la compañía tiene que ofrecer como mínimo 10 plazas de clase turista.
¿Qué número de plazas de cada clase se deben ofertar diariamente con el objetivo de maximizar los ingresos de la aerolínea? Determínese dicho ingreso máximo.

Solución:

Sean: x : plazas en clase turista. y : plazas en primera clase. Hay que



maximizar $z(x,y) = 40x + 75y$ sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} y \le 2x \\ y \ge x/2 \\ x + y \le 60 \\ x \ge 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(20,40) = 3800 \\ z(40,20) = 3100 \\ z(10,5) = 775 \\ z(10,20) = 1900 \end{cases}$$

El ingreso máximo se obtiene ofreciendo 20 plazas de turista y 40 de primera clase, con un total de 3800 euros.

Problema 13.6.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = ax^2 - \frac{b}{x}$$

a) Hállense los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = 1$ tenga como ecuación $y = 3x - 2$.

b) Hállense los valores de a y b para que la función f tenga en (1,0) un punto de inflexión.

c) Hállense los valores de a y b de manera que f no tenga asíntotas y $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 1$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - \frac{b}{x}, \quad f'(x) = 2ax + \frac{b}{x^2}, \quad f''(x) = 2a - \frac{2b}{x^3}$$

a)

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow a - b = 1 \\ f'(1) = 3 \Longrightarrow 2a + b = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4/3 \\ b = 1/3 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow a - b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 2a - 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow a = b$$

c) Para que no tenga asíntotas: $b = 0$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 ax^2dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right]_0^1 = \frac{a}{3} = 1 \Longrightarrow a = 3$$

Problema 13.6.3 *(2 puntos)* Los 30 alumnos de una Escuela de Idiomas estudian obligatoriamente Inglés y Francés. En las pruebas finales de estas materias se han obtenido los siguientes resultados: 18 han aprobado Inglés, 14 han aprobado Francés y 6 han aprobado los dos idiomas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya aprobado ni Inglés ni Francés?

b) Se elige un estudiante al azar de entre los aprobados de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Inglés?

Solución:

LLamamos I al suceso aprobar inglés y F al de aprobar francés.

$$P(I) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}, \quad P(F) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}, \quad P(I \cap F) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

a)

$$P(\overline{I} \cap \overline{F}) = P(\overline{I \cup F}) = 1 - (P(I) + P(F) - P(I \cap F)) = \frac{1}{15} = 0,133$$

b)

$$P(I|F) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = \frac{3}{7} = 0,428$$

Problema 13.6.4 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media en una muestra aleatoria simple de tamaño 100 elementos.

a) Determínese el valor de σ sabiendo que $I = (125,2; 144,8)$ es un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcúlese la probabilidad $P(1 < \mu - \overline{X} < 4)$.

Solución:

a) $N(\mu, \sigma)$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, $E = \dfrac{144{,}8 - 125{,}2}{2} = 9{,}8$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 9{,}8 = 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{100}} \Longrightarrow \sigma = 50$$

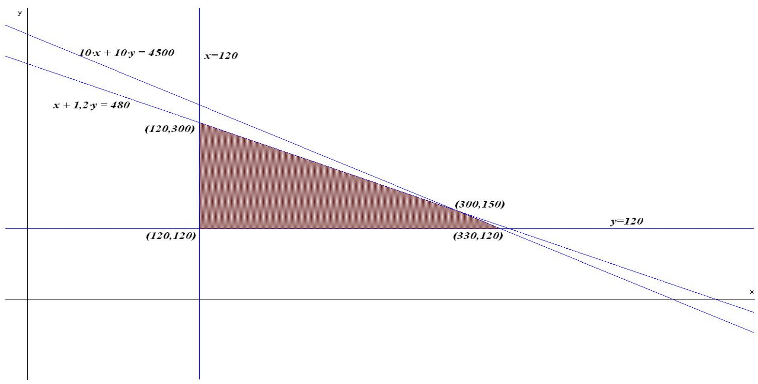
b) $P(1 < \mu - \overline{X} < 4) = P(0,5 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0{,}5) = 0,286$

13.7. Septiembre 2012 - Opción A

Problema 13.7.1 *(3 puntos)* Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de 3 m^2 por litro, con un coste de 1 euro por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de 4 m^2 por litro, con un coste de 1,2 euros por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480 euros y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura. Determínese la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.

Solución:

LLamamos x al nº de litros de pintura del primer tipo e y al nº de litros de pintura del segundo tipo.



Función objetivo: $z(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + 1,2y \le 480 \\ 10x + 10y \le 4500 \\ x, y \ge 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(120,120) = 840 \\ z(120,300) = 1560 \\ z(300,150) = 1500 \\ z(330,120) = 1470 \end{cases}$$

La cantidad óptima a utilizar sería: 120 litros de pintura del primer tipo y 300 de pintura del segundo tipo 2. Podrían pintarse 1560 m^2.

Problema 13.7.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x(2x-1)}{x-1}$.

a) Determínense las asíntotas de f . Calcúlense los extremos relativos de f .

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x(2x-1)}{x^2-x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x(2x-1)}{x-1} - 2x\right) = 1$$

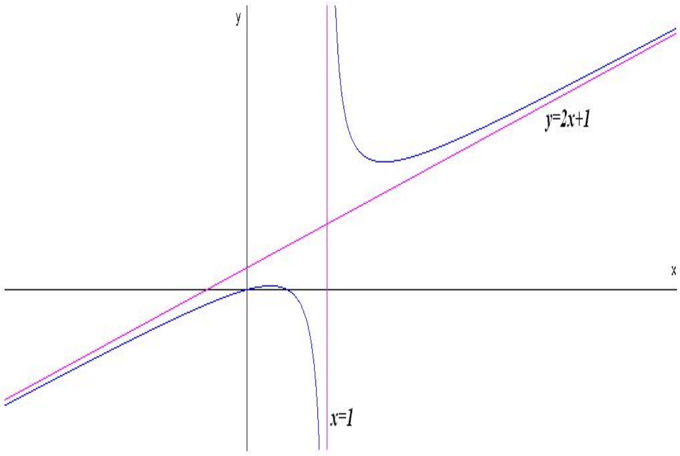
$$y = 2x + 1$$

Extremos:

$$f'(x) = \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \Longrightarrow \begin{cases} f''(x_1) > 0 \Longrightarrow \text{en } x_1 \text{ hay un mínimo} \\ f''(x_2) < 0 \Longrightarrow \text{en } x_1 \text{ hay un máximo} \end{cases}$$

b) Representación gráfica:



c) $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx = \int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \ln|x^2-x|\Big]_2^5 = \ln 10.$

Problema 13.7.3 *(2 puntos)* Se dispone de cinco cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada préviamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

a) Calcúlese la probabilidad de que el jugador gane.

b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

Solución:

Para que un jugador gane pueden ocurrir los siguientes sucesos: B, NB y NNB.

a)

$$P(Ganar) = P(B) + P(NB) + P(NNB) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b)

$$P(una\ caja|Perder) = \frac{P(Perder \cap una\ caja)}{P(Perder)} = \frac{2/5}{2/3} = \frac{3}{5}$$

Problema 13.7.4 *(2 puntos)* La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

a) Tenemos $n = 100$, $\overline{X} = 48000$, $\sigma = 3000$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (47506{,}5; 48493{,}5)$$

b) Tenemos $E = 1000$, $\sigma = 3000$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 34{,}577$$

Luego $n = 35$.

13.8. Septiembre 2012 - Opción B

Problema 13.8.1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 2 \\ x+ & ky+ & 2z = & 5 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema para $k = 0$.

c) Resuélvase el sistema para $k = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 & 5 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = -k^2 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

b) $k = 0$

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ x + 2z = 5 \\ y + z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

c) $k = 2$

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 13.8.2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{rcl} ax + b & \text{si} & x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) Calcúlense los valores de a y b para los que la función f es continua y derivable.

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en los puntos en los que dicha tangente es paralela a la recta $y - 8x = 1$.

c) Sea g la función real de variable real definida por $g(x) = 1 - 2x^2$. Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f y la gráfica de g.

Solución:

a) f continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^3 - x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \Longrightarrow a + b = 1$$

f no es derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = a \\ f'(1^+) = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$$

Luego $a = 1$ y $b = 0$.

b) $y - 8x = 1 \Longrightarrow y = 8x - 1 \Longrightarrow m = 8$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Las soluciones estarán cuando $x > 1 \Longrightarrow 3x^2 - 2x = 8 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -4/3$, esta última solución no es válida, y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 5)$. La ecuación de la recta tangente a la función f es $y - 5 = 8(x - 2)$.

c)

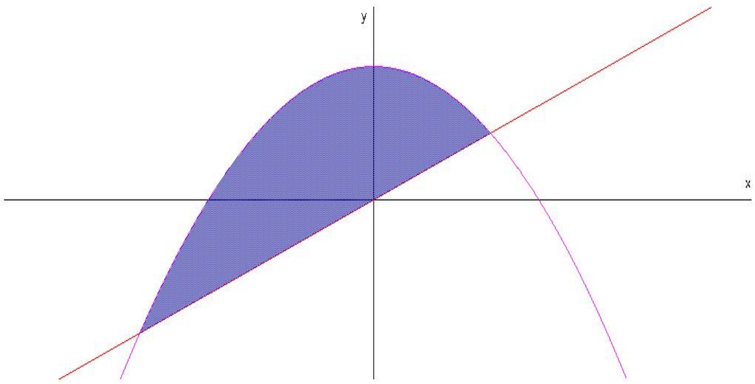
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 = 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^3 + x^2 = 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1, \ x = 1/2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x = 0, \ x = -1 & \text{si} \quad x > 1 \text{ No valen} \end{cases}$$

d)

$$S = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)dx)\, dx = -\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \Big]_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8}\, u^2$$



Problema 13.8.3 *(2 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B tales que:

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B|A) = \frac{1}{4} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Calcúlese razonadamente:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(B)$.

c) $P(\overline{B}|A)$.

d) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

Solución:

a)
$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b)
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

c)
$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4}$$

d)
$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{2}{3}$$

Problema 13.8.4 *(2 puntos)* El tiempo de espera para ser atendido en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación tipica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamano 121.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea mayor que 0,5 minutos.

b) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ, si la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Solución:

a)

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq 5) = P(|Z| \geq \frac{5}{3/11}) = 2(1 - P(Z \leq 1{,}83)) = 0{,}0672$$

b) $N(\mu, 3)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}5345454545 \quad IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6{,}465; 7{,}535)$$

Capítulo 14

Año 2013

14.1. Modelo 2013 - Opción A

Problema 14.1.1 *(2 puntos)* Discútase el sistema siguiente en función del parámetro $a \in R$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x- & y & & = & a \\ x+ & & az & = & 0 \\ 2x- & y+ & a^2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & -1 & a^2 & 1 \end{array}\right); \ |A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

- Si $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

  Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right); \ F_3 = F_1 + F_2 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

Problema 14.1.2 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x+1}$

a) Hállense sus asíntotas horizontales, verticales y oblícuas.

b) Hállense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a)
- Verticales: $x = -1$:

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{3x^2-5}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{3x^2-5}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2-5}{x+1} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx - n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2-5}{x^2+x} = 3$$

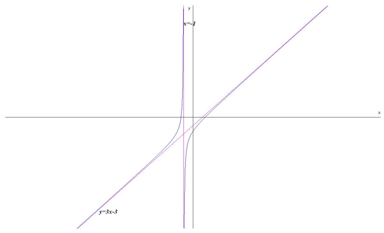
$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-5}{x+1} - 3x\right) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{-3x-5}{x+1} = -3$$

$$y = 3x - 3$$

b)
- Puntos de corte:
  Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -5)$
  Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-\sqrt{5/3}, 0)$ y $(\sqrt{5/3}, 0)$
- Curvatura:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 5(x+1)^2 \neq 0 \Longrightarrow \text{no hay extremos}$$

Como $f'(x) > 0$ siempre podemos asegurar que la función es creciente en todo el dominio $R - \{0\}$.



Problema 14.1.3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 5 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de la función en R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución:

a)
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (-x^2 - 3x + 5) = 1$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} x^2 = 1$$

Luego la función es continua en $x = 1$ por ser iguales los límites laterales y además $f(1) = 1$.

b)
$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2 - 3x + 5)\,dx + \int_1^2 x^2\,dx =$$
$$\left.\frac{-x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x\right]_0^1 + \left.\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{19}{6} + \frac{7}{3} = \frac{11}{2}$$

Problema 14.1.4 *(2 puntos)* Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0,01, de que lo sea uno fabricado en B es 0,02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0,03. En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C.

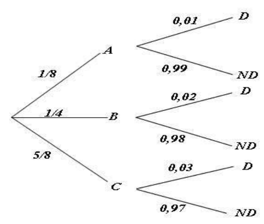
a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

Solución:

$$P(D|A) = 0,01, \quad P(D|B) = 0,02, \quad P(D|C) = 0,03$$

$$P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{75}{120} = \frac{5}{8}$$



a)

$$P(ND) = \frac{1}{8} \cdot 0,99 + \frac{1}{4} \cdot 0,98 + \frac{5}{8} \cdot 0,97 = 0,975$$

b)

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}02 \cdot 0,25}{1 - 0,975} = 0,2$$

Problema 14.1.5 *(2 puntos)* El peso en gramos del contenido de las cajas de cereales de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 5 gramos. Se toma una muestra de tamaño 144.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor de 1 gramo.

b) Si la media muestral obtenida es igual a 499,5 gramos, determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de ese tipo de cajas de cereales.

Solución:

a) Tenemos $E = 1$, $\sigma = 5$ y $n = 144$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = 2{,}4$$

$$P(Z < 2{,}4) = 0{,}9918$$

b) Tenemos $\overline{x} = 499{,}5$, $\sigma = 5$, $n = 144$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (498{,}8146, 500{,}1854)$$

14.2. Modelo 2013 - Opción B

Problema 14.2.1 *(2 puntos)*

a) Determínense los valores de a y b para que la función objetivo $F(x, y) = 3x + y$ alcance su valor máximo en el punto $(6, 3)$ de la región factible definida por

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + ay \leq 3 \\ 2x + y \leq b \end{cases}$$

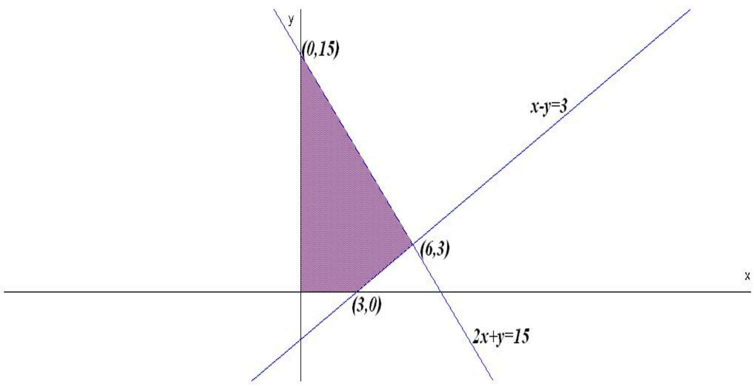
b) Represéntese la región factible para esos valores y calcúlense las coordenadas de todos sus vértices.

Solución:

a)

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + y = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6 + 3a = 3 \\ 12 + 3 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 15 \end{cases}$$

b) Representación:



$$\begin{cases} F(3, 0) = 9 \\ F(0, 15) = 15 \\ F(6, 3) = 21 \text{ Máximo} \end{cases}$$

Problema 14.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Obténgase A^{2007}.

b) Hállese la matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Longrightarrow A^n \left\{ \begin{array}{lr} A \;\; \text{si} & n \text{ es impar} \\ I \;\; \text{si} & n \text{ es par} \end{array} \right. \Longrightarrow A^{2007} = A$$

b) $A \cdot B = C \Longrightarrow B = A^{-1}C$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 5 & 1 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 14.2.3 *(2 puntos)* El coste de fabricación de una serie de hornos microondas viene dado por la función $C(x) = x^2 + 40x + 30000$; donde x representa el número de hornos fabricados. Supongamos que cada horno se vende por 490 euros.

a) Determínese la función de beneficios.

b) ¿Cuántos microondas deben fabricarse y venderse para que los beneficios sean máximos? ¿Cuál es el importe de esos beneficios máximos?

Solución:

a) Si llamamos x al número de hornos vendidos la función beneficio será:

$$B(x) = 490x - (x^2 + 40x + 30000) = -x^2 + 450x - 30000$$

b)

$$B'(x) = -2x + 450 = 0 \Longrightarrow x = 225$$

$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(225) = -2 < 0 \Longrightarrow$ en $x = 225$ hay un máximo. El beneficio máximo se obtiene al venderse 225 hornos y sería de $B(225) = 20625$ euros.

Problema 14.2.4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(\overline{B}) = \frac{3}{4}, \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

a) Determínese si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B.

b) Determínese si son dependientes o independientes los sucesos A y B.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{12} \neq 0 \Longrightarrow$ los sucesos A y B son compatibles.

b) $P(A\cap B) = \dfrac{1}{12} \neq P(A)\cdot P(B) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} \Longrightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

Problema 14.2.5 *(2 puntos)* La altura de los árboles de una determinada comarca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y varianza 25 cm. Se toma una muestra aleatoria simple y, para un nivel de confianza del 95 %, se construye un intervalo de confianza para la media poblacional cuya amplitud es de 2,45 cm.

a) Determínese el tamaño de la muestra seleccionada.

b) Determínese el límite superior y el inferior del intervalo de confianza si la altura media para la muestra seleccionada fue de 170 cm.

Solución:

$$N(\mu, 5);\quad z_{\alpha/2} = 1{,}96;\quad E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq \left(\frac{1{,}96\cdot 5}{1{,}225}\right)^2 = 64 \Longrightarrow n = 64$$

b) Tenemos $\overline{x} = 170$, $E = 1{,}225$ y $n = 144$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (168{,}775; 171{,}225)$$

14.3. Junio 2013 - Opción A

Problema 14.3.1 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese A^{-1}

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 14.3.2 *(2 puntos)* Se desea maximizar la función $f(x, y) = 64,8x + 76,5y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$6x + 5y \leq 700, \;\; 2x + 3y \leq 300, \;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0$$

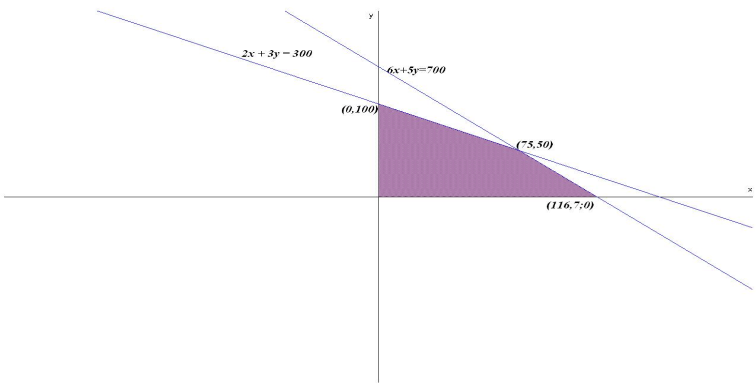
a) Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de f sobre la región, indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.

Solución:

$$f(x, y) = 64,8x + 76,5y \text{ sujeto a: } \left\{ \begin{array}{l} 6x + 5y \leq 700 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{array} \right.$$

Representación:



$$\left\{ \begin{array}{l} f(0, 100) = 7650 \\ f(116, 7; 0) = 7560 \\ f(75, 50) = 8685 \;\; \text{Máximo} \end{array} \right.$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(75, 50)$ con un valor de 8685.

Problema 14.3.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 3e^{-2x}$

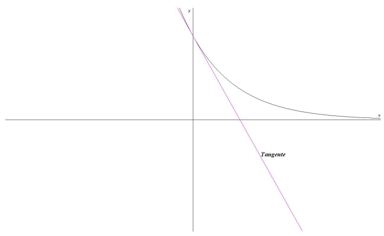
a) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 0$

b) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$, $x = 0,5$ y el eje de abcisas.

Solución:

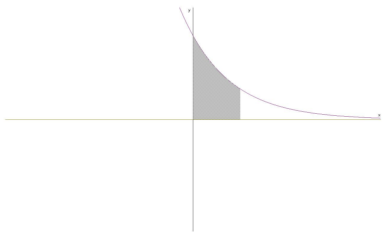
a) $f'(x) = -6e^{-2x} \Longrightarrow f'(0) = -6$ y $f(0) = 3 \Longrightarrow$

$$y - 3 = -6x \Longrightarrow 6x + y - 3 = 0$$



b)

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} (3e^{-2x}\,dx = -\frac{3}{2}e^{-2x}\Big]_0^{1/2} = \frac{3(e-1)}{2e} = 0,948\,u^2$$



Problema 14.3.4 *(2 puntos)* Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Solución:
$D \equiv$ deportistas, $L \equiv$ lectores.

$$P(D \cup L) = 0,55, \quad P(D) = 0,4, \quad P(L) = 0,3$$

a) $P(D\cup L) = P(D)+P(L)-P(D\cap L) \Longrightarrow P(D\cap L) = P(D)+P(L)-P(D \cup L) = 0,4 + 0,3 - 0,55 = 0,15$
$P(D \cap \overline{L}) = P(D) - P(D \cap L) = 0,4 - 0,15 = 0,25$

b)
$$P(D|L) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

Problema 14.3.5 *(2 puntos)* El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3,5 Mb y una desviación típica igual a 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 24.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior de 3,37 Mb?.

b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de 3,42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población.

Solución:

$$N(3{,}5; 1{,}4), \quad n = 24 \longrightarrow N\left(3{,}5; \frac{1{,}4}{\sqrt{24}}\right) = N(3{,}5; 0{,}28)$$

a)

$$P(\overline{X} < 3{,}37) = P\left(Z < \frac{3{,}37 - 3{,}5}{0{,}28}\right) = P(Z < -0{,}46) = 1 - P(Z < 0{,}46) = 0{,}3228$$

b) $N(\mu, 1{,}4)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\overline{X} = 3{,}42$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,56$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2{,}86; 3{,}98)$$

14.4. Junio 2013 - Opción B

Problema 14.4.1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax- & 2y & & = & 2 \\ 3x- & y- & z = & & -1 \\ x+ & 3y+ & z = & & 1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 2a + 8 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

a) Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

b) Si $a = -4$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

c) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} ax- & 2y & & = & 2 \\ 3x- & y- & z = & & -1 \\ x+ & 3y+ & z = & & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2/5 \\ y = -4/5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 14.4.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f en $x = 0$ para los distintos valores del parámetro a.

b) Determínense las asíntotas de la función.

Solución:

a)
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} e^x = 1$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \frac{a}{3}$$
Luego la función es continua en $x=0$ si $a/3=1 \Longrightarrow a=3$.
Si $a\neq 3$ hay una discontinuidad no evitable:
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)$$

b) Asíntotas:
Si $x<0$:

- Verticales: No hay
- Horizontales: $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^x = 0 \Longrightarrow y=0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales

Si $x\geq 0$:

- Verticales: $x^2-4x+3=0 \Longrightarrow x=1,\ \ x=3$
  - $x=1$: pueden ocurrir que $a=-3$ o $a\neq -3$.
    - $a=-3$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.
    $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-3+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$
    - $a\neq -3$: Si hay asíntota
    $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \pm\infty$$
  - Si $x=3$ pueden ocurrir que $a=-9$ o $a\neq -9$.
    - Si $a=-9$: No hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable.
    $$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{-9+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$
    - Si $a\neq -9$: Si hay asíntota:
    $$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \pm\infty$$

- Horizontales: $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{a+3x}{x^2-4x+3} = 0 \Longrightarrow y = 0$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales

Problema 14.4.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x(5-x)^2$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Solución:

a) $f'(x) = (x-5)(3x-5) = 0 \Longrightarrow x = 5, \ \ x = \dfrac{5}{3}$

	$(-\infty, 5/3)$	$(5/3, 5)$	$(5, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

f es creciente en el intervalo $(-\infty, 5/3) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(5/3, 5)$. Presenta un máximo en $x = 5/3$ y un mínimo en $x = 5$.

b) $f''(x) = 6x - 20 = 0 \Longrightarrow x = 10/3$

	$(-\infty, 10/3)$	$(10/3, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

f es convexa en el intervalo $(-\infty, 10/3)$ y cóncava en $(5, +\infty)$. Presenta un punto de inflexión en $x = 10/3$.

Problema 14.4.4 *(2 puntos)* Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al satre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

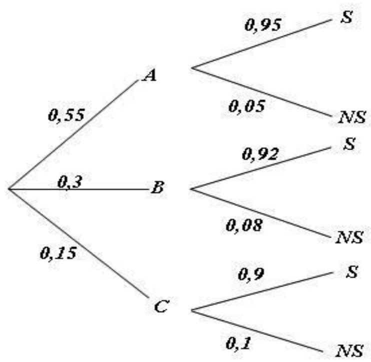
a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A

Solución:

a) $P(NS) = 0,55 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,08 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,0665$

b) $P(A|NS) = \dfrac{P(NS|A)}{P(NS} = \dfrac{0,05 \cdot 0,55}{0,0665} = 0,4135$



Problema 14.4.5 *(2 puntos)* La duración en horas de un determinado tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\overline{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 h?

b) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada $\overline{X}$ es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ.

Solución:

$$N(\mu, 1940); \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96; \quad E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1445{,}82 \Longrightarrow n = 1446$$

b) $n = 225$, $\overline{X} = 12415$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 212{,}75 \Longrightarrow IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (12202{,}25; 12627{,}75)$$

14.5. Septiembre 2013 - Opción A

Problema 14.5.1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese la matriz inversa de A

b) Resuélvase la ecuación matricial $A\cdot X = B - I$; donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$AX = B-I \Longrightarrow X = A^{-1}(B-I) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

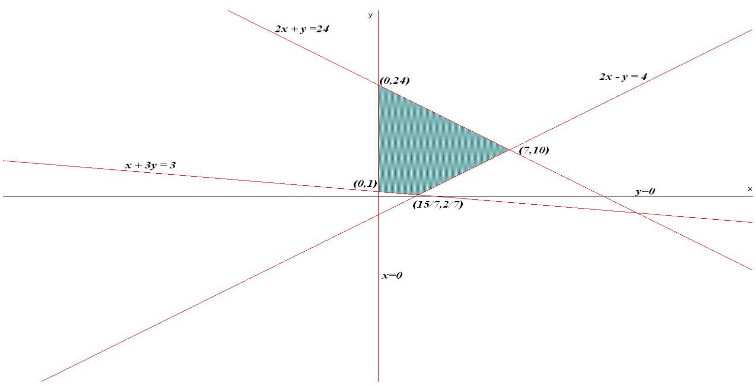
Problema 14.5.2 *(2 puntos)* Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el punto de C donde la función $f(x, y) = 3x + y$ alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.

Solución:
Representación:



$$f(x, y) = 3x + y \text{ sujeto a: } \begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0,1) = 1 \\ f(0,24) = 24 \\ f(7,10) = 31 \text{ Máximo} \\ f(15/7, 2/7) = 47/7 \end{cases}$$

El máximo, dentro de la región en estudio, se encuentra en el punto $(7,10)$ con un valor de 31.

Problema 14.5.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

a) Hállense las asíntotas de f.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:

$$x = 3 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{27}{0^+}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{27}{0^-}\right] = -\infty$$

$$x = -3 \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{-27}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \left[\frac{-27}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x^3-9x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x\right) = 0$$

b)

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{13}{32}; \quad f(1) = -\frac{1}{8}$$

La recta tangente en su ecuación punto pendiente es:

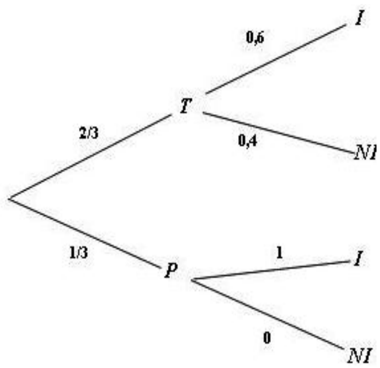
$$y + \frac{1}{8} = -\frac{13}{32}(x-1)$$

Problema 14.5.4 *(2 puntos)* En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

Solución:



a) $P(I) = \dfrac{2}{3}\cdot 0,6 + \dfrac{1}{3}\cdot 1 = 0,733$

b)

$$P(T|I) = \frac{P(I|T)P(T)}{P(I)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0,6}{0,733} = 0,54$$

Problema 14.5.5 *(2 puntos)* El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1,75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0,02 años con un nivel de confianza del 90 % .

Solución:

$$N(\mu; 0,4)$$

a) $n = 49$, $\overline{X} = 1,75 \longrightarrow N\left(1,75; \frac{0{,}4}{7}\right) = N(1,75; 0{,}057)$

$$NC = 0,95 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,0392 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (1,7108; 1,7892)$$

b) $N(\mu, 1{,}4)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\overline{X} = 3{,}42$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,02 = 1{,}645\frac{0,4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n > 1082,41$$

$$n = 1083$$

14.6. Septiembre 2013 - Opción B

Problema 14.6.1 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro k :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} kx+ & y & & = & 0 \\ x+ & ky- & 2z & = & 1 \\ kx- & 3y+ & kz & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema para $k = 1$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & -2 & 1 \\ k & -3 & k & 0 \end{array}\right); \; |A| = k(k^2 - 9) = 0 \Longrightarrow k = 0; \; k = \pm 3$$

a) Si $k \neq 0$ y $k \neq \pm 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).

b) Si $k = 0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right); \; |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -3F_1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incognitas y se trata de un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

c) Si $k = 3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

d) Si $k = -3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{rr} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{array}\right| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right| = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

e) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & & = 0 \\ x+ & y- & 2z = & 1 \\ x- & 3y+ & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/8 \\ y = -1/8 \\ z = -1/2 \end{array}\right.$$

Problema 14.6.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} ax^2 - 3 & \text{si} & x \leq 1 \\ & & \\ \ln(2x - 1) & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) Calcúlese a para que la función f sea continua en todo R:

b) Represéntese gráficamente la función para el caso $a = 3$.

Nota: lnx denota al logaritmo neperiano del número x.

Solución:

a)

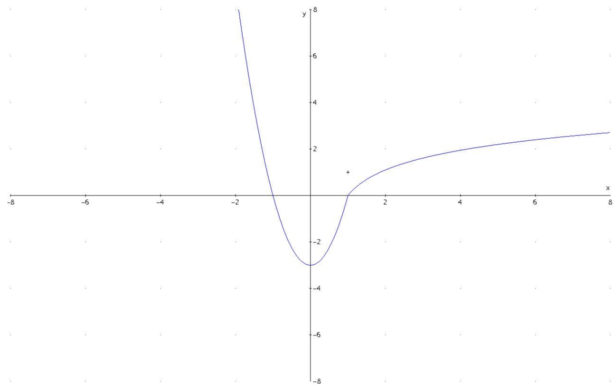
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 3) = a - 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \ln(2x - 1) = 0$$

Luego la función es continua en $x = 1$ si $a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \\ \ln(2x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



Problema 14.6.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

a) Determínense los extremos relativos de f.

b) Calcúlese la integral definida $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

f es decreciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y creciente en $(-2,2)$. Presenta un máximo en $(2,1/4)$ y un mínimo en $(-2,-1/4)$.

b)

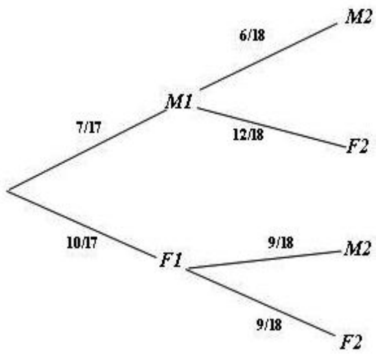
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\sqrt{\frac{5}{4}}$$

Problema 14.6.4 *(2 puntos)* Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

Solución:



a) $P(F2) = \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{18} = \frac{29}{51} = 0,569$

b) $P(mismo\ sabor) = P(M1, M2) + P(F1, F2) = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{18} = \frac{22}{51} = 0,43$

Problema 14.6.5 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22.

b) Determínese un intervalo de confianza del 99 % para μ, si la media muestral es igual a 1532.

Solución:

$$N(\mu, 210); \quad n = 64$$

a)

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq 22) = P\left(\frac{|\overline{X} - \mu|}{210/8} \geq \frac{22}{210/8}\right) =$$

$$2P(Z \geq 0,84) = 2(1 - P(Z \leq 0,84)) = 2(1 - 0,7995) = 0,401$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 67,59 \Longrightarrow IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (1464,41; 1599,59)$$

Capítulo 15

Año 2014

15.1. Modelo 2014 - Opción A

Problema 15.1.1 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Hállense los valores de a y b para los que se cumple $A + B + AB = C$.

b) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 2$, determínese la matriz X que verifica $BX - A = I$; donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4b \\ -a & ab - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = -1, \; b = 1$$

b) Si $a = 1$ y $b = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$BX - A = I \Longrightarrow X = B^{-1}(I + A)$

$$I + A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

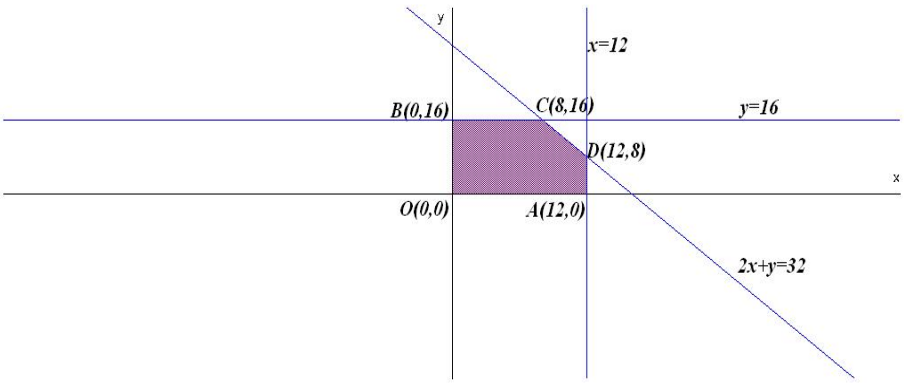
Problema 15.1.2 *(2 puntos)* Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:
LLamamos x : al nº de pesqueros e y al nº de yates.

$$z(x, y) = 50000x + 10000y$$

sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} 100x + 50y \leq 1600 \\ x \leq 12 \\ y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y \leq 32 \\ x \leq 12 \\ y \leq 16 \\ x, y \geq 0 \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} z(12, 0) = 600000 \\ z(0, 16) = 160000 \\ z(12, 8) = 680000 \text{ Máximo} \\ z(8, 16) = 560000 \end{array}\right.$$

Hay que reparar 12 pesqueros y 8 yates para que el ingreso sea máximo con un montante de 680000 euros.

Problema 15.1.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{-4}{x+2} - 1 & \text{si} & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$$

a) Determínense las asíntotas de la función y los puntos de corte con los ejes.

b) Calcúlese $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Solución:

a) Asíntotas:

- Si $x \le 0$: En $x = -2$ hay una vertical

  $$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{-x-6}{x+2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

  En $y = -1$ hay una horizontal

  $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x-6}{x+2} = -1$$

- Si $x > 0$: No hay una verticales y en $y = 0$ hay una horizontal

  $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Puntos de Corte:

- Si $x \le 0 \Longrightarrow (0, -3)\ \ (-6, 0)$
- Si $x > 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de corte

b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{-4}{x+2} - 1\right) dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$-4\ln|x+2| - x]_{-1}^{0} + \ln|x+1|]_{0}^{1} = -1 - 3\ln 2$$

Problema 15.1.4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que la probabilidad de que no ocurra B es 0,6. Si el suceso B ocurre, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra es de 0,4 y si el suceso A ocurre, la probabilidad de que el suceso B ocurra es 0,25. Calcúlense:

a)$P(B)$, b)$P(A \cap B)$, c)$P(A)$, d)$P(A \cup B)$

Solución:

$$P(\overline{B}) = 0,6, \quad P(A|B) = 0,4, \quad P(B|A) = 0,25$$

$$P(A) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}, \quad P(B) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}, \quad P(C) = \frac{75}{120} = \frac{5}{8}$$

a) $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0,4$

b) $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$

c) $P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B|A)} = \dfrac{0{,}16}{0,25} = 0,64$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,64 + 0,4 - 0,16 = 0,88$

Problema 15.1.5 *(2 puntos)* El contenido en alquitrán de una determinada marca de cigarrillos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 4 mg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 22 mg. Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el contenido medio de alquitrán en un cigarrillo de la citada marca.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mg, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 22$, $\sigma = 5$, $n = 20$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (20,528; 23,471)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{4}{\sqrt{20}} = 1,4713$$

b) $E = 0,5$, $\sigma = 5$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$0,5 = 1,645\frac{5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 173,18$$

Luego $n = 174$.

15.2. Modelo 2014 - Opción B

Problema 15.2.1 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 6y + z = 0 \\ -x + ay + 4z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & a & 4 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

- Si $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

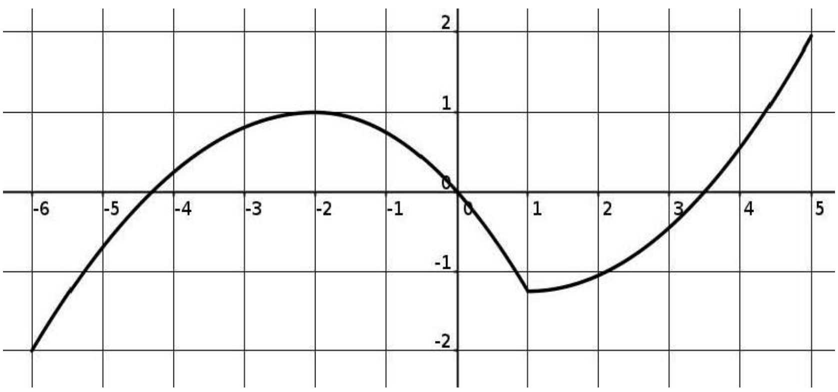
$$|A_1| = |A_2| = 0, \ |A_3| = 8 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 6y + z = 0 \\ -x + 4z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = -8/3 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Problema 15.2.2 *(2 puntos)* La figura representa la gráfica de una función $f : [-2; 5] \longrightarrow R$. Contéstese razonadamente a las preguntas planteadas.



a) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

b) ¿En qué puntos del intervalo $[-6, 5]$ f alcanza sus extremos relativos?

c) ¿Cuál es el signo de $\int_2^4 f(x)dx$?

d) ¿En qué valores de $(-6;5)$ f no es derivable?

Solución:

a) $f'(x) > 0$ en $[-6,-2) \cup (1,5]$.

b) En $x = -2$ hay un máximo relativo, en $x = 1$ hay un mínimo relativo, en $x = -6$ hay un mínimo absoluto y en $x = 5$ hay un máximo absoluto.

c) Es claramente negativo: El área encerrada por la curva y el eje de abcisas entre $x = 2$ y $x \simeq 3,5$ es mayor que el área encerrada por la curva y el eje de abcisas entre $x \simeq 3,5$ y $x = 4$.

d) La función f no es derivable en $x = 1$, en este punto la función hace un pico, y en él se podrían trazar infinitas tangentes. Las derivadas laterales no coincidirían.

Problema 15.2.3 *(2 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 3x - b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determínense los valores de a y b que hacen que f sea continua en $x = 1$ y que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

b) Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 4$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 3$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (2x^2 - ax + 1) = 3 - a \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 3x - b) = 2 - b \end{array} \right. \Longrightarrow a - b = 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) - b = \frac{1}{4} \Longrightarrow b = 2$$

Luego $a = 3$ y $b = 2$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 3x - 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Tenemos $f(3) = -4$, el punto de tangencia es $(3, -4)$. La pendiente de la recta tangente en este punto es $m = f'(3) = -3$. La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

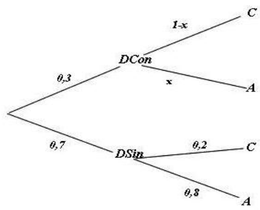
$$y + 4 = -3(x - 3)$$

Problema 15.2.4 *(2 puntos)* En una determinada población, el 30 % de las personas que deciden iniciar una dieta de adelgazamiento utilizan algún tipo de supervisión médica mientras que el 40 % de todas las personas que inician una dieta de adelgazamiento continúan con ella al menos un mes. En esa población, el 80 % de las personas que inician la dieta sin supervisión abandona antes del primer mes.

a) Se escoge al azar a un individuo de esa población del que sabemos que ha iniciado una dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que abandonara antes del primer mes y no hubiera tenido supervisión médica?

b) ¿Qué porcentaje de las personas que inician una dieta con supervisión médica abandona antes del primer mes?

Solución:



a) $P(A \cap DSin) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$

b) $P(C) = 0,4 \Longrightarrow P(A) = 0,6 = 0,3x + 0,7 \cdot 0,8 \Longrightarrow x = 0,1333 \Longrightarrow x = 13,33\,\%$

Problema 15.2.5 *(2 puntos)* El nº de kilómetros recorridos en un día determinado por un conductor de una empresa de transportes se puede aproximar por una variable aleatoria X con una distribución normal de media μ. a) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

a) Se obtuvo una muestra aleatoria simple, con los siguientes resultados:

40 28 41 102 95 33 108 20 64

Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ si la variable aleatoria X tiene una desviación típica igual a 30 km.

b) ¿Cuál sería el error de estimación de μ usando un intervalo de confianza con un nivel del 90 % , construido a partir de una muestra de tamaño 4, si la desviación típica de la variable aleatoria X fuera de 50 km?

Solución:

$$N(\mu, 5); \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96; \quad E = \frac{2{,}45}{2} = 1{,}225$$

a) $n = 9$, $\overline{x} = 59$, $\sigma = 30$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{30}{\sqrt{9}} = 19{,}6$$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (39{,}4, 78{,}6)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645\frac{30}{\sqrt{4}} = 24{,}675$$

15.3. Junio 2014 - Opción A

Problema 15.3.1 *(2 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese $(A^tB)^{-1}$, donde A^t denota a la traspuesta de la matriz A.

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solución:

a)

$$A^tB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ -x = -1 \\ x - 2y = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array} \right.$$

Problema 15.3.2 *(2 puntos)* Se consideran la función $f(x, y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

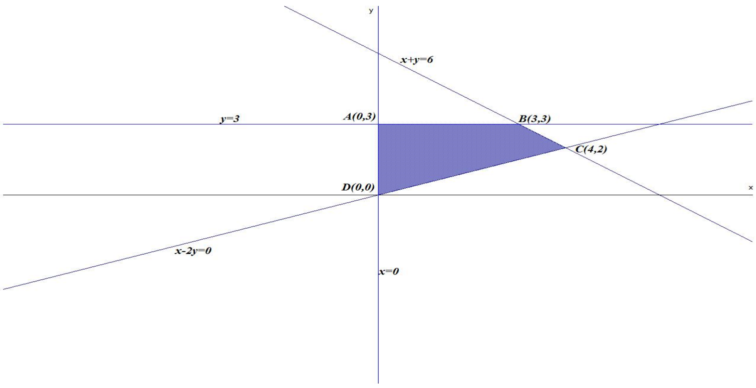
$$x - 2y \le 0, \;\; x + y \le 6, \;\; x \ge 0, \;\; y \le 3$$

a) Represéntese la región S.

b) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

Solución:

a) La región S pedida será:



b)

$$\left\{ \begin{array}{l} z(0,3) = -6 \;\; \text{Mínimo} \\ z(3,3) = 9 \\ z(4,2) = 16 \;\; \text{Máximo} \\ z(0,0) = 0 \end{array} \right.$$

El máximo es de 16 y se alcanza en el punto $C(4, 2)$. El mínimo es de -4 y se alcanza en el punto $A(0, 2)$.

Problema 15.3.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x + a & \text{si} & x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} & 1 \le x \le 3 \\ x + b & \text{si} & x > 3 \end{array} \right.$

a) Determínense a y b para que f sea continua en todo R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (x^2 - 2) = -1$$

$$1 + a = -1 \Longrightarrow a = -2$$

Para que f sea continua en $x = 3$:

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} (x + b) = 3 + b$$

$$7 = 3 + b \Longrightarrow b = 4$$

b)

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^2 - 2\right)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$$

Problema 15.3.4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que: $P(A) = 0,4$; $P(A \cup B) = 0,5$; $P(B|A) = 0,5$. Calcúlense:

a) $P(B)$:

b) $P(A|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a)

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Longrightarrow P(B \cap A) = P(B|A)P(A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) =$$

$$= 0,5 + 0,2 - 0,4 = 0,3$$

b)

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,2}{1 - 0,3} = 0,28$$

Problema 15.3.5 *(2 puntos)* La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 36$, $\sigma = 3$, $n = 48$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (35,151; 36,849)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{3}{\sqrt{48}} = 0,849$$

b) $E = 1$, $\sigma = 3$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$1 = 1,645\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 24,35$$

Luego $n = 25$.

15.4. Junio 2014 - Opción B

Problema 15.4.1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right); \ |A| = 0, \ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = F_2 - F_1 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Como $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) <$ n^{o} de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 15.4.2 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$.

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x - 2$:

$$b = f(1) = -1, \quad m = f'(1) = 4, \Longrightarrow \ y + 1 = 4(x - 1)$$

.

b) $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (4x^3 - 3x^2 - 2x)dx = x^4 - x^3 - x^2 \Big]_2^3 = 41$

Problema 15.4.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-2} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x + 2$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = 2$$

b) $Dom(f) = R - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 4$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(4, 8)$ y un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.

Problema 15.4.4 *(2 puntos)* Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

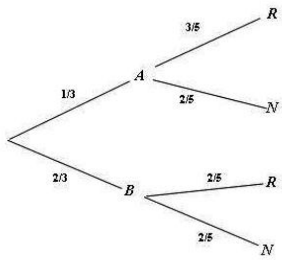
a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

Solución:

a)

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$



b)
$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{3/5 \cdot 1/3}{7/15} = \frac{3}{7}$$

Problema 15.4.5 *(2 puntos)* El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16,33; 19,27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) $(16,33; 19,27) \Longrightarrow \overline{x} = 17,80$, $E = 1,47$ como $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,47 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 16$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $n = 64$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{3}{\sqrt{64}} = 0,735$$

15.5. Septiembre 2014 - Opción A

Problema 15.5.1 *(2 puntos)* Considérese el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & \lambda y+ & z = & -\lambda \\ 4x- & 2\lambda y+ & 2z = & \lambda - 3 \end{array}\right.$$

a) Determínense los valores del parámetro real λ que hacen que el sistema sea incompatible.

b) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda - 3 \end{array} \right) \Longrightarrow |A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda \end{vmatrix} = 0; \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1; \ |A_4| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$|A_5| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda \\ -2\lambda & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 3\lambda(1-\lambda) \Longrightarrow \lambda = 0, \ \ \lambda = 1;$$

$$|A_6| = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - 3 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Si $\lambda \neq 1 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ sistema es incompatible.

Si $\lambda = 1 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 1 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\left\{ \ 2x - y + z = -1 \right. \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = 1 + 2\mu + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 15.5.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-2)}$$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Estudíese si la función f es creciente o decreciente en un entorno de $x = 4$.

Solución:

a) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = 1$$

Oblicuas: No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = \frac{2(x-3)(2x-3)}{(x^2(x-2)^2)} = 0 \Longrightarrow x = 3/2, \ \ x = 3$$

	$(-\infty, 3/2)$	$(3/2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en un entorno de $x = 4$.
Otra manera sería: f es creciente en un entorno $U(x)$ de un punto x si $\forall x_1, x_2 \in U(x)/x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Elegimos dos puntos próximos a $x = 4$ sean $x_1 = 3,9$ por la izquierda y $x_2 = 4,1$ por la derecha. Calculamos $f(x_1) = 0,1093117408$ y $f(x_2) = 0,1405342624$. Como $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente.

Problema 15.5.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$.

a) Esbócese la gráfica de la función f.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

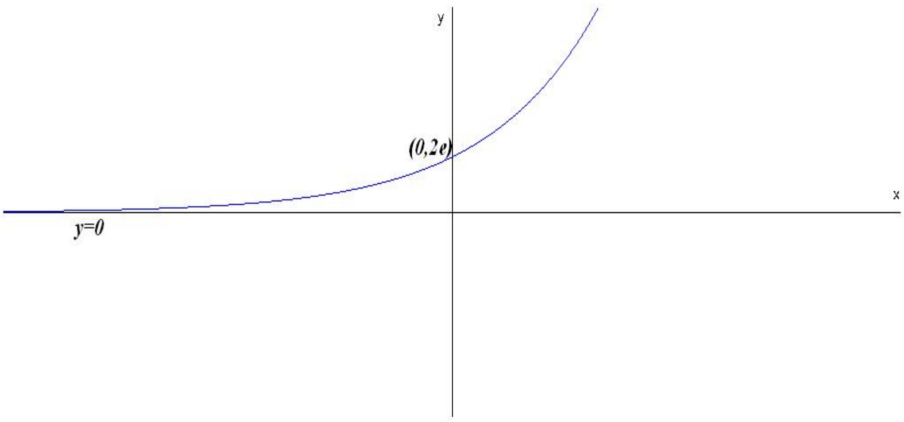
Solución:

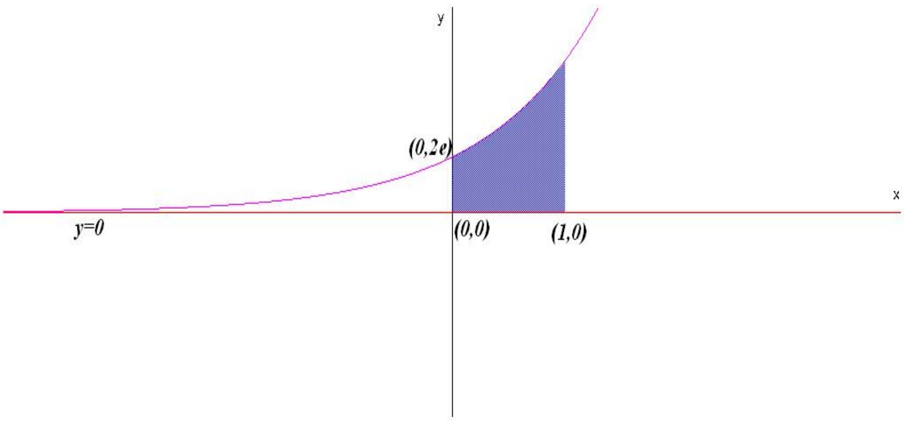
a) A grandes rasgos, el único punto de corte es $(0, 2e)$ y no tiene asíntotas verticales y si tiene una asíntota horizontal en $y = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} 2e^{x+1} = 0$$

.

$$f'(x) = 2e^{x+1} > 0 \Longrightarrow f \text{ siempre creciente}$$





b)

$$S = \int_0^1 2e^{x+1}\,dx = 2e^{x+1}\Big]_0^1 = 2e(e-1)\ u^2$$

Problema 15.5.4 *(2 puntos)* En la representación de navidad de los alumnos de 3º de primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales, 3 de personas y 12 de árboles. Los papeles se asignan al azar, los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les ha correspondido.

a) Calcúlese la probabilidad de que a los dos primeros alumnos les toque el mismo tipo de papel.

b) Calcúlese la probabilidad de que el primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.

Solución:
Sean los sucesos A con dibujos de animales, B con dibujos de personas y C

con dibujos de árboles.

$$P(A) = \frac{7}{22}, \quad P(B) = \frac{3}{22}, \quad P(C) = \frac{12}{22}$$

a)

$$P(\text{mismo papel}) = P(AA)+P(BB)+P(CC) = \frac{7}{22}\cdot\frac{6}{21}+\frac{3}{22}\cdot\frac{2}{21}+\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21} =$$

$$= \frac{30}{77} = 0,3896103896$$

b)

$$P(\text{el primero de persona al tercero}) =$$

$$= P(AAB) + P(ACB) + P(CAB) + P(CCB) =$$

$$= \frac{7}{22}\cdot\frac{6}{21}\cdot\frac{3}{20}+\frac{7}{22}\cdot\frac{12}{21}\cdot\frac{3}{20}+\frac{12}{22}\cdot\frac{7}{21}\cdot\frac{3}{20}+\frac{12}{22}\cdot\frac{11}{21}\cdot\frac{3}{20} = \frac{171}{1540} = 0,1110389610$$

Problema 15.5.5 *(2 puntos)* La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\overline{x} = 169$ cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 169$, $\sigma = 16$, $n = 625$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (167,512; 170,488)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{16}{\sqrt{625}} = 1,488$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$4 = 1,645\frac{16}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 43,2964 \Longrightarrow n = 25$$

15.6. Septiembre 2014 - Opción B

Problema 15.6.1 *(2 puntos)* Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $(A \cdot A^T)^{200}$.

b) Calcúlese $(A \cdot A^T - 3I)^{-1}$.

Nota: A^T denota a la traspuesta de la matriz A. I es la matriz identidad de orden 3. **Solución:**

a)

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^T$$

Luego

$$(A \cdot A^T)^{200} = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot A^T - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

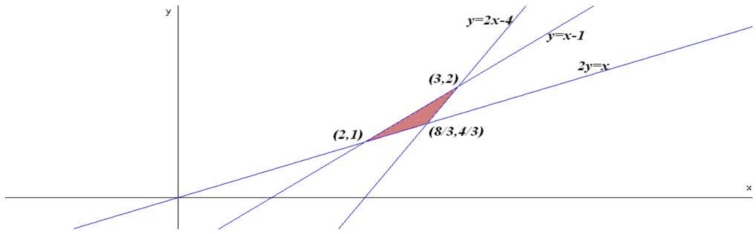
$$(A \cdot A^T - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 15.6.2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por

$$y \geq 2x - 4; \quad y \leq x - 1; \quad 2y \geq x; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

.

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.



b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x-3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) La región S pedida será:

Los vértices serían: $(2, 1)$, $(3, 2)$ y $(8/3, 4/3)$.

b)

$$\left\{\begin{array}{l} f(2,1) = -1 \ \text{Máximo} \\ f(3,2) = -3 \ \text{Mínimo} \\ f(8/3,4/3) = -4/3 \end{array}\right.$$

El máximo es de -1 y se alcanza en el punto $(2, 1)$. El mínimo es de -3 y se alcanza en el punto $(3, 2)$.

Problema 15.6.3 *(2 puntos)* función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{\lambda x}{4 + x^2}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real λ para que la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

b) Calcúlese $\int_0^2 f(x)\,dx$ para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{a(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}; \ \ f'(-1) = 2 \Longrightarrow \lambda = \frac{50}{3}$$

b)

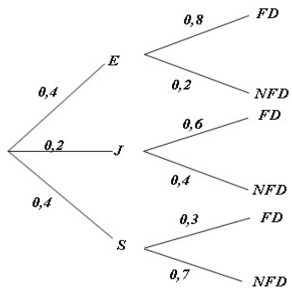
$$\int_0^2 \frac{x}{4 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|4 + x^2|\Big]_0^2 = \frac{\ln 2}{2}$$

Problema 15.6.4 *(2 puntos)* Al 80 % de los trabajadores en educación (E) que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.

b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

Solución:



a)

$$P(FD) = P(FD|E)P(E) + P(FD|J)P(J) + P(FD|S)P(S) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,56$$

b)

$$P(S|NFD) = \frac{P(NFD|S)P(S)}{P(NFD)} = \frac{0,7 \cdot 0,4}{1 - 0,56} = 0,64$$

Problema 15.6.5 *(2 puntos)* El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3,290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 7,840.
Exprésense los tamaños muéstrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muéstrales respectivos.
Nota:Utilícese $z_{0,05} = 1,645$.
Solución:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$3,290 = 1,645\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \Longrightarrow n_1 = 0,25\sigma^2$$

$$7,840 = 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \Longrightarrow n_2 = 0,0625\sigma^2$$

$$n_1 = n_2 + 7500 \Longrightarrow 0,25\sigma^2 = 0,0625\sigma^2 + 7500 \Longrightarrow \sigma = 200$$

Luego $n_1 = 0,25 \cdot 40000 = 10000$ y $n_2 = 0,0625 \cdot 40000 = 2500$.

Capítulo 16

Año 2015

16.1. Modelo 2015 - Opción A

Problema 16.1.1 *(2 puntos)* Una empresa láctea se plantea la producción de dos nuevas bebidas A y B. Producir un litro de la bebida A cuesta 2 euros, mientras que producir un litro de bebida B cuesta 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6 millones de litros de bebida, aunque del tipo B no podrán producirse (por limitaciones técnicas) más de 5 millones y debido al coste de producción no es posible elaborar más de 8 millones de litros en total de ambas bebidas. Además, se desea producir una cantidad de bebida B mayor o igual que la de bebida A. ¿Cuántos litros habrá que producir de cada tipo de bebida para que el coste de producción sea mínimo? Calcúlese dicho coste. Justifiqúense las respuestas.
Solución:
LLamamos x : millones de bebida A e y millones de bebida B

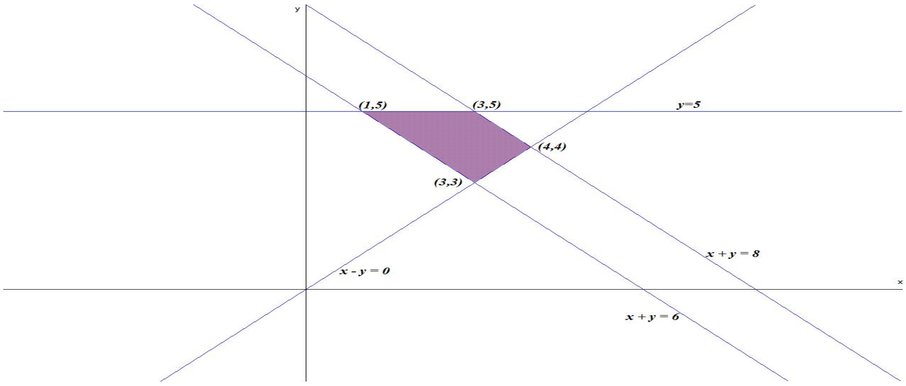
$$z(x,y) = 2x + 0,5y$$

sujeto a

$$\left\{\begin{array}{l} x+y\geq 6\\ y\leq 5\\ x+y\leq 8\\ y\geq x\\ x,y\geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y\geq 6\\ y\leq 5\\ x+y\leq 8\\ x-y\leq 0\\ x,y\geq 0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} z(1,5) = 4,5 \;\text{Mínimo}\\ z(3,5) = 8,5\\ z(3,3) = 7,5\\ z(4,4) = 10\end{array}\right.$$

Hay que producir 1 millón de litros de la bebida A y 5 millones de la B con un coste de 4,5 millones de euros.



Problema 16.1.2 *(2 puntos)* Se considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.

b) Calcúlese $A^T \cdot A$.

Nota: A^T denota la traspuesta de la matriz A.

Solución:

a)
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b)
$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$$

Problema 16.1.3 *(2 puntos)*

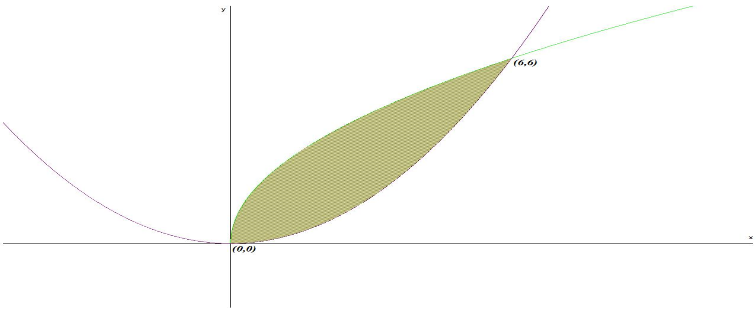
a) Dibújese, de manera esquemática, la región acotada del plano limitada por las gráficas de las curvas
$$y = \sqrt{6x}; \quad y = \frac{x^2}{6}$$

b) Calcúlese el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) $\sqrt{6x} = \dfrac{x^2}{6} \Longrightarrow x = 0, \ x = 6$

b) $\displaystyle\int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left.\frac{12x\sqrt{6x} - x^3}{18}\right]_0^6 = 12 \ u^2$



Problema 16.1.4 *(2 puntos)* Se consideran los sucesos incompatibles A y B de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$. Calcúlese:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) $P(B \cap \overline{A})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,3.$
Por ser A y B incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,7.$

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) = 0,3$

Problema 16.1.5 *(2 puntos)* El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1,2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6,6 kW, si $\mu = 6,3kW$.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza $(6,1; 6,9)$ para la media del consumo familiar diario.

Solución:

a) $\overline{X} \approx N\left(6,3; \dfrac{1,2}{\sqrt{50}}\right) = N(6,3; 0,17)$:
$P(6 < \overline{X} < 6,6) = P\left(\dfrac{6-6,3}{0,17} < Z < \dfrac{6,6-6,3}{0,17}\right) = P(-1,77 < Z < 1,77) = 0,9232.$

b) $2z_{\alpha/2}\frac{1,2}{\sqrt{50}} = 6,9 - 6,1 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,36$ Luego el nivel de confianza es del 98 %.

16.2. Modelo 2015 - Opción B

Problema 16.2.1 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=1\\ x+ay+az=1\\ x+4ay+z=2a \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores del a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a=-1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & a & a & 1\\ 1 & 4a & 1 & 2a \end{array}\right);\quad |A|=-4a^2+6a-2=0\Longrightarrow a=1/2,\quad a=1$$

- Si $a\neq 1/2$ y $a\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=1/2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right);\quad F_1=F_3\Longrightarrow$$

el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right);\quad |A|=0\ \text{ y }\ \left|\begin{array}{rr} 1 & 2\\ 1 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

como $\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3\Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a=-1$:

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y+z=1\\ x-y-z=1\\ x-4y+z=-2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3/4\\ y=1/2\\ z=-3/4 \end{array}\right.$$

Problema 16.2.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 24x - 15x^2 + 2x^3 + 2$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Hállense sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = 4.$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)\cup(4, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(1, 4)$.

b) En $x = 1$ hay un máximo relativo, en $x = 4$ hay un mínimo relativo. $f''(x) = 12x - 30 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$ y $f'''(x) = 12 \neq 0 \Longrightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x = 5/2$.

Problema 16.2.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1, 5$.

Solución:

a) Asíntotas

- Verticales: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ ó $x = 3$
  Si $x = -1$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

  Si $x = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{27}{0^-} \right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = \left[\dfrac{27}{0^+} \right] = +\infty \end{array} \right.$$

- Horizontales: $y = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3} = 3$$

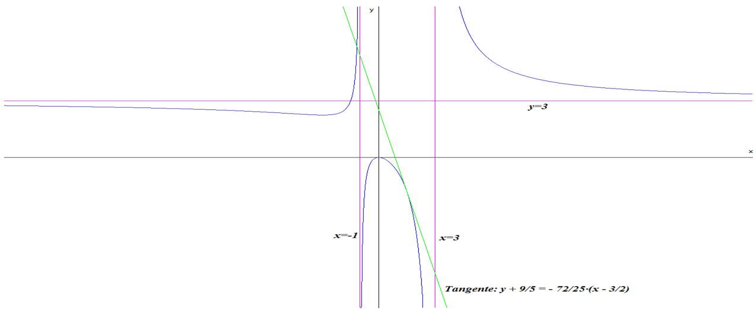
- Oblicuas no hay por haber horizontales.

b) $f(1,5) = -9/5$ y $m = f'(1,5) = -72/25$

$$f'(x) = -\frac{6x(x+3)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

La ecuación de la recta en su forma punto pendiente es:

$$y + 9/5 = -72/25(x - 3/2)$$

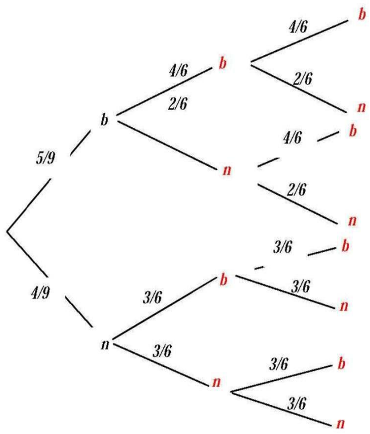


Problema 16.2.4 *(2 puntos)* Una urna contiene 5 bolas blancas y 4 negras, y otra urna contiene 3 bolas blancas y dos negras. Se toma al azar una bola de la primera urna y, sin mirarla, se introduce en la segunda urna. A continuación extraemos consecutivamente, con reemplazamiento, dos bolas de la segunda urna. Hállese la probabilidad de que las dos últimas bolas extraídas sean:

a) Del mismo color.

b) De distinto color.

Solución:



a) $P(\text{mismo color}) = P(2b) + P(2n) = \dfrac{43}{81}$

$P(2b) = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{29}{81}$

$P(2n) = \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{6} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{14}{81}$

b) $P(\text{distinto color}) = 1 - P(\text{mismo color}) = 1 - \dfrac{43}{81} = \dfrac{38}{81}$

Problema 16.2.5 *(2 puntos)* Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

290 275 290 325 285 365 375 310 290 300

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34,5 días.

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

$$N(\mu; 34{,}5)$$

a) $n = 10$, $\overline{x} = 310{,}5$, $\sigma = 34,5$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{10}} = 21{,}383$$

$$IC = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (289{,}2, 331{,}88)$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{34{,}5}{\sqrt{n}} = 10 \Longrightarrow n \geq 45{,}725 \Longrightarrow n = 46$$

16.3. Junio 2015 - Opción A

Problema 16.3.1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = -2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

- Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 16.3.2 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real f es

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 4)$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1, 4)$.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int (3x^2 + 2x)\, dx = x^3 + x^2 + C$:

$$f(1) = 4 \Longrightarrow 2 + C = 4 \Longrightarrow C = 2 \Longrightarrow f(x) = x^3 + x^2 + 2$$

b)

$$b = f(1) = 4, \quad m = f'(1) = 5, \Longrightarrow y - 4 = 5(x - 1)$$

.

Problema 16.3.3 *(2 puntos)* Sean las funciones reales de variable real

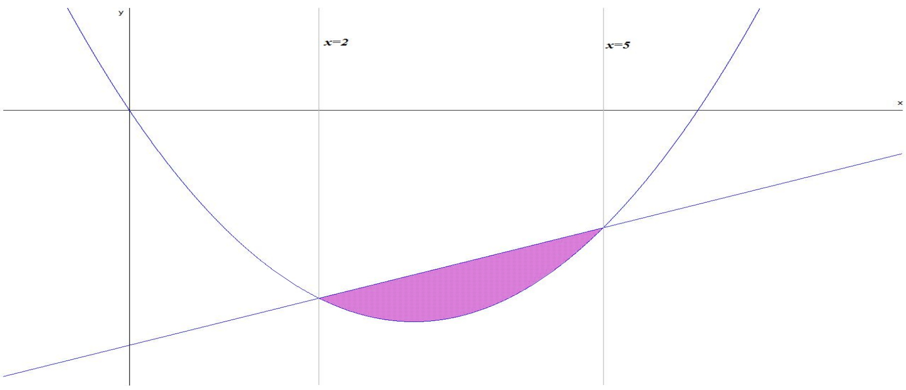
$$f(x) = x^2 - 6x, \quad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

Solución:

a) Gráfica:



b) $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - 7x + 10)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x$$

$$S_1 = \int_2^5 (f(x) - g(x))\, dx = F(5) - F(2) = -\frac{9}{2}$$

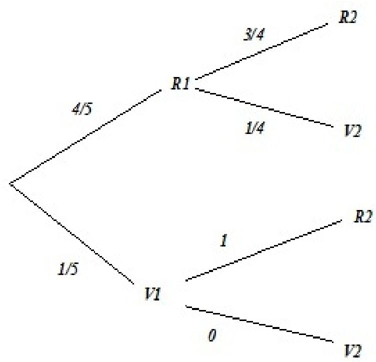
$$S = |S_1| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$

Problema 16.3.4 *(2 puntos)* En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.

b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

Solución:



a)

$$P(mismo\ \ color) = P(R1)P(R2|R1) + P(V1)P(V2|V1) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 0 = \frac{3}{5}$$

b)

$$P(V1|R2) = \frac{P(R2|V1)P(V1)}{P(R2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Problema 16.3.5 *(2 puntos)* El tiempo de reacción ante un obstaculo imprevisto de los conductores de automóviles de un pais, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 250\ ms$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701; 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80 %.

Solución:

a) Tenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$ e $IC = (701; 799) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 701 \\ \overline{X} + E = 799 \end{array} \right. \Longrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 750 \\ E = 49 \end{array} \right.$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 49 = 1,96\frac{250}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 100$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,285$;

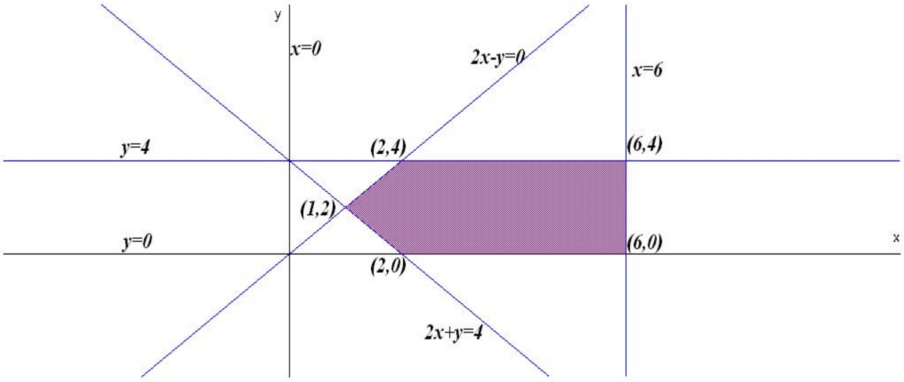
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,285\frac{250}{\sqrt{25}} = 64,25$$

16.4. Junio 2015 - Opción B

Problema 16.4.1 *(2 puntos)* Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.
Solución:
LLamamos x : toneladas de pienso A e y : toneladas de pienso B. Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $z(x, y) = 1000x + 2000y$ calculando su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \left\{ \begin{array}{l} x \le 6 \\ y \le 4 \\ y \le 2x \Longrightarrow 2x - y \ge 0 \\ 2x + y \ge 4 \\ x, y \ge 0 \end{array} \right.$$

La región S pedida será:



Los vértices a estudiar serán: $(2,0)$, $(6,0)$, $(6,4)$, $(2,4)$ y $(1,2)$:

$$\left\{\begin{array}{l} z(2,0)=2000 \text{ Mínimo} \\ z(6,0)=6000 \\ z(6,4)=14000 \\ z(2,4)=10000 \\ z(1,2)=5000 \end{array}\right.$$

El coste mínimo es de 2000 euros y se alcanza produciendo 2 toneladas de pienso A y ninguna del tipo B.

Problema 16.4.2 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{array}\right)$$

a) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.

b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k=3$.

Solución:

a) $|A|=0 \Longrightarrow 8-4k=0 \Longrightarrow k=2$.
Si $k\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.
Si $k=2$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right);\ |A|=0, \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{array}\right|=6\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

b) $k = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 16.4.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{si} \quad x < 2 \\ 3x + m & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función f sea continua en $x = 2$.

b) Calcúlese $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} (3x+m) = 6 + m$$

$$6 + m = -4 \Longrightarrow m = -10$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} (x+m) = \infty$$

Problema 16.4.4 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A \cap B) = 0,3$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,2$; $P(B) = 0,7$. Calcúlense:

a) $P(A \cup B)$:

b) $P(B|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.
Solución:

a)

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B) = 0,2 + 0,7 = 0,9$$

b) $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 = 0,5$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = 0,8$$

Problema 16.4.5 *(2 puntos)* La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido $\overline{x} = 8000h$. Calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral este comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que $\mu = 8100h$?

Solución:

a) Tenemos $\overline{X} = 8000$, $\sigma = 1000$, $n = 81$ y $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (7713,89; 8286,11)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{1000}{\sqrt{81}} = 286,11$$

b) $\overline{X} \approx N\left(8100, \frac{1000}{\sqrt{100}}\right) = N(8100; 100)$

$$P(7904 \le \overline{X} \le 8296) = P\left(\frac{7904 - 8100}{100} \le Z \le \frac{8296 - 8100}{100}\right) =$$

$$P(-1,96 \le Z \le 1,96)) = P(Z \le 1,96) - P(Z \le -1,96) =$$

$$P(Z \le 1,96) - (1 - P(Z \le 1,96)) = 2P(Z \le 1,96) - 1 = 0,95$$