

## TEMA 3 – ÁLGEBRA

### FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

**EJERCICIO 1 :** Factoriza los siguientes polinomios:

a)  $2x^4 - 18x^2$

b)  $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

c)  $x^3 - 13x^2 + 36x$

d)  $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$

e)  $x^5 + x^4 - 2x^3$

e)  $x^3 - 3x + 2$

Solución:

a) Sacamos factor común y tenemos en cuenta que  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ :

$$2x^4 - 18x^2 = 2x^2(x^2 - 9) = 2x^2(x + 3)(x - 3)$$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & & 2 & 0 & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1) \quad (\text{El polinomio } x^2 + 1 \text{ no tiene raíces reales}).$$

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^3 - 13x^2 + 36x = x(x^2 - 13x + 36)$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} x = 9 \\ x = 4 \end{matrix}$$

Por tanto:  $x^3 - 13x^2 + 36x = x(x - 9)(x - 4)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -9 & -8 & 15 \\ 1 & & 2 & -7 & -15 \\ \hline & 2 & -7 & -15 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 7x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{7 \pm 13}{4} \begin{matrix} x = 5 \\ x = -6/4 = -3/2 \end{matrix}$$

$$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = 2(x - 1)(x - 5)(x + 3/2)$$

e) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ x = -2 \end{matrix}$$

Por tanto:  $x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x - 1)(x + 2)$

f) Utilizamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} x = 1 \\ x = -2 \end{matrix}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

### APLICACIONES DEL TEOREMA DEL RESTO

**EJERCICIO 2 :** Halla el valor de  $k$  para que la siguiente división sea exacta:  $(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$

Solución: Llamamos  $P(x) = 3x^2 + kx - 2$ .

Para que la división sea exacta, ha de ser  $P(-2) = 0$ ; es decir:  $P(-2) = 12 - 2k - 2 = 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

**FRACCIONES ALGEBRAICAS**

**EJERCICIO 3 : Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:**

a)  $\frac{x^5 + 6x^4 + 9x^3}{x^3 + 3x^2}$     b)  $\frac{x^3 - x}{x^3 + 3x^2 + 2x}$     c)  $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$     d)  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$     e)  $\frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2}{x^4 - 9x^2}$

*Solución:*

a)  $\frac{x^5 + 6x^4 + 9x^3}{x^3 + 3x^2} = \frac{x^3(x^2 + 6x + 9)}{x^2(x + 3)} = \frac{x^3(x + 3)^2}{x^2(x + 3)} = x(x + 3) = x^2 + 3x$

b)  $\frac{x^3 - x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x^2 + 3x + 2)} = \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)(x + 2)} = \frac{x - 1}{x + 2}$

c)  $\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{x(x^2 - x - 2)}{x(x^2 - 3x + 2)} = \frac{x(x - 2)(x + 1)}{x(x - 2)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$

d)  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{(x - 1)^3}{x(x - 1)^2} = \frac{x - 1}{x}$

e)  $\frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2}{x^4 - 9x^2} = \frac{x^2(x^2 - 2x - 3)}{x^2(x^2 - 9)} = \frac{x^2(x - 3)(x + 1)}{x^2(x - 3)(x + 3)} = \frac{x + 1}{x + 3}$

**EJERCICIO 4 : Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:**

a)  $\left(\frac{2x - 1}{x + 1} - \frac{3x}{x - 1}\right) \cdot \left(\frac{x^3 - x}{-x^2 - 6x + 1}\right)$     b)  $\frac{2x}{x - 2} + \frac{3x - 1}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4}$

c)  $\frac{(x - 1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{3x}{(x + 1)^2}$     d)  $\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 1}$     e)  $\left(\frac{3}{x} - \frac{2x}{x + 1}\right) \cdot \left(\frac{x^2 + x}{x - 1}\right)$

*Solución:*

a)  $\left(\frac{2x - 1}{x + 1} - \frac{3x}{x - 1}\right) \cdot \left(\frac{x^3 - x}{-x^2 - 6x + 1}\right) = \frac{(2x - 1)(x - 1) - 3x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x^3 - x}{-x^2 - 6x + 1} =$   
 $\frac{2x^2 - 2x - x + 1 - 3x^2 - 3x}{(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x(x - 1)(x + 1)}{-x^2 - 6x + 1} = \frac{-x^2 - 6x + 1}{(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x(x - 1)(x + 1)}{-x^2 - 6x + 1} = x$

b)  $\frac{2x}{x - 2} + \frac{3x - 1}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{2x(x + 2)}{x^2 - 4} + \frac{(3x - 1)(x - 2)}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{2x^2 + 4x - 3x^2 + 6x + x - 2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{-x^2 + 11x - 3}{x^2 - 4}$

c)  $\frac{(x - 1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{3x}{(x + 1)^2} = \frac{(x - 1)^2}{2(x - 1)(x + 1)} - \frac{3x}{(x + 1)^2} = \frac{x - 1}{2(x + 1)} - \frac{3x}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 6x}{2(x + 1)^2} = \frac{x^2 - 6x - 1}{2(x + 1)^2}$

d)  $\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x + 1 + 2(x^2 - 1) + (x - 1)}{(x - 1)^2(x + 1)} =$   
 $\frac{x + 1 + 2x^2 - 2 + x - 1}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{2x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2(x + 1)}$

e)  $\left(\frac{3}{x} - \frac{2x}{x + 1}\right) \cdot \frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{3(x + 1) - 2x^2}{x(x + 1)} \cdot \frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{3x + 3 - 2x^2}{x(x + 1)} \cdot \frac{x(x + 1)}{x - 1} = \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x - 1}$