9.1. Modelo 2008 - Opción A

Problema 9.1.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de n para los que la matriz A tiene inversa.

b) Resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$ para $n = 3$

Solución:

a)

$$|A| = n - 2 \Longrightarrow n = 2$$

Si $n \neq 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

Si $n = 2 \Longrightarrow$ No existe A^{-1}

b) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 9.1.2 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$$

a) Calcular sus asíntotas y esbozar su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = \pm 2$

  En $x = 2$:

  $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

  $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = \infty$$

  En $x = -2$:

  $$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0^+}\right] = \infty$$

  $$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales:

  $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 - 4} = 3 \Longrightarrow y = 3$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales.

Para representar la función calculamos:

- Puntos de Corte: $(0, 0)$
- Monotonía:

  $$f'(x) = -\frac{24x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

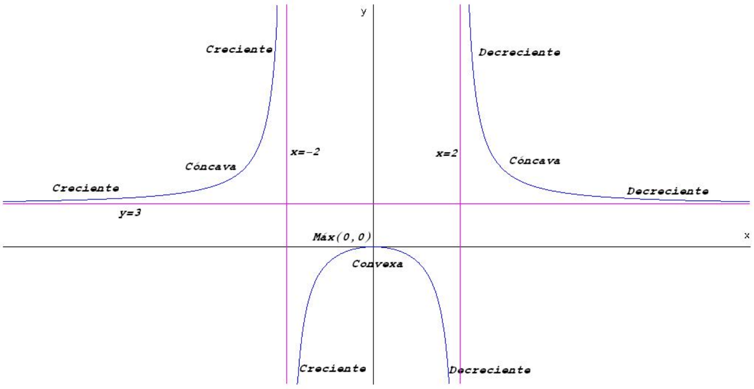
  Luego la función presenta un máximo en el punto $(0, 0)$.

- Curvatura:

$$f'(x) = \frac{24(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de Inflexión}$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava	Convexa	Cóncava

- Representación gráfica:



b) El punto de tangencia es el $(0,0)$ donde la función presenta un máximo y, por tanto, la tangente coincide con el eje de abcisas $y=0$.

Problema 9.1.3 *(2 puntos)* Un instituto tiene dos grupos de 2º de Bachillerato. El grupo A está formado por 18 alumnas, de las cuales 5 juegan al baloncesto, y 12 alumnos, 7 de los cuales juegan al mismo deporte. El grupo B está formado por 12 alumnas, 4 de ellas jugadoras de baloncesto, y 13 alumnos, 7 de los cuales practican baloncesto.

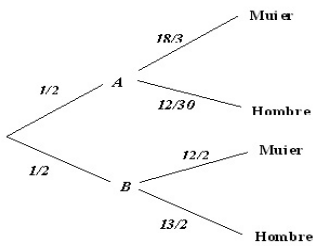
a) Si se elige un alumno de 2º de bachillerato al azar, calcular la probabilidad de que sea mujer.

b) ¿En qué grupo es más probable elegir al azar un estudiante que juege al baloncesto?

Solución:

a) Hay dos maneras de ver este problema:

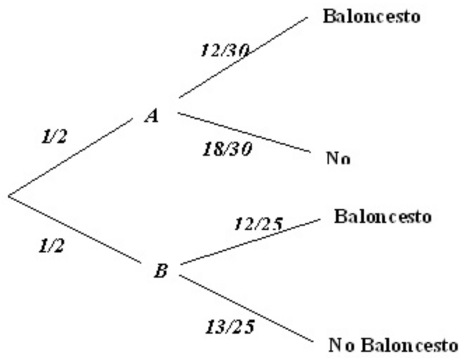
¿Están todos los alumnos juntos y fuera de sus grupo?, en este caso $P(\text{Mujer}) = \dfrac{30}{55} = 0,5454545454$. Pero también podemos pensar que los alumnos se encuentran en sus grupos, en ese caso primero nos



dirijimos hacia un grupo con una probabilidad de 1/2 y calculamos las probabilidades condicionadas correspondientes:

$$P(\text{Mujer}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} + \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{25} = 0,54$$

b) Ahora tenemos:



$$P(A|\text{Baloncesto}) = \frac{P(\text{Baloncesto}|A)P(A)}{P(\text{Baloncesto})} = \frac{12/30 \cdot 1/2}{12/30 \cdot 1/2 + 12/25 \cdot 1/2} =$$

$$\frac{5}{11} = 0{,}4545$$

$$P(B|\text{Baloncesto}) = \frac{P(\text{Baloncesto}|B)P(B)}{P(\text{Baloncesto})} = \frac{12/25 \cdot 1/2}{12/30 \cdot 1/2 + 12/25 \cdot 1/2} =$$

$$\frac{6}{11} = 0{,}5454$$

Es claro que, es más probable encontrar un alumno que juege al baloncesto en el grupo B.

Problema 9.1.4 *(2 puntos)* La edad de la población que vive en residencias de mayores en Madrid sigue una distribución normal de desviación típica 7,3 años. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. ¿Se puede asegurar que la edad media de la población difiere en menos de 2 años de la media de la media de la muestra con un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

a) Tenemos

$$N(\mu, 7{,}3), \quad n = 50, \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96\frac{7{,}3}{\sqrt{50}} = 2{,}023$$

Como $IC = \left(\overline{X} - 2{,}023, \overline{X} + 2{,}023\right)$ no podemos asegurar, que la edad media de la población difiere en menos de 2 años.

9.2. Modelo 2008 - Opción B

Problema 9.2.1 *(3 puntos)*

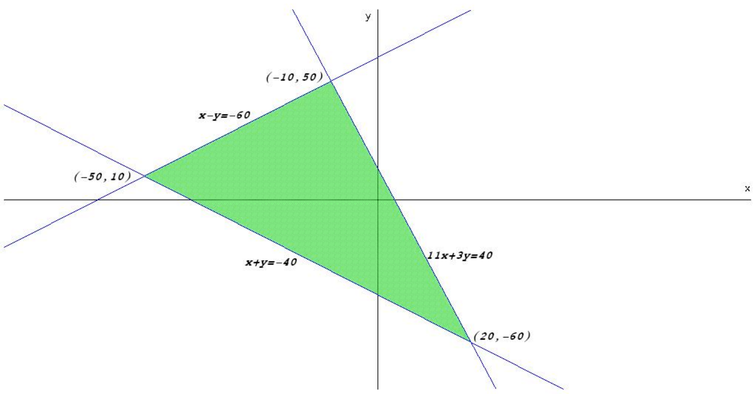
a) Representar la región del plano definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & y \leq & 60 \\ x+ & y \geq & -40 \\ 11x+ & 3y \leq & 40 \end{array}\right.$$

b) Maximizar la función $f(x, y) = 10x - y$ en la región obtenida.

c) Minimizar la función $g(x, y) = x - 10y$.

Solución:



a)
$$\left\{\begin{array}{rrr} -x+ & y\leq & 60\\ x+ & y\geq & -40\\ 11x+ & 3y\leq & 40 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x- & y\geq & -60\\ x+ & y\geq & -40\\ 11x+ & 3y\leq & 40 \end{array}\right.$$

b)
$$\left\{\begin{array}{l} f(-10,50)=-150\\ f(-50,10)=-510\\ f(20,-60)=260 \end{array}\right.$$

El máximo de f en este recinto se encuentra en el punto $(20,-60)$ con un valor de 260.

c)
$$\left\{\begin{array}{l} g(-10,50)=-510\\ g(-50,10)=-150\\ g(20,-60)=620 \end{array}\right.$$

El mínimo de g en este recinto se encuentra en el punto $(-10,50)$ con un valor de -510.

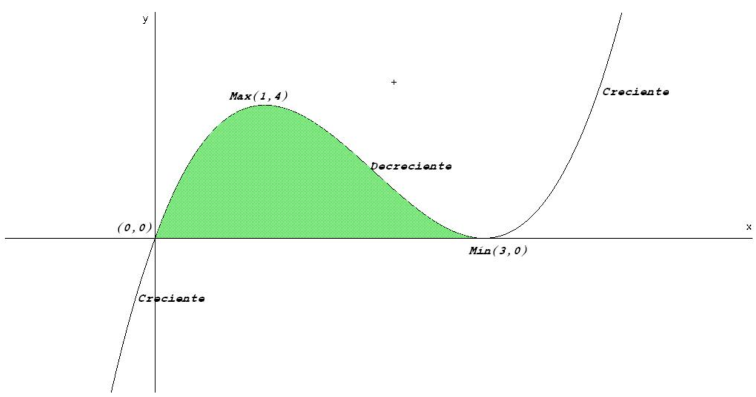
Problema 9.2.2 *(3 puntos)* Dada la función real de variable real definida por $f(x)=x^3-6x^2+9x$, se pide determinar:

a) Los puntos en los que la gráfica de f corta a los ejes de coordenadas.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) El área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función y el eje OX.

Solución:



a) Puntos de Corte:

- Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3 \Longrightarrow$ los puntos son $(0,0)$ y $(3,0)$.
- Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow$ el punto es el $(0,0)$.

b) Monotonía:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

La función tiene un máximo en $(1,4)$ y un mínimo en $(3,0)$

c) El área encerrada se encuentra entre los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = 3$:

$$S = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{4}\ u^2$$

Problema 9.2.3 *(2 puntos)* La orquesta musiquera está formada por tres tipos de instrumentos, 30 de madera, 15 de viento y 5 de percusión. La víspera de un concierto se ponen enfermos dos músicos. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambos toquen instrumentos de viento.

b) Ambos toquen el mismo tipo de instrumento.

Solución:

LLamamos M al instrumento de madera, V al de viento y P al de percusión. Los músicos enfermos son A y B.

a)

$$P(A = V \text{ y } B = V) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} = \frac{3}{35} = 0,086$$

b)

$$P(\text{ambos lo mismo}) =$$

$$P(A = M \text{ y } B = M) + P(A = V \text{ y } B = V) + P(A = P \text{ y } B = P) =$$

$$\frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} + \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} + \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} = \frac{22}{49} = 0,449$$

Problema 9.2.4 *(2 puntos)* Para conocer la producción media de sus olivos, un olivarero escoge al azar 10 de ellos, pesa su producción de aceitunas, y obtiene los siguientes valores, expresados en kg:

$$175,\ \ 180,\ \ 210,\ \ 215,\ \ 186,\ \ 213,\ \ 190,\ \ 213,\ \ 184,\ \ 195$$

Sabemos que la producción sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15,3.

Se pide estimar la producción media del olivar con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

$$N(\mu; 15{,}3)\ \ n = 10,\ \ \overline{X} = 196{,}1,\ \ z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (186{,}617; 205{,}583)$$