Ecuaciones con Radicales

Para resolver una ecuación que comprende radicales se efectúan los siguientes pasos:

1. Se deja en uno de los miembros un solo radical, trasladando al otro miembro los demás términos.

2. Se elevan al cuadrado, al cubo, etc. los dos miembros de la ecuaci´on obtenida y se igualan entre si (depende del índice de la raíz).

3. Si la ecuación obtenida no contiene radicales se resuelve normalmente. Si por el contrario, contiene uno o más radicales se repiten los pasos 1 y 2 hasta obtener una ecuación sin radicales. Luego se resuelve esta última ecuación.

4. Se sustituyen en la ecuaci´on original los valores obtenidos en el paso anterior y se determinan las soluciones validas.

Ejemplo 1.

Resolver: $\sqrt{x+3} = 4$

Solución.

$(\sqrt{x+3})^2 = (4)^2$ elevando ambos miembros al cuadrado,

x+3=16 eliminando el radical con el cuadrado,

x=16-3 restando 3 a ambos lados de la ecuación,

x=13 posible solución.

Al sustituir x=13 en la ecuación original para compropbar si es un resultado válido o no, vemos que $\sqrt{13+3}$ = 4 luego la solución es válida

$$S = \{13\}$$

Ejemplo 2.

Resolver: $\sqrt{2x^2 - 1}$ =x

Solución.

$(\sqrt{2x^2 - 1})^2 = (x)^2$ elevando ambos miembros al cuadrado,

$2x^2 - 1 = x^2$ eliminando el radical con el cuadrado,

$2x^2 - x^2 = 1$ transponiendo términos,

$x^2 = 1$ restando los coeficientes de los cuadrados

$x = \pm 1$ posibles 2 soluciones.

Si sustituimos x=−1 en la ecuación original, obtenemos

$\sqrt{2(-1)^2 - 1} = (^-1)$

Claramente se observa que el miembro derecho de esta ecuación no puede ser negativo, $\sqrt{1}$ =−1. Se descarta −1 por ser una raíz extraña y se acepta solamente x=1.

$$S = \{1\}$$

Ejemplo 3.

Resolver: $\sqrt{4x^2 - 15} - 2x$ =-1

Solución.

$\sqrt{4x^2 - 15}$ =2x-1, despejando el radical en el lado izquierdo

$(\sqrt{4x^2-15})^2=(2x-1)^2$, elevando ambos miembros al cuadrado,

$4x^2-15=(2x-1)^2$, eliminando el radical con el cuadrado,

$4x^2-15=4x^2-4x+1$ desarrollando el binomio de la derecha

$-15=-4x+1$ cancelando términos a ambos miembros,

4x=1+15 transponiendo términos,

4x=16

x=$\frac{16}{4}$ pasando a dividir,

x=4 posible solución.

Al sustituir el x=4 en la ecuación original se tiene:

$\sqrt{4\cdot 4^2-15}-2\cdot 4$ =-1

$\sqrt{4\cdot 16-15}-8$ =-1

$\sqrt{64-15}-8$ =-1

$\sqrt{49}-8$ =-1

7-8=-1. La cual es correcta, y se toma como solución: $S=\{4\}$.

Ejemplo 4.

Resolver: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}$ =5

Solución.

$\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1}$ aislando un radical,

$(\sqrt{x+4})^2=(5-\sqrt{x-1})^2$ elevando al cuadrado,

$x+4=25-2\cdot 5\sqrt{x-1}+(\sqrt{x-1})^2$ desarrollando la segundo fórmula notable,

$x+4=25-10\sqrt{x-1}+x-1$ haciendo cálculos

$x+4-25-x+1=-10\sqrt{x-1}$ transponiendo términos,

$-20=-10\sqrt{x-1}$

$20=10\sqrt{x-1}$

$2=\sqrt{x-1}$

$(2)^2=(\sqrt{x-1})^2$ elevando al cuadrado a ambos lados,

4=x-1

x=5 posible solución de la ecuación.

Comprobando x=5, $\sqrt{5+4}+\sqrt{5-1}$ =5

Luego, $S=\{5\}$

Ejemplo 5.

Resolver: $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}$ =0

Solución.

$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x+2}$ transponiendo términos hacia la derecha,

$(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1})^2=(2\sqrt{x+2})^2$ elevando cuadrados,

$(\sqrt{x+7})^2+2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1}+(\sqrt{x-1})^2=4(x+2)$

$x+7+2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1}+x-1=4x+8$ eliminando raíces,

$2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1}=4x+8-x-7-x+1$ transponiendo términos,

$2\sqrt{x^2+6x-7}=2x+2$ efectuando,

$\sqrt{x^2+6x-7} = \frac{2(x+1)}{2}$

$\sqrt{x^2+6x-7} = (x+1)$

$(\sqrt{x^2+6x-7})^2 = (x+1)^2$ elevando al cuadrado,

$x^2+6x-7 = x^2+2x+1$ desarrollando los binomios,

$6x-2x = 1+7$

4x=8

x=2

Sustituyendo x=2 en la ecuación original, obtenemos

$\sqrt{2+7} + \sqrt{2-1} - 2\sqrt{2+2}$ =0, y finalmente

$S = \{2\}$

Ejercicios

Parte I. Resuelve las ecuaciones con radicales. Recuerda que hay que verificar las soluciones en la ecuación original.

1. $\sqrt{x}+5=7$ R/4.
2. $5+3\sqrt{x}=8$ R/1.
3. $8+\sqrt[3]{x}=12$ R/64.
4. $2+5\sqrt[3]{x}=32$ R/216.
5. $\sqrt{x-8}=2$ R/12.
6. $5-\sqrt{3x+1}=0$ R/8.
7. $\sqrt{x+3}=\sqrt{5x-1}$ R/1.
8. $\sqrt{5x+1}=\sqrt{14x+2}$ R/$\frac{-1}{9}$.
9. $\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+1}$ R/2.
10. $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+5}$ R/4.
11. $\sqrt{4x+9}=\sqrt{8x+2}$ R/$\frac{7}{4}$.
12. $\sqrt{2x+2}=\sqrt{3x-1}$ R/3.
13. $\sqrt{4x-11}=7\sqrt{2x-29}$ R/15.
14. $x-\sqrt{x-1}=1$ R/1 y 2.
15. $3x=\sqrt{3x+7}-1$ R/$\frac{2}{3}$.
16. $2x=\sqrt{-2x+5}-1$ R/$\frac{1}{2}$.
17. $6x-\sqrt{18x-8}=2$ R/$\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$.
18. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=1$ R/2.
19. $\sqrt{x-5}-\sqrt{4x-7}=0$ R/$\frac{2}{3}$.
20. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=7$ R/9.
21. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2$ R/4 y 12.
22. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=4$ R/3.

23. $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x-14}=9$ R/10.

24. $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+19}=-1$ R/6.

25. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+3}=0$ R/S=$\emptyset$.

26. $\sqrt{5x+19}-\sqrt{5x}=-1$ R/S=$\emptyset$.

27. $\sqrt{x-2}+5=\sqrt{x+53}$ R/11.

28. $\sqrt{9x-14}=3\sqrt{x+10}-4$ R/15.

29. $\sqrt{x-16}-\sqrt{x+8}=-4$ R/17.

30. $\sqrt{5x-1}+3=\sqrt{5x+26}$ R/2.

31. $13-\sqrt{13+4x}=2\sqrt{x}$ R/9.

32. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}=2\sqrt{x-1}$ R/5.

33. $\sqrt{9x+7}-\sqrt{x}-\sqrt{16x-7}=0$ R/1.

34. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}-\sqrt{4x+9}=0$ R/4.

35. $\sqrt{14-x}+\sqrt{11-x}=\frac{3}{\sqrt{11-x}}$ R/10.

36. $\sqrt{9x+10}-2\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$ R/6.

37. $6\sqrt{x+5}-3=4\sqrt{x+5}+17$ R/95.

38. $7+\sqrt[3]{5x-2}=9$ R/2.

39. $15-\sqrt[3]{7x-1}=12$ R/4.

40. $\sqrt{x^2+12}-x=2$ R/2.

41. $\sqrt{2x^2+x+2}=\sqrt{2x+3}$ R/1 o $\frac{-1}{2}$.

42. $\sqrt{9x^2-5}-3x=-1$ R/1.

43. $\sqrt{x^2-2x+1}=9-x$ R/5.

44. $\sqrt{5x^2-4x+3}-x=1$ R/1 y $\frac{1}{2}$.

45. $3x-\sqrt{6x^2-x+13}=1$ R/3.

46. $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{4x+1}=0$ R/0 y 2.

47. $\sqrt{x^2-5x+1}-\sqrt{1-8x}=0$ R/0 y -3.

Parte II. Ecuaciones con radicales en el denominador.

Instrucciones: se debe racionalizar previamente para dejarlas como las de la Parte I.

1. $\frac{\sqrt{x+5}-4}{\sqrt{2x+1}-2} = -1$
2. $\frac{\sqrt{3x-2}+1}{\sqrt{x+2}-1} = 3$
3. $\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{2x-2}+4} = \frac{1}{2}$
4. $\frac{\sqrt{3x+10}+1}{2-\sqrt{x+3}} = 3$
5. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$
6. $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = \frac{10}{\sqrt{x}}$
7. $\sqrt{4x-11} + 2\sqrt{x} = \frac{55}{\sqrt{4x-11}}$
8. $\sqrt{x} - \sqrt{x-7} = \frac{4}{\sqrt{x}}$
9. $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+13}$
10. $\frac{6}{\sqrt{x+8}} = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$
11. $\sqrt{x-3} + \frac{8}{\sqrt{x+9}} = \sqrt{x+9}$
12. $\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{x}+11}{\sqrt{x}-1}$
13. $2\sqrt{x+6} - \sqrt{4x-3} = \frac{9}{\sqrt{4x-3}}$
14. $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2\sqrt{x}-5}{2\sqrt{x}-1}$
15. $\sqrt{x+14} - \sqrt{x-7} = \frac{6}{\sqrt{x-7}}$
16. $\sqrt{x+3} + \frac{6}{\sqrt{x+3}} = 5$
17. $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 5$
18. $2\sqrt{x} = \sqrt{x+7} + \frac{8}{\sqrt{x+7}}$
19. $\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}} = 3$
20. $\sqrt{x+\sqrt{x+8}} = 2\sqrt{x}$