I.E.S LA ARBOLEDA (LEPE) **DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

SOLUCIONES

Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)

UNIDAD 10: INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.

Notas:
1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. Realiza las siguientes derivadas y simplifica el resultado todo lo que sea posible. (2p)

$(a)\ \ f(x)=(2x-3)^3\cdot(3x-1)^2$

$(b)\ \ f(x)=\dfrac{(x^3-1)}{(x^3+1)}$

$(c)\ \ f(x)=2\cdot\sqrt[8]{x^4-1}$

$(d)\ \ f(x)=\ln(1+x^2)+2\cdot \text{arctg}x$

Solución:

$(a)\ \ f'(x)=6\cdot(2x-3)^2\cdot(3x-1)\cdot(5x-4)$

$(b)\ \ f'(x)=\dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}$

$(c)\ \ f'(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt[8]{(x^4-1)^7}}=\dfrac{x^3\cdot\sqrt[8]{(x^4-1)}}{x^4-1}$

$(d)\ \ f'(x)=\dfrac{2x+2}{1+x^2}$

2. Realiza las siguientes derivadas y simplifica el resultado todo lo que sea posible. (3p)

$(a)\ \ f(x)=x^3\cdot e^x+x^2\cdot e^x$

$(c)\ \ f(x)=\dfrac{\text{sen}x}{1+\cos x}$

$(d)\ \ f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$(e)\ \ f(x)=(x-\sqrt{(1-x^2)})^2$

Solución:

$(a)\ \ f'(x)=e^x\cdot(x^3+4x^2+2x)$

$(b)\ \ f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$

$(c)\ \ f'(x)=\dfrac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$

$(d)\ \ f'(x)=2\cdot(x-\sqrt{1-x^2})\cdot\left(1+\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\dfrac{4x^2-2}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 + x - 1$ en el punto de abcisa x=1. Realiza la representación gráfica de la función y de la recta tangente en dicho punto. (1.5p)

Solución:

Cálculo de la ecuación de la recta tangente

1) Función derivada

$f'(x) = 6x + 1$

2) Evaluamos la derivada en el punto, que será la pendiente de la recta tangente.

$x_0 = 1$
$m = f'(1) = 6\cdot 1+1=7$

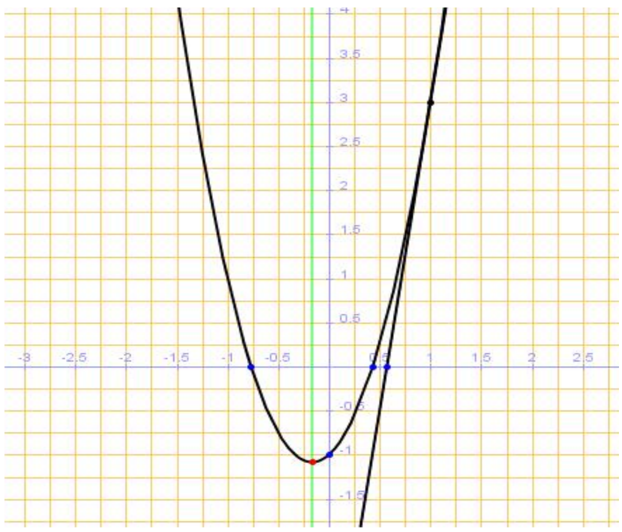
3) Averiguamos la coordenada y del punto.

$y_0 = f(x_0) = f(1) = 3$

4) La ecuación punto-pendiente de la recta tangente vendrá dada por:

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
$y - 3 = 7 \cdot (x - 1)$
$y = 7x - 4$

Representación gráfica de la función y de la recta tangente.



4. Halla los puntos donde la recta tangente a la función $f(x) = x^3 – 6x^2 – 15$ es paralela al eje OX y di si son máximos o mínimos. (1.5p)

Solución:

Antes de comenzar debemos leer el enunciado y recordar que:

- El eje OX tiene pendiente igual a 0 y
- Todas las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

De lo anterior, podemos deducir que: los puntos buscados son aquellos en los que la recta tangente tiene pendiente 0, o lo que es lo mismo, los puntos en los que la derivada primera vale 0 ($f'(x) = 0$)

Cálculo de los puntos cuya recta tangente es paralela al eje OX

1) Función derivada

$f'(x) = 3x^2 – 12x$

2) Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$

$3x^2 – 12x = 0 \longrightarrow 3x \cdot (x – 4) = 0 \longrightarrow (x = 0)$ o $(x – 4 = 0) \longrightarrow (x = 0)$ o $(x = 4)$

3) De entre los valores obtenidos, calculamos sus coordenadas y correspondientes y, vemos, cual de ellas es mayor que la otra. De este modo, este punto será el máximo y otro el mínimo.

$y_0 = f(0) = -15$

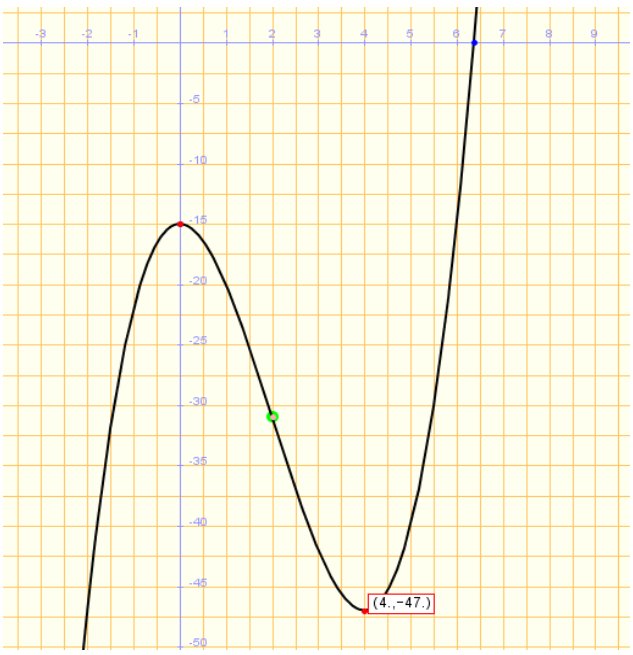
$y_1 = f(4) = -47$

4) Máximos y mínimos.

Como $y_0 > y_1$

- Máximo (0, -15)
- Máximo (4, -47)

Veámoslo gráficamente.



5. Calcula el punto de corte de las tangentes a las funciones $g(x)=e^{2x}$ y $f(x)=\ln(x+1)$ en $x=0$. (2p)

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=2e^{2x} \rightarrow g'(0)=2 \\ g(0)=1 \end{array}\right\} \rightarrow y=1+2(x-0) \rightarrow y=1+2x \text{ es la recta tangente a } g(x) \text{ en } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{x+1} \rightarrow f'(0)=1 \\ f(0)=\ln 1=0 \end{array}\right\} \rightarrow y=0+x \rightarrow y=x \text{ es la recta tangente a } f(x) \text{ en } x=0.$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y=1+2x \\ y=x \end{array}\right\} \rightarrow x=1+2x \rightarrow x=-1 \rightarrow y=-1$$

Las dos rectas tangentes se cortan en el punto $(-1,-1)$.