2 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El último Catón

El calor era infernal, apenas quedaba aire y ya casi no veía, y no sólo por las gotas de sudor que me caían en los ojos, sino porque estaba desfallecida. Notaba un dulce sopor, un sueño ardiente que se apoderaba de mí, dejándome sin fuerza. El suelo, aquella fría plancha de hierro que nos había recibido al llegar, era un lago de fuego que deslumbraba. Todo tenía un resplandor anaranjado y rojizo, incluso nosotros. […]

Pero, entonces, lo comprendí. ¡Era tan fácil! Me bastó echar una última mirada a las manos que Farag y yo teníamos entrelazadas: en aquel amasijo, húmedo por el sudor y brillante por la luz, los dedos se habían multiplicado… A mi cabeza volvió, como en un sueño, un juego infantil, un truco que mi hermano Cesare me había enseñado cuando era pequeña para no tener que aprender de memoria las tablas de multiplicar. Para la tabla del nueve, me había explicado Cesare, sólo había que extender las dos manos, contar desde el dedo meñique de la mano izquierda hasta llegar al número multiplicador y doblar ese dedo. La cantidad de dedos que quedaba a la izquierda, era la primera cifra del resultado, y la que quedaba a la derecha, la segunda.

Me desasí del apretón de Farag, que no abrió los ojos, y regresé frente al ángel. Por un momento creí que perdería el equilibrio, pero me sostuvo la esperanza. ¡No eran seis y tres los eslabones que había que dejar colgando! Eran sesenta y tres. Pero sesenta y tres no era una combinación que pudiera marcarse en aquella caja fuerte. Sesenta y tres era el producto, el resultado de multiplicar otros dos números, como en el truco de Cesare, ¡y eran tan fáciles de adivinar!: ¡los números de Dante, el nueve y el siete! Nueve por siete, sesenta y tres; siete por nueve, sesenta y tres, seis y tres. No había más posibilidades. Solté un grito de alegría y empecé a tirar de las cadenas. Es cierto que desvariaba, que mi mente sufría de una euforia que no era otra cosa que el resultado de la falta de oxígeno. Pero aquella euforia me había proporcionado la solución: ¡Siete y nueve! O nueve y siete, que fue la clave que funcionó. […] La losa con la figura del ángel se hundió lentamente en la tierra, dejando a la vista un nuevo y fresco corredor.

MATILDE ASENSI

Justifica algebraicamente por qué funciona el *truco* para la tabla de multiplicar por 9 y demuestra que no existe un *truco* parecido para multiplicar por un número distinto de 9.

En la tabla del nueve, a medida que vamos multiplicando por un número mayor, sumamos una unidad en las decenas y restamos otra unidad en las unidades:

$$9 \cdot n = n(10 - 1) = 10n - n$$

Por este motivo funciona el *truco*.

En las tablas de multiplicar, desde la tabla del uno hasta la tabla del ocho, a medida que vamos multiplicando por un número mayor no siempre sumamos una unidad en las decenas.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Pon un ejemplo de polinomio de grado 4 y con término independiente -5. Determina sus términos y su valor numérico para $x = 2$ y $x = -1$.

Respuesta abierta.

$P(x) = x^4 - x^3 + 5x - 5$

$P(2) = 2^4 - 2^3 + 5 \cdot 2 - 5 = 13$

$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 5 \cdot (-1) - 5 = -8$

002 Saca factor común a las siguientes expresiones.

a) $4x^2yz^3 - 12xz^2 - 20xy^4z$

b) $2x(3x^2 - 1) - 8(3x^2 - 1) - (3x^2 - 1)$

a) $4x^2yz^3 - 12xz^2 - 20xy^4z = 4xz(xy^2z^2 - 3z - 5y^4)$

b) $2x(3x^2 - 1) - 8(3x^2 - 1) - (3x^2 - 1) = (3x^2 - 1)(2x - 8 - 1) =$
$= (3x^2 - 1)(2x - 9)$

003 Realiza esta división por la regla de Ruffini.

$$(4x^5 - 12x^3 - 20x + 2) : (x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 4 & 0 & -12 & 0 & -20 & 2 \\ -2 & & -8 & 16 & -8 & 16 & 8 \\ \hline & 4 & -8 & 4 & -8 & -4 & \boxed{10} \end{array}$$

004 Indica los elementos de esta ecuación.

$$(x + 2) \cdot (x - 5) + 2 = 7 - x^2$$

Términos: x^2; $-3x$; -8; 7; $-x^2$

Primer miembro: $(x + 2) \cdot (x - 5) + 2$

Multiplicando el primer miembro: $x^2 - 3x - 8$

Segundo miembro: $7 - x^2$

Incógnita: x

Grado: 2

Soluciones: $x_1 = -2{,}09$; $x_2 = 3{,}59$

005 ¿Cuáles de los siguientes valores son soluciones de la ecuación $\frac{x + 4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5 - x}{2}$?

a) $x = 1$

b) $x = 5$

c) $x = -2$

d) $x = 2$

La solución de la ecuación es la del apartado d), $x = 2$.

006 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x-1}{7}=\frac{x}{2}$

c) $\frac{4(x-3)}{2}-\frac{5(x+8)}{6}=6(x+3)-2$

b) $\frac{3(x-2)}{2}-(2x-1)=0$

d) $3\left(x-\frac{2}{3}\right)+4(2x-1)=\frac{x+4}{7}-2(x+4)$

a) $\frac{2x-1}{3}-\frac{x-1}{7}=\frac{x}{2}\rightarrow 28x-14-6x+6=21x\rightarrow x=8$

b) $\frac{3(x-2)}{2}-(2x-1)=0\rightarrow 3x-6-4x+2=0\rightarrow x=-4$

c) $\frac{4(x-3)}{2}-\frac{5(x+8)}{6}=6(x+3)-2\rightarrow 12x-36-5x-40=$
$=36x+108-12\rightarrow x=-\frac{172}{29}$

d) $3\left(x-\frac{2}{3}\right)+4(2x-1)=\frac{x+4}{7}-2(x+4)\rightarrow 21x-14+56x-28=$
$=x+4-14x-56\rightarrow x=-\frac{1}{9}$

ACTIVIDADES

001 Calcula estos números combinatorios.

a) $\binom{7}{2}$ b) $\binom{7}{5}$ c) $\binom{12}{3}$ d) $\binom{8}{7}$

a) $\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=21$

c) $\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!\cdot 9!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=220$

b) $\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$

d) $\binom{8}{7}=\frac{8!}{7!\cdot 1!}=8$

002 Desarrolla las siguientes potencias, utilizando el binomio de Newton.

a) $(2x-5)^3$ b) $(x^3+2x)^5$

a) $(2x-5)^3=8x^3-60x^2+150x-125$

b) $(x^3+2x)^5=x^{15}+10x^{13}+40x^{11}+80x^9+80x^7+32x^5$

003 Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x)=x^4+3x^3-2x^2+6x-8$.

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=-1$ d) $x=-4$

a) $P(1)=1^4+3\cdot 1^3-2\cdot 1^2+6\cdot 1-8=0$
Por tanto, $x=1$ es una raíz del polinomio.

b) $P(2)=2^4+3\cdot 2^3-2\cdot 2^2+6\cdot 2-8=36$

c) $P(-1)=(-1)^4+3\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)-8=-18$

d) $P(-4)=(-4)^4+3\cdot(-4)^3-2\cdot(-4)^2+6\cdot(-4)-8=0$
Por tanto, $x=-4$ es una raíz del polinomio.

004 **Calcula las raíces enteras de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 1$ b) $Q(x) = x^3 - 9x^2 - x + 105$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

La raíz entera del polinomio es: 1

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & -1 & 105 \\ 7 & & 7 & -14 & -105 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & \boxed{0} \\ 5 & & 5 & 15 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

Las raíces enteras del polinomio son: $\{-3, 5, 7\}$

005 **Factoriza estos polinomios.**

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$ b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16$ c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x$

a) $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12 = 2(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

b) $3x^3 - 8x^2 - 20x + 16 = (x + 2)(x - 4)(3x - 2)$

c) $2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 12x = x(x + 3)(x + 4)(2x + 1)$

006 **Encuentra las raíces enteras de los polinomios.**

a) $12x + 2x^3 + 4 + 9x^2$ b) $x^4 - 8x^2 - 9$ c) $2x^5 + 10x^4 + 28x^3 + 32x^2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 9 & 12 & 4 \\ -2 & & -4 & -10 & -4 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & -1 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

La única raíz entera es: -2

$$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Esta raíz no es entera.

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -8 & 0 & -9 \\ -3 & & -3 & 9 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 0 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Las raíces enteras son: $\{-3, 3\}$

c) Sacamos factor común: $2x^2(x^3 + 5x^2 + 14x + 16)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 14 & 16 \\ -2 & & -2 & -6 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

Las raíces enteras son: $\{-2, 0\}$

007 **Simplifica estas fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{3x^2 - 5x}{3x}$ b) $\dfrac{20 - 8x + 4x^2}{12 + 8x}$

a) $\dfrac{3x^2 - 5x}{3x} = \dfrac{3x - 5}{3}$

b) $\dfrac{20 - 8x + 4x^2}{12 + 8x} = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x + 3}$

008 Realiza esta operación y simplifica el resultado.

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}$$

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}=\frac{x^2+4x+18}{6x(x+2)}$$

009 Clasifica y resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2-10x+21=0$
b) $3x^2+20x+12=0$
c) $3x^2+9x-4=0$
d) $4x^2-12x+9=0$
e) $-2x^2+5x-8=0$
f) $3x^2-18x=0$
g) $4x^2-36=0$
h) $-8x^2+40=0$
i) $-5x^2+30x=0$
j) $3x^2=2x^2$

a) Ecuación completa:

$$x^2-10x+21=0\rightarrow x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot21}}{2\cdot1}$$

$$\rightarrow x=\frac{10\pm4}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=7\\x_2=3\end{cases}$$

b) Ecuación completa:

$$3x^2+20x+12=0\rightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot3\cdot12}}{2\cdot3}$$

$$\rightarrow x=\frac{-20\pm16}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{3}\\x_2=-6\end{cases}$$

c) Ecuación completa:

$$3x^2+9x-4=0\rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot3\cdot(-4)}}{2\cdot3}$$

$$\rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{129}}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-9+\sqrt{129}}{6}=0{,}39\\x_2=\dfrac{-9-\sqrt{129}}{6}=-3{,}39\end{cases}$$

d) Ecuación completa:

$$4x^2-12x+9=0\rightarrow x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot4\cdot9}}{2\cdot4}$$

$$\rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

e) Ecuación completa:

$$-2x^2+5x-8=0\rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-2)\cdot(-8)}}{2\cdot(-2)}\rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{-39}}{-4}$$

No tiene soluciones reales.

f) Ecuación incompleta:

$3x^2 - 18x = 0 \rightarrow 3x(x - 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

g) Ecuación incompleta:

$4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x = \sqrt{9} \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

h) Ecuación incompleta:

$-8x^2 + 40 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5}$

i) Ecuación incompleta:

$-5x^2 + 30x = 0 \rightarrow 5x(-x + 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

j) Ecuación incompleta:

$3x^2 = 2x^2 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

010 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0$

b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$

c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$

e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0$

a) $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 33 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-33)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 20}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{11}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) $(2 - x)(5x + 1) - (3 + x)(x - 1) + 8x^2 - 15x + 3 = 0$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{4} = 2$$

c) $(x + 2)(x - 3) - x(2x + 1) + 6x = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No tiene solución real.

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) - 2 = 3x(x + 4)$

$0 = 0 \rightarrow$ No es una ecuación, es una identidad.

e) $(2 - x)(2x + 2) - 4(x - 3) - 5x = 0 \rightarrow -2x^2 - 7x + 16 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 16}}{2 \cdot (-2)} = \frac{7 \pm \sqrt{177}}{-4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{177}}{4} = 1{,}58 \\ x_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{177}}{4} = -5{,}08 \end{cases}$$

011 **Determina, sin resolver la ecuación, el número de soluciones que tiene.**

a) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$
b) $9x^2 + 30x + 25 = 0$
c) $-5x^2 + 9x - 6 = 0$
d) $2x^2 - x - 3 = 0$
e) $-x^2 + 9x - 2 = 0$
f) $0{,}34x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$

Calculamos el discriminante:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = -39 < 0$. No tiene solución real.

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 0$. Tiene una solución.

c) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-6) = -39 < 0$. No tiene solución real.

d) $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$. Tiene dos soluciones.

e) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 73 > 0$. Tiene dos soluciones.

f) $\Delta = b^2 - 4ac = 0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}34 \cdot (-1) = 1{,}61 > 0$. Tiene dos soluciones.

012 **¿Cuántas soluciones pueden tener estas ecuaciones bicuadradas? Resuélvelas.**

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$
b) $x^2(x^2 - 1) = 16(x^2 - 1)$
c) $25x^2(x^2 - 1) + 11(x^4 + 1) - 7 = 0$

Como las ecuaciones son de cuarto grado, pueden tener un máximo de cuatro soluciones.

a) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 4z^2 - 37z + 9 = 0$

$$z = \frac{-(-37) \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{37 \pm 35}{8} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$$

$$z_2 = \frac{1}{4} \rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} \qquad x_4 = \frac{1}{2}$$

b) $x^2(x^2 - 1) = 16(x^2 - 1) \rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \xrightarrow{z = x^2} z^2 - 17z + 16 = 0$

$$z = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 15}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$$z_1 = 1 \longrightarrow x_1 = -1 \qquad x_2 = 1$$

$$z_2 = 16 \rightarrow x_3 = -4 \qquad x_4 = 4$$

c) $25x^2(x^2 - 1) + 11(x^4 + 1) - 7 = 0$

$$\rightarrow 36x^4 - 25x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 36z^2 - 25z + 4 = 0$$

$$z = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 4}}{2 \cdot 36} = \frac{25 \pm 7}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{4} \\ z_2 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{1}{4} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{4}{9} \rightarrow x_3 = -\frac{2}{3} \qquad x_4 = \frac{2}{3}$$

013 Halla la solución de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+7}{x+1}$

b) $\frac{4}{x^4} + \frac{3-x^2}{x^2} = 0$

a) $x + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+7}{x+1} \rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

b) $\frac{4}{x^4} + \frac{3-x^2}{x^2} = 0 \rightarrow -x^4 + 3x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} -z^2 + 3z + 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$z_1 = -1 \rightarrow$ No tiene solución real.

$z_2 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

014 Resuelve estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} = 6$

b) $x^2 - \sqrt{3x^2-2} = 4$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+12} = \sqrt{8x+4}$

d) $2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{4x-3} + 5 = 0$

a) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} = 6 \rightarrow 2x - 1 = x + 4 - 12\sqrt{x+4} + 36$

$\rightarrow (x-41)^2 = (-12\sqrt{x+4})^2 \rightarrow x^2 - 226x + 1.105 = 0$

$$x = \frac{-(-226) \pm \sqrt{(-226)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1.105}}{2 \cdot 1} = \frac{226 \pm 216}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 221 \end{cases}$$

La solución es $x = 5$.

b) $x^2 - \sqrt{3x^2-2} = 4 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 3x^2 - 2 \rightarrow x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

$\xrightarrow{z=x^2} z^2 - 11z + 18 = 0$

$$z = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

$z_2 = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt{2} \qquad x_4 = -\sqrt{2}$

Las soluciones son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$.

c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=\sqrt{8x+4} \rightarrow x+2\sqrt{x^2+12x}+x+12=8x+4$
$\rightarrow 4x^2+48x=36x^2-96x+64 \rightarrow 2x^2-9x+4=0$

$$x=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 2\cdot 4}}{2\cdot 2}=\frac{9\pm 7}{4}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=4\end{cases}$$

La solución es $x=4$.

d) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}+5=0 \rightarrow (2\sqrt{x+1})^2=(3\sqrt{4x-3}-5)^2$
$\rightarrow (6-32x)^2=(-30\sqrt{4x-3})^2 \rightarrow 64x^2-249x+171=0$

$$x=\frac{-(-249)\pm\sqrt{(-249)^2-4\cdot 64\cdot 171}}{2\cdot 64}=\frac{249\pm 135}{256}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{57}{64}\\ x_2=3\end{cases}$$

La solución es $x=3$.

015 **Estas ecuaciones aparecen factorizadas. Encuentra su solución.**

a) $3(x-1)(x+2)(x-4)=0$

b) $x(x-2)(x+3)(x-12)=0$

c) $(2x-1)(4x+3)(x-2)=0$

d) $2x^2(x-3)^2(3x+4)=0$

e) $5x(x-1)^2(2x+7)^3=0$

a) $x_1=1 \quad x_2=-2 \quad x_3=4$

b) $x_1=0 \quad x_2=2 \quad x_3=-3 \quad x_4=12$

c) $x_1=\dfrac{1}{2} \quad x_2=-\dfrac{3}{4} \quad x_3=2$

d) $x_1=0 \quad x_2=3 \quad x_3=-\dfrac{4}{3}$

e) $x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=-\dfrac{7}{2}$

016 **Factoriza las ecuaciones y resuélvelas.**

a) $x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$

b) $x^5-6x^4+10x^3-6x^2+9x=0$

c) $x^4+8x^3+17x^2+8x+16=0$

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)=0$
$x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=3 \quad x_4=-4$

b) $x(x-3)^2(x^2+1)=0$
$x_1=0 \quad x_2=3$

c) $(x+4)^2(x^2+1)=0$
$x=-4$

017 **Escribe una ecuación que tenga como soluciones: $x=3$, $x=2$ y $x=-7$. ¿Cuál es el mínimo grado que puede tener?**

Respuesta abierta.

$$(x-3)(x-2)(x+7)=0$$

El mínimo grado que puede tener es 3.

018 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{array}\right\}$

Escoge el método que consideres más adecuado.

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 0 \\ 6x - 9y = -6 \end{array}\right\} \rightarrow x = -\frac{3y}{2}$$

$$6 \cdot \frac{-3y}{2} - 9y = -6 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{-3 \cdot \frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 5p + 2q = 1 \\ 15p - 10q = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 3} \left.\begin{array}{r} -15p - 6q = -3 \\ 15p - 10q = 11 \end{array}\right\}$$

Sumamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -15p - 6q = -3 \\ 15p - 10q = 11 \\ \hline -16q = 8 \end{array} \rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$5p + 2 \cdot \frac{-1}{2} = 1 \rightarrow p = \frac{2}{5}$$

019 **Halla las soluciones de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) = 15 \\ -x + y + 3(x - 2y + 6) = 4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-5}{3} + \dfrac{2y-1}{5} = 2 \\ 3(2 - x) + 4(y + 1) = 36 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 3(2x + y - 1) - 6(4x - y) = 15 \\ -x + y + 3(x - 2y + 6) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x + y = 2 \\ 2x - 5y = -14 \end{array}\right\}$$

Resolvemos por reducción:

$$\begin{array}{r} -2x + y = 2 \\ 2x - 5y = -14 \\ \hline -4y = -12 \end{array} \rightarrow y = 3$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$$-2x + 3 = 2 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-5}{3}+\dfrac{2y-1}{5}=2\\ 3(2-x)+4(y+1)=36\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}5x+6y=58\\ -3x+4y=26\end{array}\right\}$

Resolvemos por reducción:

$$\left.\begin{array}{r}5x+6y=58\\ -3x+4y=26\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot 3}\\ \xrightarrow{\cdot 5}\end{array}\begin{array}{r}15x+18y=174\\ \underline{-15x+20y=130}\\ 38y=304\end{array}\rightarrow y=8$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

$5x+6\cdot 8=58\rightarrow x=2$

020 **Clasifica estos sistemas de ecuaciones, y resuélvelos por el método más adecuado.**

a) $\left.\begin{array}{r}8x-2y=4\\ -12x+3y=-6\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}p+2q=1\\ 3p-q=11\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}8x-2y=4\\ -12x+3y=-6\end{array}\right\}\rightarrow y=4x-2$

Sistema compatible indeterminado: $y=4x-2$.

b) Resolvemos el sistema por reducción:

$$\left.\begin{array}{r}p+2q=1\\ 3p-q=11\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-3)}\begin{array}{r}-3p-6q=-3\\ \underline{3p-q=11}\\ -7q=8\end{array}\rightarrow q=-\frac{8}{7}$$

Sustituimos en una de las ecuaciones:

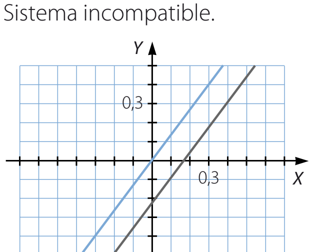
$p-\dfrac{16}{7}=1\rightarrow p=\dfrac{23}{7}$

Sistema compatible determinado.

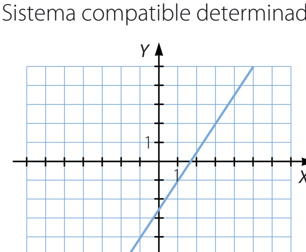
021 **Decide de qué tipo son estos sistemas de ecuaciones y representa gráficamente su solución.**

a) $\left.\begin{array}{r}-12x+9y=-2\\ 8x-6y=0\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}21a-14b=35\\ -12a+8b=-20\end{array}\right\}$

a) Sistema incompatible.



b) Sistema compatible determinado.



022 **Resuelve los sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 202 \\ x + y = 20 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x^2 + xy = 24 \\ x + 2y = 13 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 202 \\ x + y = 20 \end{array}\right\} \to x = 20 - y$$

$$(20 - y)^2 + y^2 = 202 \to y^2 - 20y + 99 = 0 \to \begin{cases} y_1 = 11 \\ y_2 = 9 \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación:

$x_1 = 20 - 11 = 9$

$x_2 = 20 - 9 = 11$

b) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + xy = 24 \\ x + 2y = 13 \end{array}\right\} \to x = 13 - 2y$$

$$(13 - 2y)^2 + (13 - 2y)y = 24 \to 2y^2 - 39y + 145 = 0 \to \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = \dfrac{29}{2} \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación:

$x_1 = 13 - 2 \cdot 5 = 3$ $\quad x_2 = 13 - 2 \cdot \dfrac{29}{2} = -16$

023 **Calcula dos números, sabiendo que su suma es 42 y la suma de sus inversos es $\dfrac{7}{72}$.**

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 42 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{72} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 42 - y \\ 72y + 72x = 7xy \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por sustitución:

$$72y + 72(42 - y) = 7(42 - y)y \to y^2 - 42y + 432 = 0 \to \begin{cases} y_1 = 18 \\ y_2 = 24 \end{cases}$$

$x_1 = 42 - 18 = 24$

$x_2 = 42 - 24 = 18$

Los números pedidos son 18 y 24.

024 **Resuelve la siguiente inecuación: $\dfrac{1}{2}x - 4 \le 3x + 1$**

Razona los pasos realizados para resolverla.

- Resolvemos la ecuación: $\dfrac{1}{2}x - 4 = 3x + 1 \to x = -2$
- Tomamos un punto cualquiera de cada intervalo:
  $x = -4$ de $(-\infty, -2)$ $\quad x = 0$ de $(-2, +\infty)$

- Comprobamos si esos puntos son soluciones:

  Si $x = -4 \rightarrow -6 = \dfrac{-4}{2} - 4 \leq 3 \cdot (-4) + 1 = -11 \rightarrow (-\infty, -2)$ es solución.

  Si $x = 0 \rightarrow -4 \geq 1 \rightarrow (-2, +\infty)$ no es solución:
- Comprobamos si el extremo es solución.

  Si $x = -2 \rightarrow -5 = \dfrac{-2}{2} - 4 \leq 3 \cdot (-2) + 1 = -5 \rightarrow x = -2$ es solución.

Por tanto, la solución de la inecuación es el intervalo $(-\infty, -2]$.

025 **Encuentra el error cometido en la resolución de esta inecuación.**

$$2x \leq 8x - 12$$
$$-6x \leq -12 \;\rightarrow\; 6x \leq 12 \;\rightarrow\; x \leq 2 \;\rightarrow\; (-\infty, 2)$$

Al pasar del segundo al tercer paso, se ha multiplicado la ecuación por -1, y se debería haber cambiado el sentido de la desigualdad, por las relaciones de orden que cumplen los números reales.

026 **Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita.**

a) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$
b) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$
c) $x^2 - 9x > 0$
d) $x^2 - 9 < 0$
e) $x^2 + 2 \leq 0$
f) $(x - 3)(x + 4) \geq 0$
g) $(x + 3)x < 4$
h) $x^2 - 30 > x$
i) $x^2 + x + 3 < 0$
j) $4x^2 - 4x + 1 < 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = 0 \qquad x = 1,5 \qquad x = 3$

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 > 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 1,5 \rightarrow 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 + 2 < 0 \rightarrow (1, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 3 \rightarrow 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 > 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[1, 2]$.

b) Se deduce del apartado anterior que las soluciones de la inecuación son:

$(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

c) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -1 \qquad x = 1 \qquad x = 10$

Si $x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 9 \cdot (-1) > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 1 \rightarrow 1^2 - 9 \cdot 1 < 0 \rightarrow (0, 9)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 \cdot 10 > 0 \rightarrow (9, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 0) \cup (9, +\infty)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 9 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 9 < 0 \rightarrow (-3, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 3)$.

e) El primer miembro de la inecuación siempre será positivo.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

f) Resolvemos la ecuación: $(x - 3)(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 - 3)(-10 + 4) > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3)(0 + 4) < 0 \rightarrow (-4, 3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3)(10 + 4) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son también de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$.

g) Resolvemos la ecuación: $(x + 3)x = 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10 + 3) \cdot (-10) - 4 > 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow (0 - 3) \cdot 0 - 4 < 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow (10 - 3) \cdot 10 + 4 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-4, 1)$.

h) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 30 < 0 \rightarrow (-5, 6)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 30 > 0 \rightarrow (6, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-5, 6)$.

i) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

j) El primer miembro de la inecuación es siempre mayor o igual que cero.
Por tanto, la inecuación no tiene solución.

027 **Resuelve estas inecuaciones de grado superior, siguiendo el método utilizado para las inecuaciones de segundo grado.**

a) $(x-2)(x-3)(x^2-2) \geq 0$ c) $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 < 0$

b) $x(x-4)(x+1)(x^3-1) \leq 0$ d) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 > 0$

a) Resolvemos la ecuación: $(x-2)(x-3)(x^2-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 1{,}5 \qquad x = 2{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10-2)(-10-3)((-10)^2-2) > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow (0-2)(0-3)(0^2-2) < 0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ no es solución.

Si $x = 1{,}5 \rightarrow (1{,}5-2)(1{,}5-3)(1{,}5^2-2) > 0 \rightarrow \left(\sqrt{2}, 2\right)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow (2{,}5-2)(2{,}5-3)(2{,}5^2-2) < 0 \rightarrow (2, 3)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow (10-2)(10-3)(10^2-2) > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right] \cup [3, +\infty)$.

b) Resolvemos la ecuación: $x(x-4)(x+1)(x^3-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -0{,}5 \qquad x = 0{,}5 \qquad x = 2 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -10 \cdot (-10-4)(-10+1)((-10)^3-1) > 0 \rightarrow (-\infty, -1)$ no es solución.

Si $x = -0{,}5 \rightarrow -0{,}5 \cdot (-0{,}5-4)(-0{,}5+1)((-0{,}5)^3-1) < 0 \rightarrow (-1, 0)$ es solución.

Si $x = 0{,}5 \rightarrow 0{,}5 \cdot (0{,}5-4)(0{,}5+1)(0{,}5^3-1) > 0 \rightarrow (0, 1)$ no es solución.

Si $x = 2 \rightarrow 2 \cdot (2-4)(2+1)(2^3-1) < 0 \rightarrow (1, 4)$ es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10 \cdot (10-4)(10+1)(10^3-1) > 0 \rightarrow (4, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-1, 0] \cup [1, 4]$.

c) Resolvemos la ecuación: $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = 0 \rightarrow 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 < 0 \rightarrow (-\infty, 1)$ es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 6 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, 1)$.

d) Resolvemos la ecuación: $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 9x - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x_4 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 2{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^4 - 5 \cdot (-10)^3 + 4 \cdot (-10)^2 + 9 \cdot (-10) - 9 > 0$

$\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x = 0 \rightarrow 0^4 - 5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 9 < 0 \rightarrow \left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, 1\right)$ no es solución.

Si $x = 2 \rightarrow 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 9 > 0 \rightarrow \left(1, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ es solución.

Si $x = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5^4 - 5 \cdot 2{,}5^3 + 4 \cdot 2{,}5^2 + 9 \cdot 2{,}5 - 9 < 0 \rightarrow \left(\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, 3\right)$ no es solución.

Si $x = 10 \rightarrow 10^4 - 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 - 9 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ es solución.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(1, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

028 **Representa en el plano la región solución de estas inecuaciones.**

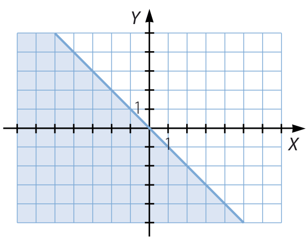
a) $x + y < 0$

b) $x - y \leq 0$

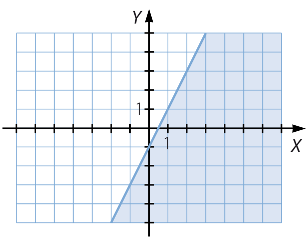
c) $2x - y > 1$

d) $y - 2 \geq 0$

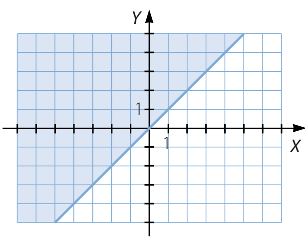
a)



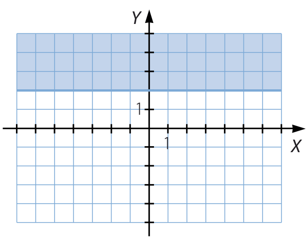
c)



b)



d)



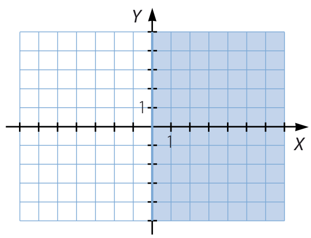
029 Dibuja las siguientes regiones del plano.

a) Los puntos del plano con abscisa positiva.

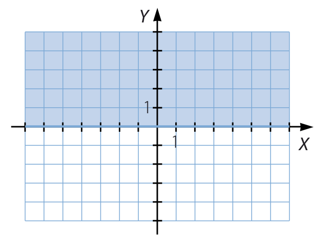
b) Los puntos del plano con ordenada mayor o igual que cero.

Encuentra una inecuación que tenga cada una de esas regiones como conjunto solución.

a) $x > 0$



b) $y \geq 0$



030 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x+3>5 \\ 2x-1>11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 15+7x \geq 8 \\ 3x<14x+6 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+3>5 \\ 2x-1>11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x>2 \\ x>6 \end{array}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $(2, +\infty)$.

b) $\left.\begin{array}{r} 15+7x \geq 8 \\ 3x<14x+6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x > -\dfrac{6}{11} \end{array}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $\left(-\dfrac{6}{11}, +\infty\right)$.

031 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x<6 \\ 6x^2+4x \geq 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+x^2<3x^2+4 \\ 7x^2+x \geq 2x-6 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x<6 \\ 6x^2+4x \geq 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{3-\sqrt{33}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \\ \dfrac{-2-\sqrt{22}}{6} \leq x \leq \dfrac{-2+\sqrt{22}}{6} \end{array}\right\}$

Elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones: $\left[\dfrac{-2-\sqrt{22}}{6}, \dfrac{-2+\sqrt{22}}{6}\right]$

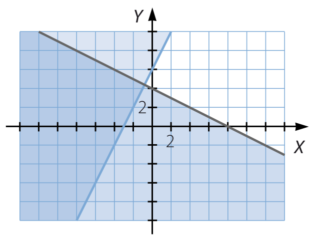
b) $\left.\begin{array}{r} 2x+x^2<3x^2+4 \\ 7x^2+x \geq 2x-6 \end{array}\right\} \rightarrow$ Siempre se cumplen.

Son ciertas para todos los números reales.

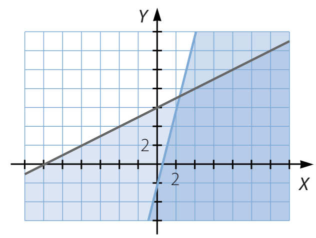
032 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y<4 \\ -2x+y\geq 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 12x-3y\geq 7 \\ -x+2y\leq 12 \end{array}\right\}$

a)



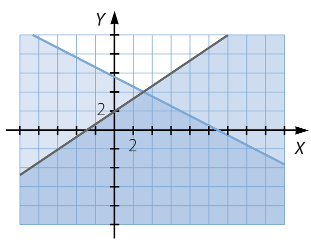
b)



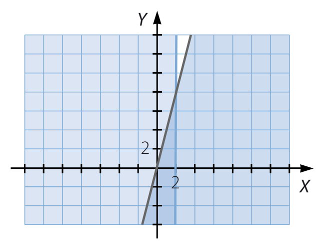
033 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+6>0 \\ x+2y<11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4x-y\geq 0 \\ x<2 \end{array}\right\}$

a)



b)



034 Calcula 3!, 4!, 5!, 6! y 7!, y comprueba si son ciertas las siguientes expresiones.

a) $2!\cdot 3!=6!$ b) $3!+4!=7!$ c) $6!-2!=4!$

$3!=6$ $4!=24$ $5!=120$ $6!=720$ $7!=5.040$

a) $2!\cdot 3!=12$ $6!=720$ b) $3!+4!=30$ $7!=5.040$ c) $6!-2!=718$ $4!=24$

Por tanto, ninguna expresión es cierta.

035 Simplifica las expresiones sin hallar previamente el valor de los factoriales.

a) $\dfrac{6!}{4!}$ b) $\dfrac{9!}{6!}$ c) $\dfrac{(a+2)!}{a!}$ d) $\dfrac{8!}{4!}$ e) $\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}$ f) $\dfrac{x!}{(x-3)!}$

a) $\dfrac{6!}{4!}=6\cdot 5=30$

b) $\dfrac{9!}{6!}=9\cdot 8\cdot 7=504$

c) $\dfrac{(a+2)!}{a!}=(a+2)(a+1)=a^2+3a+2$

d) $\dfrac{8!}{4!}=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1.680$

e) $\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$

f) $\dfrac{x!}{(x-3)!}=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$

036 Calcula las incógnitas y comprueba estas igualdades.

a) $\binom{8}{x}=\binom{8}{6}$ b) $\binom{x}{3}=\binom{x}{7}$ c) $\binom{a}{x}=\binom{a}{5}$

a) No consideramos la solución trivial $x = 6$.

$$\binom{8}{6}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\binom{8}{2}$$

b) $$\binom{10}{7}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\binom{10}{3}$$

c) $$\binom{a}{5}=\frac{a!}{(a-5)\cdot 5!}=\binom{a}{a-5}$$

037 Completa los siguientes desarrollos.

a) $(3x+2)^4 = 81x^4 + \square x^3 + \square + 96\square + 16$

b) $(3-4y)^3 = 27 - \square y + 144\square + \square$

c) $(2p-q^2)^4 = 16p^4 - 32p^{\square}q^{\square} + 24\,p^{\square}q^{\square} + \square + q^{\square}$

d) $(3mn-p^2)^3 = \square m^3n^{\square} - 27m^{\square}n^{\square}p^{\square} + \square mnp^4 - p^{\square}$

a) $(3x+2)^4 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$

b) $(3-4y)^3 = 27 - 108y + 144y^2 - 64y^3$

c) $(2p-q^2)^4 = 16p^4 - 32p^3q^2 + 24p^2q^4 - 8pq^6 + q^8$

d) $(3mn-p^2)^3 = 27m^3n^3 - 27m^2n^2p^2 + 9mnp^4 - p^6$

038 Sabiendo que $5{,}1 = 5 + 0{,}1$ y que $0{,}99 = 1 - 0{,}01$; calcula el valor de $5{,}1^3$ y $0{,}99^2$ empleando la fórmula del binomio de Newton.

$$5{,}1^3 = (5+0{,}1)^3 = 5^3 + 3\cdot 5^2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 5\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3 =$$
$$= 125 + 7{,}5 + 0{,}15 + 0{,}001 = 132{,}651$$

$$0{,}99^2 = (1-0{,}01) = 1^2 - 2\cdot 1\cdot 0{,}01 + 0{,}01^2 = 1 - 0{,}02 + 0{,}0001 = 0{,}9801$$

039 Determina los términos que se indican en estos desarrollos.

a) Séptimo término de $(x+2y)^{10}$.

b) Décimo término de $(x^2-3)^{15}$.

c) Decimosexto término de $(2p+q^2)^{28}$.

d) Decimocuarto término de $(-a+2)^{21}$.

a) $13.440x^4y^6$

b) $-98.513.415x^{12}$

c) $306.726.174.720p^{13}q^{30}$

d) $1.666.990.080a^8$

040 Halla las potencias cuyo desarrollo da lugar a estas expresiones.

a) $4x^2 + 20x + 25$

b) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

c) $81p^4 + 216p^3 + 216p^2 + 96p + 16$

a) $(2x+5)^2$ b) $(3x-2)^3$ c) $(3p+2)^4$

041 Encuentra los términos indicados de los siguientes desarrollos.

a) El término central de $(3p^2 - 2q)^{12}$.

b) El término que contiene x^{12} en $(2x^2 + 1)^9$.

c) El término que contiene x^{11} en $\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^{10}$.

a) $43.110.144p^{12}q^6$ b) $5.376x^{12}$ c) $-960x^{11}$

042 El séptimo y el octavo términos del desarrollo de una potencia son $1.792x^2y^{12}$ y $1.024xy^{14}$, respectivamente. Intenta descubrir de qué binomio hemos calculado una potencia.

$(x + 2y^2)^8$

043 Comprueba si $M(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ es divisible por $x - 2$ y, en caso afirmativo, encuentra un polinomio $N(x)$ que permita escribir $M(x)$ de la forma $M(x) = (x - 2) \cdot N(x)$.

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & & 4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio $N(x)$ es el cociente:

$N(x) = 2x^2 - x + 2$

044 Determina las raíces de los siguientes polinomios.

a) $(x - 3)(x + 5)(x - 2)$

b) $x(x - 2)^2(2x + 1)$

c) $(2x - 1)(3x + 2)(x + 3)^2$

d) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

e) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$

f) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8$

g) $2x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4$

h) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64$

a) $x_1 = -5$ $x_2 = 2$ $x_3 = 3$

b) $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = 0$ $x_3 = 2$

c) $x_1 = -3$ $x_2 = -\frac{2}{3}$ $x_3 = \frac{1}{2}$

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 4$

e)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 8 & 17 & 10 \\
-1 & & -1 & -7 & -10 \\ \hline
 & 1 & 7 & 10 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -10 & \\ \hline
 & 1 & 5 & \boxed{0} & \\
-5 & & -5 & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$x_1 = -5 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -1$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & 7 & -22 & -8 \\
2 & & 6 & 26 & 8 \\ \hline
 & 3 & 13 & 4 & \boxed{0} \\
-4 & & -12 & -4 & \\ \hline
 & 3 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$3x + 1 = 0$

$x = -\frac{1}{3}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\frac{1}{3} \qquad x_3 = 2$

g)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -11 & 21 & -16 & 4 \\
1 & & 2 & -9 & 12 & -4 \\ \hline
 & 2 & -9 & 12 & -4 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & -10 & 4 & \\ \hline
 & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\
2 & & 4 & -2 & & \\ \hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

h)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -12 & 32 & 64 \\
-2 & & -2 & 12 & 0 & -64 \\ \hline
 & 1 & -6 & 0 & 32 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & 16 & -32 & \\ \hline
 & 1 & -8 & 16 & \boxed{0} & \\
4 & & 4 & -16 & & \\ \hline
 & 1 & -4 & \boxed{0} & & \\
4 & & 4 & & & \\ \hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$

045 De un polinomio de segundo grado, $P(x)$, se sabe que $P(1) = -6$, $P(0) = -3$ y una de sus raíces es 3. Determínalo.

Obtén el valor de m para que el polinomio $mx^3 - 6x^2 - 4x + 8$ tenga 2 por raíz.

$(x - 3)(ax + b) = 0$

Como $P(1) = -6$:

$-2a - 2b = -6$

Como $P(0) = -3$:

$-3b = -3$

Por tanto, resulta que $a = 2$ y $b = 1$.

El polinomio pedido es $2x^2 - 5x - 3$.

Y como 2 es raíz:

$m \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 0 \rightarrow m = 3$

046 **Obtén el valor de n para que el polinomio $2x^3 + 2x^2 + nx + 3$ tenga -3 por raíz.**

Como -3 es raíz:

$2 \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 + n \cdot (-3) + 3 = 0 \rightarrow n = -11$

047 **¿Qué valor debe tomar a para que el resto de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre $x - 4$ sea 67?**

Dividimos el polinomio entre $x - 4$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & -3 & -a \\ 4 & & 4 & 16+4a & 52+16a \\ \hline & 1 & 4+a & 13+4a & \boxed{52+15a} \end{array}$$

Igualamos el resto a 67:

$52 + 15a = 67 \rightarrow a = 1$

048 **Determina a y b de manera que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx - 6$ sea divisible por $x - 2$ y por $x + 3$.**

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ 2 & & 2 & 4+2a & 8+4a+2b \\ \hline & 1 & 2+a & 4+2a+b & \boxed{2+4a+2b} \end{array}$$

Dividimos el polinomio entre $x + 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ -3 & & -3 & 9-3a & -27+9a-3b \\ \hline & 1 & -3+a & 9-3a+b & \boxed{-33+9a-3b} \end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2+4a+2b=0 \\ -33+9a-3b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 2 \qquad b = -5$$

049 Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean las que se indican en cada caso.

a) 2, 3 y 5 b) −2, −1 y 4 c) 2, 2 y −4

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$

b) $Q(x) = (x - 4)(x + 2)(x + 1)$

c) $R(x) = (x + 4)(x - 2)^2$

050 Encuentra un polinomio $P(x)$ de segundo grado cuyas raíces sean 1 y −2 y tal que $P(3) = 30$.

$$\left.\begin{array}{l} Q(x) = (x - 1)(x + 2) \\ Q(3) = 10 \end{array}\right\} \rightarrow P(x) = 3(x - 1)(x + 2)$$

051 Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 3, −1 y −1, y tal que $Q(2) = -18$.

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = (x - 3)(x + 1)^2 \\ P(2) = -9 \end{array}\right\} \rightarrow Q(x) = 2(x - 3)(x + 1)^2$$

052 Opera y simplifica.

a) $\frac{3}{a+2} - \frac{1}{2a+4} - \frac{2}{3a+6}$ b) $\frac{3-2p}{p+2} + \frac{1+p}{p+3}$ c) $\frac{3}{2a-6} + \frac{1}{3-a}$

a) $\frac{3}{a+2} - \frac{1}{2a+4} - \frac{2}{3a+6} = \frac{11}{6(a+2)}$

b) $\frac{3-2p}{p+2} + \frac{1+p}{p+3} = \frac{11-p^2}{(p+2)(p+3)}$

c) $\frac{3}{2a-6} + \frac{1}{3-a} = \frac{1}{2(a-3)}$

053 Realiza las operaciones y simplifica el resultado.

a) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12}$ c) $\frac{4}{a+b} - \frac{5}{a-b}$

b) $\frac{2-x}{x^2-3x} - \frac{1}{4x-12} + \frac{5}{6x-18}$ d) $\frac{4-x^2}{x+2} + \frac{9-x^2}{x+3}$

a) $\frac{3x-1}{4x+12} - \frac{x+2}{4x-12} = \frac{2x^2-15x-3}{4(x+3)(x-3)}$

b) $\frac{2-x}{x^2-3x} - \frac{1}{4x-12} + \frac{5}{6x-18} = \frac{5x-24}{12x(3-x)}$

c) $\frac{4}{a+b} - \frac{5}{a-b} = \frac{a+9b}{(a+b)(b-a)}$

d) $\frac{4-x^2}{x+2} + \frac{9-x^2}{x+3} = 5 - 2x$

054 Comprueba si el número indicado en cada apartado es solución de la ecuación.

a) $2(x^2 - x - 2) + 6(3 - x) - 2(x - 3) - 8 = 0$
$x = -2$

b) $2(-x - 2)(1 - x) - 2(x + 1) = 0$
$x = \sqrt{3}$

c) $(2 + x)5x - (3x - 4) + 3(x - 1) - x^2 + 2(x + 4) = 0$
$x = -\dfrac{3}{2}$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) + 11 = 0$
$x = \dfrac{1}{2}$

a) No, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
b) Sí, las soluciones son $x_1 = -\sqrt{3}$ y $x_2 = \sqrt{3}$.
c) Sí, la solución es $x = -\dfrac{3}{2}$.
d) No, esta ecuación no tiene solución real.

055 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores.

a) $\dfrac{2 - x^2}{3} + \dfrac{3 - x}{4} + \dfrac{23}{12} = 0$

b) $\dfrac{2 - x}{2} + \dfrac{3x^2 - 2x}{3} + \dfrac{19x}{6} = 0$

c) $\dfrac{x - 2x^2}{2} = 1 - \dfrac{3x + x^2}{4}$

d) $\dfrac{x^2 + x}{5} + \dfrac{(x + 2)x}{2} = 0$

a) $\dfrac{2 - x^2}{3} + \dfrac{3 - x}{4} + \dfrac{23}{12} = 0 \rightarrow 8 - 4x^2 + 9 - 3x + 23 = 0 \rightarrow -4x^2 - 3x + 40 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 40}}{2 \cdot (-4)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{649}}{8} \\ x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{649}}{8} \end{cases}$$

b) $\dfrac{2 - x}{2} + \dfrac{3x^2 - 2x}{3} + \dfrac{19x}{6} = 0 \rightarrow \dfrac{6 - 3x}{6} + \dfrac{6x^2 - 4x}{6} + \dfrac{19x}{6} = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$$

c) $\dfrac{x - 2x^2}{2} = 1 - \dfrac{3x + x^2}{4} \rightarrow 2x - 4x^2 = 4 - 3x - x^2 \rightarrow 3x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

No tiene solución real.

d) $\dfrac{x^2 + x}{5} + \dfrac{(x + 2)x}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 2x + 5x^2 + 10x = 0 \rightarrow 7x^2 + 12x = 0$

$x(7x + 12) = 0 \rightarrow x_1 = -\dfrac{12}{7}$ $\qquad x_2 = 0$

056 Busca las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas y comprueba, al menos, una de las soluciones.

a) $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{3x+1}{4}+\dfrac{1}{6}=0$

b) $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{1-4x}{3}+\dfrac{8}{15}=0$

c) $\dfrac{2-x}{2x}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3x^2-2x}{3x}$

a) $\dfrac{1-x^2}{x}+\dfrac{3x+1}{4}+\dfrac{1}{6}=0 \rightarrow 12-12x^2+9x^2+3x+2x=0 \rightarrow -3x^2+5x+12=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-3)\cdot 12}}{2\cdot(-3)} \rightarrow x=\frac{-5\pm 13}{-6} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{4}{3} \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$\frac{1-3^2}{3}+\frac{3\cdot 3+1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{-8}{3}+\frac{10}{4}+\frac{1}{6}=0$$

b) $\dfrac{x^2+4}{x}+\dfrac{1-4x}{3}+\dfrac{8}{15}=0 \rightarrow 15x^2+60+5x-20x^2+8x=0$

$\rightarrow -5x^2+13x+60=0$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} \rightarrow x=\frac{-13\pm 37}{-10} \rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{12}{5} \\ x_2=5 \end{cases}$$

$$\frac{5^2+4}{5}+\frac{1-4\cdot 5}{3}+\frac{8}{15}=\frac{29}{5}-\frac{19}{3}+\frac{8}{15}=0$$

c) $\dfrac{2-x}{2x}=\dfrac{5}{6}-\dfrac{3x^2-2x}{3x} \rightarrow 6-3x=5x-6x^2+4x \rightarrow x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \rightarrow x=1$$

$$\frac{2-1}{2\cdot 1}-\frac{5}{6}+\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0$$

057 Resuelve las ecuaciones de segundo grado sin utilizar la fórmula correspondiente.

a) $x(x+3)-2(x^2-4)-8=0$ b) $(2x+3)^2-8(2x+1)=0$

a) $x(x+3)-2(x^2-4)-8=0$

Operamos: $-x^2+3x=0$

Es una ecuación incompleta cuyas soluciones son $x_1=0$ y $x_2=3$.

b) $(2x+3)^2-8(2x+1)=0$

Operamos: $4x^2-4x+1=0$

Factorizamos el primer miembro de la ecuación utilizando las igualdades notables:
$(2x-1)^2=0$

La solución es $x=\dfrac{1}{2}$.

058 La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es −21.

a) Escribe la ecuación correspondiente.
b) Determina dichas soluciones.

a) $x(4 - x) = -21$

b) $-x^2 + 4x + 21 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 21}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

Las soluciones son −3 y 7.

059 Calcula k en cada caso.

a) $x^2 + kx + 25 = 0$ tiene una solución.
b) $x^2 - 4x + k = 0$ no tiene soluciones.
c) $kx^2 + 8x + 5 = 0$ tiene dos soluciones.

a) $k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 0 \rightarrow k = 10$

b) $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \rightarrow (4, 8)$

c) $8^2 - 4 \cdot k \cdot 5 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \dfrac{16}{5}\right)$

060 Resuelve la ecuación de segundo grado utilizando las igualdades notables. Relaciona el resultado con el número de soluciones.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow$ Tiene una solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

061 ¿Qué valor debe tomar k para que los números indicados sean soluciones de las ecuaciones?

a) $2x^2 + 5x + k = 0$, $x = \dfrac{3}{2}$

b) $k(x^2 - 5x + 1) - 6(x + 2) + 4(k - x) - 65 = 0$, $x = -2$

a) $2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 5 \cdot \dfrac{3}{2} + k = 0 \rightarrow k = -12$

b) $k[(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 1] - 6 \cdot ((-2) + 2) + 4 \cdot (k - (-2)) - 65 = 0 \rightarrow k = 3$

062 ¿Qué valores deben tomar a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga dos soluciones, $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

Sustituimos las dos soluciones en la ecuación y formamos un sistema donde las incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{r} 25a + 5b - 30 = 0 \\ 9a - 3b - 30 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot 5} \end{array} \left.\begin{array}{r} 75a + 15b = 90 \\ 45a - 15b = 150 \end{array}\right\}$$

$$120a \qquad = 240 \rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow 9 \cdot 2 - 3b - 30 = 0 \rightarrow b = -4$$

063 **Di, sin resolverlas, cuál es la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, y luego calcúlalas para comprobarlo.**

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Partimos de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son a y b: $(x - a)(x - b) = 0$

Después, multiplicamos: $x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Por tanto, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

a) El producto de las raíces es -14 y la suma es -5.
Las raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 2$.

b) El producto de las raíces es 0 y la suma es -1.
Las raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

c) El producto de las raíces es $-\frac{10}{9}$ y la suma es -1.
Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

d) El producto de las raíces es $\frac{1}{4}$ y la suma es 1.
La raíz es $x = \frac{1}{2}$.

064 **Escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:**

a) $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$

b) $x_1 = 0$ y $x_2 = -7$

c) $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

d) $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

Respuesta abierta.

a) $(x + 4)(x - 2) = 0$

b) $x(x + 7) = 0$

c) $(x - 3)(x + 3) = 0$

d) $\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

065 Resuelve las ecuaciones.

a) $\frac{2x-3}{x^2-1}-\frac{3-x}{x+1}=0$

b) $\frac{3}{x+2}-\frac{5-x}{x+1}=0$

c) $\frac{-x+3}{x-1}-\frac{9-x}{x^2-1}=0$

d) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{x-1}{x+2}=\frac{3}{x-2}-2$

e) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{1-2x}{x^2-x-6}=0$

a) $\frac{2x-3}{x^2-1}-\frac{3-x}{x+1}=0 \rightarrow 2x-3+x^2-4x+3=0 \rightarrow x^2-2x=0$

$x_1=0 \qquad x_2=2$

b) $\frac{3}{x+2}-\frac{5-x}{x+1}=0 \rightarrow 3x+3+x^2-3x-10=0 \rightarrow x^2-7=0$

$x_1=-\sqrt{7} \qquad x_2=\sqrt{7}$

c) $\frac{-x+3}{x-1}-\frac{9-x}{x^2-1}=0 \rightarrow -x^2+2x+3-9+x=0 \rightarrow x^2-3x+6=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2}$$

No tiene solución real.

d) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{x-1}{x+2}=\frac{3}{x-2}-2 \rightarrow x+x^2-3x+2=3x+6-2x^2+8$
$\rightarrow 3x^2-5x-12=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-12)}}{2\cdot 3}=\frac{5\pm 13}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

e) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{1-2x}{x^2-x-6}=0 \rightarrow x^2+6x+8-1+2x=0 \rightarrow x^2+8x+7=0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1}=\frac{-8\pm 6}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-7\end{cases}$$

066 Estas ecuaciones tienen menos de cuatro soluciones. Determínalas.

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0$

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0$

c) $6 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2}{x^4} = 0$

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0$

a) $8x^4 + 26x^2 + 15 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 8z^2 + 26z + 15 = 0$

$$z = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 8 \cdot 15}}{2 \cdot 8} = \frac{-26 \pm 14}{16} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -\dfrac{3}{4} \\ z_2 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

No tiene solución real.

b) $9x^4 + 80x^2 - 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 9z^2 + 80z - 9 = 0$

$$z = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-9)}}{2 \cdot 9} = \frac{-80 \pm 82}{18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{9} \\ z_2 = -9 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{3} \qquad x_2 = \dfrac{1}{3}$

$z_2 = -9 \rightarrow$ No tiene solución real.

c) $6 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2}{x^4} = 0 \rightarrow 6x^4 - 5x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z = x^2} 6z^2 - 5z + 2 = 0$

$$z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{-23}}{12}$$

No tiene solución real.

d) $9(1 - x^2)(1 + x^2) + 80x^2 = 0 \rightarrow -9x^4 + 80x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z = x^2} -9z^2 + 80z + 9 = 0$

$$z = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 9}}{2 \cdot (-9)} = \frac{-80 \pm 82}{-18} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

$z_1 = 9 \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

$z_2 = -\dfrac{1}{9} \rightarrow$ No tiene solución real.

067 Obtén las soluciones de las ecuaciones.

a) $\dfrac{2x(x^3 - 7x)}{2x^2 - 12} = 6$

b) $3x^2(x^2 - 2) = \dfrac{x^2 - 2}{3}$

c) $8x + \dfrac{12}{x} = \dfrac{20}{x^3}$

d) $\dfrac{9}{2x^2} = 1 - 3x^2$

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12}=6 \rightarrow x^4-13x^2+36=0 \xrightarrow{z=x^2} z^2-13z+36=0$

$$z=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1}=\frac{13\pm 5}{2}\rightarrow\begin{cases} z_1=9\\ z_2=4\end{cases}$$

$z_1=9\rightarrow x_1=-3 \qquad x_2=3$

$z_2=4\rightarrow x_3=-2 \qquad x_4=2$

b) $3x^2(x^2-2)=\dfrac{x^2-2}{3}\rightarrow 9x^4-19x^2+2=0 \xrightarrow{z=x^2} 9z^2-19z+2=0$

$$z=\frac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot 9\cdot 2}}{2\cdot 9}=\frac{19\pm 17}{18}\rightarrow\begin{cases} z_1=2\\ z_2=\dfrac{1}{9}\end{cases}$$

$z_1=2\rightarrow x_1=-\sqrt{2} \qquad x_2=\sqrt{2}$

$z_2=\dfrac{1}{9}\rightarrow x_3=-\dfrac{1}{3} \qquad x_4=\dfrac{1}{3}$

c) $8x+\dfrac{12}{x}=\dfrac{20}{x^3}\rightarrow 2x^4+3x^2-5=0 \xrightarrow{z=x^2} 2z^2+3z-5=0$

$$z=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 7}{4}\rightarrow\begin{cases} z_1=1\\ z_2=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$z_1=1\rightarrow x_1=-1 \qquad x_2=1$

$z_2=-\dfrac{5}{2}\rightarrow$ No tiene solución real.

d) $\dfrac{9}{2x^2}=1-3x^2\rightarrow 6x^4-2x^2+9=0 \xrightarrow{z=x^2} 6z^2-2z+9=0$

$$z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 6\cdot 9}}{2\cdot 6}=\frac{2\pm\sqrt{-212}}{12}$$

No tiene solución real.

068 ●●○ **Completa las siguientes ecuaciones escribiendo un número en el segundo miembro, de manera que tengan estas soluciones.**

a) $\sqrt{x+7}-2\sqrt{4x+1}=\square$

$x=2$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}=\square-\dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

$x=4$

a) $\sqrt{x+7}-2\sqrt{4x+1}=-3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}=\dfrac{13}{12}-\dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

069 Resuelve y comprueba las soluciones.

a) $x+\sqrt{2x+3}=6$

b) $2\sqrt{3x+1}-2x+2=0$

c) $\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-5}=1$

d) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}-2=0$

a) $x+\sqrt{2x+3}=6 \rightarrow 2x+3=x^2-12x+36 \rightarrow x^2-14x+33=0$

$$x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot 33}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm 8}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=11\end{cases}$$

$x=3\rightarrow 3+\sqrt{2\cdot 3+3}=6$

$x=11\rightarrow 11+\sqrt{2\cdot 11+3}\neq 6$

b) $2\sqrt{3x+1}-2x+2=0\rightarrow 4x^2-20x=0$

$x=5\rightarrow 2\sqrt{3\cdot 5+1}-2\cdot 5+2=2\cdot 4-10+2=0$

$x=0\rightarrow 2\sqrt{3\cdot 0+1}-2\cdot 0+2=2\cdot 1+2\neq 0$

c) $\dfrac{\sqrt{2x-2}}{x-5}=1\rightarrow x^2-12x+27=0$

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 1\cdot 27}}{2\cdot 1}=\frac{12\pm 6}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=9\\x_2=3\end{cases}$$

$x=9\rightarrow\dfrac{\sqrt{2\cdot 9-2}}{9-5}=\dfrac{4}{4}=1$

$x=3\rightarrow\dfrac{\sqrt{2\cdot 3-2}}{3-5}=\dfrac{2}{-2}\neq 1$

d) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}-2=0\rightarrow x+2=x-6+4\sqrt{x-6}+4\rightarrow 1=x-6$

$x=7\rightarrow\sqrt{7+2}-\sqrt{7-6}-2=3-1-2=0$

070 Estas ecuaciones tienen cero, una o dos soluciones. Determínalas.

a) $2\sqrt{x+1}-3\sqrt{4x-3}-5=0$

b) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x-2}=2$

c) $\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x+8}=0$

d) $\dfrac{3}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{5-\sqrt{x}}{3}$

e) $\sqrt{2x-2}-\sqrt{x-5}+1=0$

a) No tiene solución.

b) Tiene dos soluciones: $x_1=2 \quad x_2=6$

c) Tiene dos soluciones: $x_1=2 \quad x_2=-4$

d) Tiene una solución: $x=4$

e) No tiene solución.

071 Las ecuaciones tienen tres soluciones. Dada una solución, calcula las otras dos soluciones.

a) $(x + 3)(x^2 - 2x - 3) = 0$
$x = -3$

b) $(2a - 1)(4a^2 + 20a + 25) = 0$
$a = \dfrac{1}{2}$

a) Resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \to \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) Resolvemos la ecuación $4a^2 + 20a + 25 = 0$:

$$a = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} = \frac{20}{8} \to a = \frac{5}{2}$$

072 Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

b) $x^2(x + 6) = 32$

c) $x^2(x^2 + 1) + 2x^3 + 36 = 12x(x + 1)$

d) $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8 = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 1$

b) $x^2(x + 6) = 32 \to x^3 + 6x^2 - 32 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 0 & -32 \\ 2 & & 2 & 16 & 32 \\ \hline & 1 & 8 & 16 & \boxed{0} \\ -4 & & -4 & -16 & \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{0} & \\ -4 & & -4 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2$

c) $x^2(x^2 + 1) + 2x^3 + 36 = 12x(x + 1) \to x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -11 & -12 & 36 \\ 2 & & 2 & 8 & -6 & -36 \\ \hline & 1 & 4 & -3 & -18 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 12 & 18 & \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & -9 & & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & & \\ -3 & & -3 & & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & & \end{array}$$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = 2$

d)

	2	−5	−14	8
−2		−4	18	−8
	2	−9	4	0
4		8	−4	
	2	−1	0	

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 4$

073 Escribe ecuaciones factorizadas que tengan las soluciones y el grado indicados.

a) Grado 3 y soluciones 5, −2 y 7.

b) Grado 4 y soluciones 1, −3 y −4.

Respuesta abierta.

a) $(x + 2)(x - 5)(x - 7) = 0$

b) $(x - 1)^2(x + 3)(x + 4) = 0$

074 Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1)$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0$

a)

	6	−7	−1	2
1		6	−1	−2
	6	−1	−2	0

Resolvemos la ecuación $6x^2 - x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 7}{12} \to \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{2}{3} \qquad x_3 = 1$

b) $4x^3(x - 3) + 2x^2 + 30(x + 1) = 23x(x - 1) \to 4x^4 - 12x^3 - 21x^2 + 53x + 30 = 0$

	4	−12	−21	53	30
−2		−8	40	−38	−30
	4	−20	19	15	0
3		12	−24	−15	
	4	−8	−5	0	

Resolvemos la ecuación $4x^2 - 8x - 5 = 0$:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 12}{8} \to \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = \frac{5}{2} \qquad x_4 = 3$

c) $x^4 + 3x^3 - 11x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x^3 + 3x^2 - 11x + 2) = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 2 & & 2 & 10 & -2 \\ \hline & 1 & 5 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2 + 5x - 1 = 0$:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \qquad x_3 = 0 \qquad x_4 = 2$$

075 Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{x^3 + x^2}{3} + x\frac{x+1}{6} = x + 1$

b) $3x^2\left(4 + \frac{7}{x}\right) = \frac{6(17x - 4)}{x}$

c) $\frac{x^2}{16}(x + 7) + x + 1 = 0$

d) $\frac{3}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

e) $\frac{2x^2(x-2) + 4x}{x^2 + 1} = 3$

a) $\frac{x^3 + x^2}{3} + x\frac{x+1}{6} = x + 1 \rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -5 & -6 \\ -1 & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ -2 & & -4 & 6 & \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = \frac{3}{2}$

b) $3x^2\left(4 + \frac{7}{x}\right) = \frac{6(17x - 4)}{x} \rightarrow 4x^3 + 7x^2 - 34x + 8 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 7 & -34 & 8 \\ 2 & & 8 & 30 & -8 \\ \hline & 4 & 15 & -4 & \boxed{0} \\ -4 & & -16 & 4 & \\ \hline & 4 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$4x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = \frac{1}{4} \qquad x_3 = 2$

c) $\frac{x^2}{16}(x+7)+x+1=0 \rightarrow x^3+7x^2+16x+16=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 16 \\ -4 & & -4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2+3x+4=0$:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=-4$

d) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \rightarrow -5x^3+8x^2+3x+2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -5 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & & -10 & -4 & -2 \\ \hline & -5 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $-5x^2-2x-1=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-5)\cdot(-1)}}{2\cdot(-5)}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{-10} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=2$

e) $\frac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1}=3 \rightarrow 2x^3-7x^2+4x-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 4 & -3 \\ 3 & & 6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $2x^2-x+1=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=3$

076 Del siguiente sistema de ecuaciones se sabe que $x=-1$ forma parte de su solución. Determina el valor de y.

$$\left.\begin{array}{r} 3(2x+y-1)-6(4x-y)=15 \\ -x+y+3(x-2y)+6=4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y=2 \\ 2x-5y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow y=0$$

077 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $$\left.\begin{array}{r} -2(x+4)+3(3-2y)-1=12 \\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0 \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{r} 6(x-2y-3)-3(2x+y-3)+x+7=0 \\ 3(x-6y)-2(x-y)+y=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3 \\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} -(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15 \\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x+4)+3(3-2y)-1=12 \\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-6y=12 \\ x+3y+6=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=-3y-6$

Sistema compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r} 6(x-2y-3)-3(2x+y-3)+x+7=0 \\ 3(x-6y)-2(x-y)+y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-15y=2 \\ x-15y=0 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3 \\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 10x+3y=27 \\ 3x-4y=13 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ \xrightarrow{\cdot 10} \end{array} \left.\begin{array}{r} -30x-9y=-81 \\ 30x-40y=130 \end{array}\right\}$

$\rightarrow y=-1 \rightarrow 3x-4\cdot(-1)=13 \rightarrow x=3$

$x=3 \qquad y=-1$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x-9y=-69 \\ 8x-9y=-11 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible.

e) $\left.\begin{array}{r} -(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15 \\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} -8x+3y=-11 \\ -8x+12y=-8 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{array} \left.\begin{array}{r} -8x+3y=-11 \\ 8x-12y=8 \end{array}\right\} \rightarrow y=\dfrac{1}{3} \rightarrow 8x-4=8 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{3}{2} \qquad y=\dfrac{1}{3}$

f) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\} \rightarrow 16x-3y=16$

Sistema compatible indeterminado.

078 Dada la ecuación $2x - 5y = 14$, encuentra otra ecuación para que juntas formen un sistema de dos ecuaciones que:

a) Tenga una sola solución. b) No tenga soluciones. c) Tenga infinitas soluciones.

Respuesta abierta.

a) $3x - 7y = 1$ b) $2x - 5y = 0$ c) $4x - 10y = 28$

079 Halla, si es posible, un valor de a para que el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 6x - 4y &= 12 \\ -9x + ay &= -18 \end{aligned}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$$\frac{6}{-9} = \frac{-4}{a}$$

$6a = 36 \rightarrow a = 6$

a) No es posible. b) $a = 6$ c) $a \neq 6$

080 Encuentra, si es posible, un valor de b para que el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 8x - 12y &= 20 \\ 4x + 9y &= b \end{aligned}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$\dfrac{8}{4} \neq \dfrac{-12}{9} \rightarrow$ El sistema es siempre compatible determinado.

081 Resuelve los siguientes sistemas con tres ecuaciones y dos incógnitas, y representa las soluciones.

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -x + y &= -4 \\ -4x - y &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x - y &= 2 \\ 3x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ -3x - 2y &= 1 \\ x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} -4x + 2y &= 0 \\ 6x - 3y &= 2 \\ 3x - 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -x + y &= -4 \\ -4x - y &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -x + y &= -4 \\ -4x - y &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 1 \rightarrow -1 + y = -4 \rightarrow y = -3$

$x = 1 \qquad y = -3$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x - y &= 2 \\ 3x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Las soluciones de las dos primeras ecuaciones son $x = 3$ e $y = 4$, que no verifican la tercera ecuación. Por tanto, el sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+\ y=0 \\ -3x-2y=1 \\ x-3y=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 2} \left.\begin{array}{r} 4x+2y=0 \\ -3x-2y=1 \end{array}\right\} \rightarrow x=1 \rightarrow 4\cdot 1+2y=0 \rightarrow y=-2$

$x=1 \qquad y=-2$

d) $\left.\begin{array}{r} -4x+2y=0 \\ 6x-3y=2 \\ 3x-2y=-2 \end{array}\right\}$

Las soluciones de la segunda y tercera ecuaciones son $x=\dfrac{10}{3}$ e $y=6$, que no verifican la primera ecuación. Por tanto, el sistema es incompatible.

082 Determina las soluciones de estos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+\ z=11 \\ x-2y+3z=6 \\ -x+\ y-\ z=-2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-\ y+\ z=4 \\ -x+3y-2z=1 \\ x+2y+\ z=1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+\ z=11 \\ x-2y+3z=6 \\ -x+\ y-\ z=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2y-3z+6} \left.\begin{array}{r} 7y-5z=-1 \\ -y+2z=4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 2} \\ \xrightarrow{\cdot 5} \end{array} \left.\begin{array}{r} 14y-10z=-2 \\ -5y+10z=20 \end{array}\right\}$

$\rightarrow y=2 \rightarrow -2+2z=4 \rightarrow z=3$

$x=2\cdot 2-3\cdot 3+6=1$

$x=1 \qquad y=2 \qquad z=3$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-\ y+\ z=4 \\ -x+3y-2z=1 \\ x+2y+\ z=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-2y-z+1} \left.\begin{array}{r} -5y-z=2 \\ 5y-z=2 \end{array}\right\} \rightarrow z=-2 \rightarrow 5y-(-2)=2 \rightarrow y=0$

$x=-2\cdot 0-(-2)+1=3$

$x=3 \qquad y=0 \qquad z=-2$

083 Resuelve las inecuaciones.

a) $-x+15 \leq 3-7x$

b) $x+11 \geq 3-4x$

c) $-x-13 \leq 3+7x$

d) $2x+11 \geq 6+5x$

a) $-x+15 \leq 3-7x \rightarrow 6x \leq -12 \rightarrow x \leq 2$
$(-\infty, -2]$

b) $x+11 \geq 3-4x \rightarrow 5x \geq -8 \rightarrow x \geq -\dfrac{8}{5}$

$\left[-\dfrac{8}{5}, +\infty\right)$

c) $-x-13 \leq 3+7x \rightarrow -16 \leq 8x \rightarrow -2 \leq x$
$[-2, +\infty)$

d) $2x+11 \geq 6+5x \rightarrow 5 \geq 3x \rightarrow \dfrac{5}{3} \geq x$

$\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right]$

084 Halla la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9$

b) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) \geq -3(x + 1) - (2 - 3x)$

c) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{2x+4}{2} > 1$

a) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) \leq 9 \rightarrow x - 2x - 4 - 6 + 12x \leq 9$
$\rightarrow 11x \leq 19 \rightarrow x \leq \dfrac{19}{11}$

$\left(-\infty, \dfrac{19}{11}\right]$

b) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) \geq -3(x + 1) - (2 - 3x) \rightarrow -14x \geq -42 \rightarrow x \leq \dfrac{42}{14} = 3$

$(-\infty, 3]$

c) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{2x+4}{2} > 1 \rightarrow 2x + 4 - 6x - 12 > 6 \rightarrow -4x > 14 \rightarrow x < -\dfrac{7}{2}$

$\left(-\infty, -\dfrac{7}{2}\right)$

085 Encuentra la solución de las inecuaciones.

a) $\dfrac{1-5x}{4} - 2\dfrac{4+3x}{5} \leq \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{-2+3x}{5} + \dfrac{6-4x}{3} + \dfrac{1}{2} \geq 0$

c) $1 - \dfrac{2x-5}{6} + \dfrac{1-4x}{2} - \dfrac{x-1}{3} < 0$

a) $\dfrac{1-5x}{4} - 2\dfrac{4+3x}{5} \leq \dfrac{1}{2} \rightarrow 5 - 25x - 32 - 24x \leq 10$
$\rightarrow -49x \leq 37 \rightarrow x \geq -\dfrac{37}{49}$

$\left[-\dfrac{37}{49}, +\infty\right)$

b) $\dfrac{-2+3x}{5} + \dfrac{6-4x}{3} + \dfrac{1}{2} \geq 0 \rightarrow -12 + 18x + 60 - 40x + 15 \geq 0$
$\rightarrow -22x \geq -63 \rightarrow x \leq \dfrac{63}{22}$

$\left(-\infty, \dfrac{63}{22}\right]$

c) $1 - \dfrac{2x-5}{6} + \dfrac{1-4x}{2} - \dfrac{x-1}{3} < 0 \rightarrow 6 - 2x + 5 + 3 - 12x - 2x + 2 < 0$
$\rightarrow -16x < -16 \rightarrow x > 1$

$(1, +\infty)$

086 Resuelve estas inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 2(x-5)-3(2-2x)<0 \\ -x+3(2+x)>3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4(2x-5)+2(8-2x)+7\geq 0 \\ 3(1-2x)-3(2x-1)+1\geq 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1-x}{3}<0 \\ \dfrac{2-3x}{6}-\dfrac{3-3x}{2}>0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -3(x+1)\cdot 2-\dfrac{2+5x}{3}>1 \\ 2\cdot\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{1}{5}<0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2(x-5)-3(2-2x)<0 \\ -x+3(2+x)>3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x<16 \\ 2x>-3 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x<2 \\ x>-\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} 4(2x-5)+2(8-2x)+7\geq 0 \\ 3(1-2x)-3(2x-1)+1\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3>0 \\ -12x+7\geq 0 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x>-\dfrac{3}{4} \\ x\leq\dfrac{7}{12} \end{array}\right\} \rightarrow \left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{12}\right]$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-2}{5}+\dfrac{1-x}{3}<0 \\ \dfrac{2-3x}{6}-\dfrac{3-3x}{2}>0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-1<0 \\ 6x-7>0 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x>\dfrac{1}{2} \\ x>\dfrac{7}{6} \end{array}\right\} \rightarrow \left(\dfrac{7}{6}, +\infty\right)$

d) $\left.\begin{array}{r} -3(x+1)\cdot 2-\dfrac{2+5x}{3}>1 \\ 2\cdot\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{1}{5}<0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -23x-20>3 \\ 4x-2+1<0 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ x<\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow (-\infty, -1)$

087 ¿Cuál es la solución de estas inecuaciones?

a) $x^2 - x - 6 < 0$
b) $-x^2 - 2x + 8 < 0$
c) $2x^2 + 5x + 6 < 0$
d) $-x^2 + 3x - 4 < 0$
e) $2x^2 + 5x - 3 > 0$
f) $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

a) Resolvemos la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 10 - 6 > 0 \rightarrow (-\infty, -2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 0 - 6 < 0 \rightarrow (-2, 3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 - 10 - 6 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-2, 3)$.

b) Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 2x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 2 \cdot (-10) + 8 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 2 \cdot 0 + 8 > 0 \rightarrow (-4, 2)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 2 \cdot 10 + 8 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

c) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores positivos.

No tiene solución.

d) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

El primer miembro de la ecuación siempre toma valores negativos.

Es una identidad.

e) Resolvemos la ecuación: $2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 + 5 \cdot (-10) - 3 > 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 < 0 \rightarrow \left(-3, \dfrac{1}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 3 > 0 \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -3) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

f) Resolvemos la ecuación: $6x^2 + 31x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{9}{2} \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -1 \qquad x = 0$

Si $x = -10 \rightarrow 6(-10)^2 + 31 \cdot (-10) + 18 > 0 \rightarrow \left(-\infty, -\dfrac{9}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = -1 \rightarrow 6 \cdot (-1)^2 + 31 \cdot (-1) + 18 < 0 \rightarrow \left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{2}{3}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 6 \cdot 0^2 + 31 \cdot 0 + 18 > 0 \rightarrow \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left[-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{2}{3}\right]$.

088 **Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 0$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x} > 0$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5} - 1 > 0$

a) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x+3>0 \\ x-5<0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>-3 \\ x<5 \end{matrix}\right\}$

$(-3, 5)$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3} < 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-3<0 \\ x+3>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x<\dfrac{3}{2} \\ x>-3 \end{matrix}\right\}$

$\left(-3, \dfrac{3}{2}\right)$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x} > 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} -x+1<0 \\ 2-3x>0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x>1 \\ x<\dfrac{2}{3} \end{matrix}\right\}$

$\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5} - 1 > 0 \rightarrow \dfrac{-3x-3}{2x+5} > 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} x<-1 \\ x>-\dfrac{5}{2} \end{matrix}\right\}$

$\left(-\dfrac{5}{2}, -1\right)$

089 Determina las soluciones de estas inecuaciones.

a) $\frac{x+2}{3}+\frac{x(x-1)}{5}>0$

b) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-x^2}{3}+1<0$

c) $x-\frac{1-2x}{3}-\frac{2x^2+1}{4}\geq 5$

d) $3-\frac{2x-3}{2}+\frac{16x+x^2}{3}\geq 0$

e) $\frac{x-1}{4}-\frac{12x-x^2}{3}\geq\frac{2x^2+1}{3}-x$

a) $\frac{x+2}{3}+\frac{x(x-1)}{5}>0 \rightarrow 5x+10+3x^2-3x>0 \rightarrow 3x^2+2x+10>0$

El primer miembro de la inecuación es siempre positivo, por lo que siempre se cumple. Es cierta para todos los números reales.

b) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-x^2}{3}+1<0 \rightarrow 9x-3-2x+2x^2+6<0 \rightarrow 2x^2+7x+3<0$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2+7x+3=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-1 \qquad x=0$

Si $x=-10 \rightarrow 2\cdot(-10)^2+7\cdot(-10)+3>0 \rightarrow (-\infty,-3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=-1 \rightarrow 2\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+3<0 \rightarrow \left(-3,-\frac{1}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x=0 \rightarrow 2\cdot 0^2+7\cdot 0+3>0 \rightarrow \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$.

c) $x-\frac{1-2x}{3}-\frac{2x^2+1}{4}\geq 5 \rightarrow 12x-4+8x-6x^2-3\geq 60 \rightarrow -6x^2+20x-67\geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$-6x^2+20x-67=0$

No tiene solución real. Como el primer miembro de la ecuación toma siempre valores negativos, la inecuación no tiene solución.

d) $3-\frac{2x-3}{2}+\frac{16x+x^2}{3}\geq 0 \rightarrow 18-6x+9+32x+2x^2\geq 0$
$$\rightarrow 2x^2+26x+27\geq 0$$

Resolvemos la ecuación:

$$2x^2+26x+27=0\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-13-\sqrt{115}}{2} \\ x_2=\dfrac{-13+\sqrt{115}}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-5 \qquad x=0$

Si $x=-10\rightarrow 2\cdot(-10)^2+26\cdot(-10)+27>0\rightarrow \left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x=-5\rightarrow \cdot 2\cdot(-5)^2+26\cdot(-5)+27<0\rightarrow \left(\frac{-13-\sqrt{115}}{2}, \frac{-13+\sqrt{115}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=0\rightarrow \cdot 2\cdot 0^2+26\cdot 0+27>0\rightarrow \left(\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-13-\sqrt{115}}{2}\right]\cup\left[\frac{-13+\sqrt{115}}{2}, +\infty\right)$.

e) $\frac{x-1}{4}-\frac{12x-x^2}{3}\geq\frac{2x^2+1}{3}-x\rightarrow 4x^2+33x+7\geq 0$

Resolvemos la ecuación:

$$4x^2+33x+7=0\rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-33-\sqrt{977}}{8} \\ x_2=\dfrac{-33+\sqrt{977}}{8} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x=-10 \qquad x=-5 \qquad x=0$

Si $x=-10\rightarrow 4\cdot(-10)^2+33\cdot(-10)+7>0\rightarrow \left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x=-5\rightarrow 4\cdot(-5)^2+33\cdot(-5)+7<0\rightarrow \left(\frac{-33-\sqrt{977}}{8}, \frac{-33+\sqrt{977}}{8}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=0\rightarrow 4\cdot 0^2+33\cdot 0+7>0\rightarrow \left(\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{-33-\sqrt{977}}{8}\right]\cup\left[\frac{-33+\sqrt{977}}{8}, +\infty\right)$.

090 Obtén las soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4<0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3>0 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4<0 \\ 2x-3>0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2-3x-4>0 \\ 2x-3<0 \end{array}\right\}$

Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$x^2-3x-4=0 \to \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=4 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=10$$

Si $x=-10 \to (-10)^2-3\cdot(-10)-4>0 \to (-\infty,-1)$ es solución de la inecuación.

Si $x=0 \to 0^2-3\cdot 0-4<0 \to (-1, 4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x=10 \to 10^2-3\cdot 10-4>0 \to (4, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$.

$$2x-3<0 \to x<\frac{3}{2}$$

Por tanto, la solución es $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty,-1)$.

b) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

c) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $(4,+\infty)$.

d) Repitiendo el proceso del apartado anterior, la solución es $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

091 Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 10-3x-x^2<0 \\ 3x+5>-16 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} x^2+4x-5>0 \\ 3x-2<10 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 10-3x-x^2<0 \\ 2x-3>13 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x^2+4x-5<0 \\ 3x-2>10 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos cada una de las inecuaciones.

$$-x^2-3x+10=0 \to \begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=2 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x=-10 \qquad x=0 \qquad x=10$$

Si $x=-10 \to -(-10)^2-3\cdot(-10)+10<0 \to (-\infty,-5)$ es solución.

Si $x=0 \to -0^2-3\cdot 0+10>0 \to (-5, 2)$ no es solución.

Si $x=10 \to -10^2-3\cdot 10+10<0 \to (2,+\infty)$ es solución

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$.

$$3x + 5 > -16 \rightarrow x > -7$$

Por tanto, la solución es $(-7, +\infty)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-7, -5) \cup (2, +\infty)$.

b) La inecuación de segundo grado es la misma que en el apartado anterior.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$:

$$2x - 3 > 13 \rightarrow x > 8$$

Por tanto, la solución es $(8, +\infty)$

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(8, +\infty)$.

c) Resolvemos cada una de las inecuaciones:

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 4 \cdot (-10) - 5 > 0 \rightarrow (-\infty, -5)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 < 0 \rightarrow (-5, 1)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 4 \cdot 10 - 5 > 0 \rightarrow (1, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

$$3x - 2 < 10 \rightarrow x < 4$$

Por tanto, la solución es $(-\infty, 4)$.

La solución del sistema es la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones: $(-\infty, -5) \cup (1, 4)$.

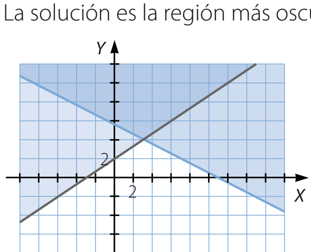
d) Repitiendo el proceso del apartado anterior, vemos que el sistema no tiene solución.

092 **Obtén gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones.**

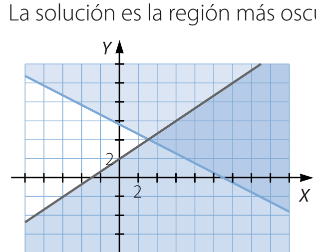
a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 6 < 0 \\ x + 2y > 11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 6 > 0 \\ x + 2y > 11 \end{array}\right\}$

a) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.

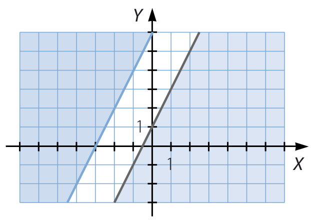


093 ●○○

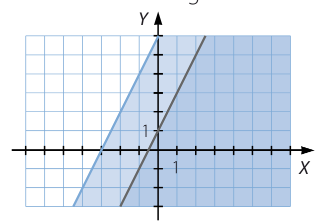
Calcula las soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 6 < 0 \\ -4x + 2y < 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 6 < 0 \\ -4x + 2y > 2 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 6 > 0 \\ -4x + 2y < 2 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 6 > 0 \\ -4x + 2y > 2 \end{array}\right\}$

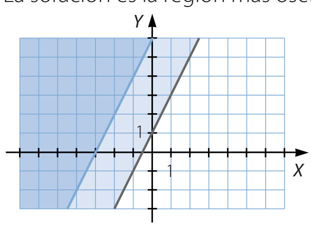
a) No tiene solución.



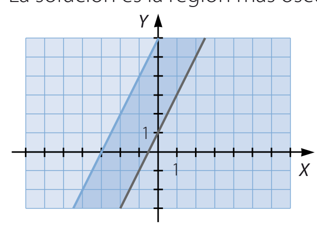
c) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.



d) La solución es la región más oscura.



094 ●●●

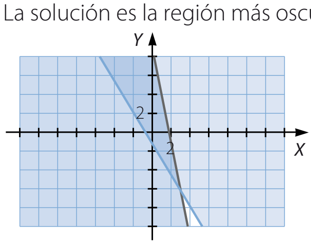
Resuelve los sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+y}{3} < \dfrac{y+6}{5} \\ \dfrac{4-x}{3} + \dfrac{2-y}{5} < 2 \end{array}\right\}$

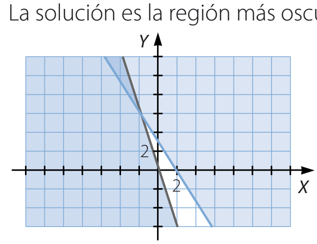
c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{6x+y}{25} < \dfrac{3-y}{5} \\ \dfrac{-x+1}{3} - 2 \cdot \dfrac{2x+y-3}{2} < \dfrac{3x+1}{4} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x-2y+3}{3} \geq \dfrac{x-y+1}{2} \\ 1 - \dfrac{2x-4-y}{3} + \dfrac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{array}\right\}$

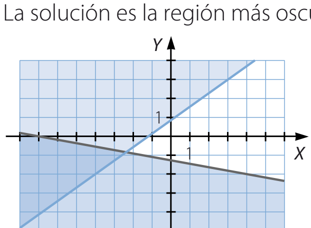
a) La solución es la región más oscura.



c) La solución es la región más oscura.



b) La solución es la región más oscura.



095 Determina la suma y el producto de las soluciones de la ecuación.

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

Halla las soluciones. ¿Puedes explicar lo que sucede?

El producto de las raíces es 14 y la suma es 9.

Las raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$.

Si el coeficiente del término de segundo grado es 1, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

096 **Estudia el valor de los coeficientes de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, para que tenga cuatro, tres, dos, una o ninguna solución.**

Analizamos el número de raíces de la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ a partir de las raíces obtenidas en la ecuación de segundo grado asociada, $az^2 + bz + c = 0$.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow z = \frac{-b}{2a} \rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

$\rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a} = 0$ ($b = 0$, $c = 0$) $\rightarrow$ Tiene una solución: $x = 0$.

$\rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones opuestas.

Si $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Si las dos soluciones son negativas, la ecuación bicuadrada no tiene solución.

$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0$ y $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si una solución es negativa y la otra es cero:

$c = 0$ y $\frac{-b}{a} < 0 \rightarrow$ Tiene una solución: $x = 0$.

Si una solución es positiva y la otra es cero:

$c = 0$ y $\frac{-b}{a} > 0 \rightarrow$ Tiene tres soluciones: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$.

Si las dos soluciones son positivas, la ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones.

$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0$ y $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0 \rightarrow$ Tiene cuatro soluciones.

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ \pm\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{cases}$$

097 Utiliza el método de sustitución para resolver estos sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} y - x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = 6x - 1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 10 = xy \\ x + 2 = y + 5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} y + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - y + 9 = 0 \end{array}\right\}$

a) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = -2 \qquad x_2 = 1$

Si $x_1 = -2 \rightarrow y_1 = 4$

Si $x_2 = 1 \rightarrow y_2 = 1$

b) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} y - x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = 6x - 1 \end{array}\right\}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$

Si $x_1 = 2 \rightarrow y_1 = 6 \cdot 2 - 1 = 11$

Si $x_2 = -1 \rightarrow y_2 = 6 \cdot (-1) - 1 = -7$

c) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 10 = xy \\ x + 2 = y + 5 \end{array}\right\}$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = -2 \qquad x_2 = 5$

Si $x_1 = -2 \rightarrow y_1 = \frac{10}{-2} = -5$

Si $x_2 = 5 \rightarrow y_2 = \frac{10}{5} = 2$

d) Resolvemos el sistema por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} y + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x - y + 9 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x^2 - 4x + 15 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución real, por lo que el sistema no tiene solución.

098 Resuelve la ecuación.

$$2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

Trata de hacerlo sustituyendo en la expresión $x-\frac{1}{x}=t$ y obtendrás una ecuación de segundo grado. Calcula las soluciones para la incógnita t y luego sustituye para hallar el valor de x.

$$2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

Sustituimos: $x-\frac{1}{x}=t$

Resolvemos la ecuación: $2t^2-3t=0$

$t_1=\frac{3}{2}$ $\quad t_2=0$

Sustituimos para calcular x:

$$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

$x_1=-\frac{1}{2}$ $\quad x_2=2$

$x_3=-1$ $\quad x_4=1$

099 Determina la solución de estas ecuaciones realizando las sustituciones de variable necesarias.

a) $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$

b) $\frac{x^2}{x^2-6x+9}-\frac{6x}{x-3}+8=0$

a) Sustituimos: $t=x-\frac{1}{x}=0$

Resolvemos la ecuación: $2t^2-9t+10=0$

$t_1=\frac{5}{2}$ $\quad t_2=2$

Sustituimos para calcular x:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$x_1=\frac{1}{2}$ $\quad x_2=2$

$$x+\frac{1}{x}=2$$

$x_3=1$

b) Factorizamos el denominador de segundo grado:

$$\frac{x^2}{(x-3)^2} - \frac{6x}{x-3} + 8 = 0$$

Lo expresamos como una identidad notable:

$$\left(\frac{x}{x-3} - 3\right)^2 - 1 = 0$$

Sustituimos: $t = \dfrac{x}{x-3} - 3$

Resolvemos la ecuación: $t^2 - 1 = 0$

$t_1 = -1 \qquad t_2 = 1$

Sustituimos para calcular x:

$$1 = \frac{x}{x-3} - 3 \rightarrow x_1 = 4$$

$$-1 = \frac{x}{x-3} - 3 \rightarrow x_2 = 6$$

100 ●●○ **Si Max sube de tres en tres los escalones de una torre, tiene que dar 30 pasos menos que si los sube de dos en dos. ¿Cuántos escalones tiene la torre?**

Llamamos x al número de escalones:

$$\frac{x}{3} + 30 = \frac{x}{2} \rightarrow 2x + 180 = 3x \rightarrow x = 180$$

La torre tiene 180 escalones.

101 ●●○ **El jeque Omar tiene dispuesto en su testamento que la tercera parte de sus camellos se entregue a su primogénito, Alí; la tercera parte del rebaño sea para su segundo hijo, Casim, y el resto vaya a parar a su esposa Fátima. A la muerte de Omar y, una vez hecho el reparto, a Fátima le corresponden 140 camellos. ¿Cuántos componían el rebaño del jeque?**

Llamamos x al número de camellos del jeque:

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{3} = 140 \rightarrow 3x - 2x = 420 \rightarrow x = 420$$

El rebaño del jeque estaba compuesto por 420 camellos.

102 ●●○ **En una bodega venden dos tipos de vino: crianza y reserva. Averigua cuál es su precio si sabemos que Juan compró 3 botellas de reserva y 12 botellas de crianza y pagó 69 €, mientras que Belén compró 6 botellas de crianza y 8 botellas de reserva, pagó 80 €.**

Llamamos x al precio de la botella de crianza e y al precio de la botella de reserva:

$$\left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 69 \\ 6x + 8y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{array} \left.\begin{array}{r} 12x + 3y = 69 \\ -12x - 16y = -160 \end{array}\right\} \rightarrow -13y = -91 \rightarrow y = 7$$

$6x + 8 \cdot 7 = 80 \rightarrow x = 4$

El precio de la botella de crianza es de 4 € y el precio de la botella de reserva es de 7 €.

103 Un comerciante compra melones a 40 céntimos/kg y los vende a 60 céntimos. Halla cuántos kilogramos de melones compró si se le estropearon 10 kg y obtuvo 42 €.

Llamamos x al número de kilogramos de melones que compró:

$0,20(x - 10) = 42$

$x = 220$

El comerciante compró 220 kg de melones.

104 Carmen se dispone a invertir 100.000 €. En el banco le ofrecen dos productos: Fondo Tipo A, al 4 % de interés anual, y Fondo Riesgo B, al 6 % de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4.500 € de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?

Llamamos x al dinero invertido en el Fondo Tipo A e y al dinero invertido en el Fondo B:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 100.000 \\ 0,04x + 0,06y &= 4.500 \end{aligned}\right\}$$

$\rightarrow 4.000 - 0,04y + 0,06y = 4.500$

$\rightarrow 0,02y = 500 \rightarrow y = 25.000$

$x = 100.000 - 25.000 = 75.000$

Adquirió 75.000 € del Fondo Tipo A, y 25.000 € del Fondo Riesgo B.

105 Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza cuatro veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el ciclista e y a la velocidad del mismo:

1 h 48 min = 1,8 h

$$\left.\begin{aligned} x &= 1,8y \\ 180 - x &= 7,2y \end{aligned}\right\} \rightarrow 180 - 1,8y = 7,2y \rightarrow y = 20$$

$x = 1,8 \cdot 20 = 36$

La velocidad del ciclista es 20 km/h, y la velocidad del coche es 80 km/h.

106 Un camión sale de una ciudad a 80 km/h y dos horas después parte en la misma dirección un coche a 100 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo y cuánta distancia habrán recorrido habrá recorrido hasta ese momento?

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e = v \cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el camión e y al tiempo que tarda en alcanzarlo:

$$\left.\begin{aligned} x &= 80y \\ x + 160 &= 100y \end{aligned}\right\} \rightarrow 80y + 160 = 100y \rightarrow y = 8$$

$x = 80 \cdot 8 = 640$

Tardará 8 horas en alcanzarlo y habrá recorrido 800 kilómetros.

107 Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m². Halla las dimensiones del polígono.

Llamamos x al lado menor del polígono e y a su área:

$$\left.\begin{array}{r} x(x+2)=y \\ (x+2)(x+4)=y+40 \end{array}\right\} \rightarrow x^2+6x+8=x^2+2x+40 \rightarrow 4x=32 \rightarrow x=8$$

$y=8(8+2)=80$

Los lados del polígono original miden 8 y 10 m, respectivamente.

108 Calcula un número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la de las unidades:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=14 \\ 10y+x+18=10x+y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y=14-x \\ 9y-9x+18=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow 126-9x-9x+18=0 \rightarrow 18x=144 \rightarrow x=8$$

$y=14-8=6$

El número es 86.

109 El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?

Llamamos x al número de amigos de Inés, e y al dinero que tiene que pagar cada uno:

$$\left.\begin{array}{r} xy=80 \\ (x+3)(y-6)=80 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{80}{y}+3\right)(y-6)=80 \rightarrow 80-\frac{480}{y}+3y-18=80$$

$$\rightarrow y^2-6y-160=0$$

$$y=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-160)}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 26}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1=-10 \rightarrow \text{Solución no válida} \\ y_2=16 \end{cases}$$

Si $y_2=16 \rightarrow x_2=\dfrac{80}{16}=5$

Van de excursión 5 amigos.

110 Jacinto está cercando un terreno de forma rectangular. Cuando lleva puesto alambre a dos lados consecutivos de la tierra, se da cuenta que ha gastado 170 m de alambre. Si sabe que la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?

Llamamos x e y a las dimensiones del terreno:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=170 \\ x^2+y^2=130^2 \end{array}\right\} \rightarrow y^2-170y+6.000=0$$

$$y=\frac{-(-170)\pm\sqrt{(-170)^2-4\cdot 1\cdot 6.000}}{2\cdot 1}=\frac{170\pm 70}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1=120 \\ y_2=50 \end{cases}$$

Si $y_1=120 \rightarrow x_1=170-120=50$

Si $y_2=50 \rightarrow x_2=170-50=120$

Las dimensiones del terreno son 120 y 50 m, respectivamente.

El área del terreno mide 6.000 m².

111 La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado y de su área.

Llamamos x al lado del hexágono, y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que tiene por catetos de la apotema y la mitad del lado, y por hipotenusa, la longitud del lado:

$$x^2 = 8^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 = 256 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{256}{3}} \rightarrow x_1 = -\frac{16\sqrt{3}}{3} \qquad x_2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

La longitud del lado es $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm.

El área de un polígono regular es: $A = \frac{P \cdot a_p}{2}$

Por tanto, el área mide: $A = 128\sqrt{3}$ cm^2

112 Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si dejamos los márgenes laterales de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área es 360 cm^2, y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.

Llamamos x e y a las dimensiones del pliego:

$$\left.\begin{array}{r}(x-2)(y-5) = 360\\(x-4)(y-2{,}5) = 360\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}x = \dfrac{350+2y}{y-5}\\[2ex] x = \dfrac{350+4y}{y-2{,}5}\end{array}\right\} \rightarrow 2y^2 - 15y - 875 = 0$$

$$y = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4\cdot 2\cdot(-875)}}{2\cdot 2} = \frac{15 \pm 85}{4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{35}{2} \\ y_2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1 = -\frac{35}{2} \rightarrow x_1 = \frac{350 + 2\dfrac{-35}{2}}{\dfrac{-35}{2} - 5} = -14 \qquad \text{Si } y_2 = 25 \rightarrow x_2 = \frac{350 + 2\cdot 25}{25 - 5} = 20$$

Las dimensiones del pliego son 20 y 25 cm, respectivamente.

113 Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.

Llamamos x al número:

$$(x+1)^2 - \frac{8}{x} = 23 \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 8 = 23x \rightarrow x^3 + 2x^2 - 22x - 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -22 & -8 \\ 4 & & 4 & 24 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2 + 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - \sqrt{7} \\ x_2 = -3 + \sqrt{7} \end{cases}$$

$x_1 = -3 - \sqrt{7} \qquad x_2 = -3 + \sqrt{7} \qquad x_3 = 4$

El número entero es 4.

114 **Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.**

Llamamos x a la arista del cubo:

$(x+4)^3 = 8x^3 \to -7x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -7 & 12 & 48 & 64 \\ 4 & & -28 & -64 & -64 \\ \hline & -7 & -16 & -16 & \boxed{0} \end{array}$$

$x = 4$

$-7x^2 - 16x - 16 = 0 \to 7x^2 + 16x + 16 = 0$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 7\cdot 16}}{2\cdot 7} = \frac{-16 \pm \sqrt{-192}}{14} \to \text{No tiene solución.}$$

La longitud de la arista es de 4 cm.

115 **Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.**

Llamamos x al precio de las vacas, y al precio de los terneros y z al precio de las ovejas:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 16z \\ x + 4z &= 3y \\ 3y + 8z &= 4x \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= 4z \\ y &= \frac{8}{3}z \end{aligned}\right\}$$

Una vaca vale lo mismo que cuatro ovejas, y un ternero cuesta igual que ocho terceras partes del precio de una oveja.

116 **Un número que tiene tres cifras lo representamos en la forma *abc*. Determínalo, sabiendo que si escribes *cab*, el número disminuye 459 unidades; si escribes *bac*, el número disminuye 360 unidades, y que *bca* es 45 unidades menor que *bac*.**

A la cifra de las centenas la llamamos a, a la de las decenas b y a la de las unidades c:

$$\left.\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 100c + 10a + b + 459 \\ 100a + 10b + c &= 100b + 10a + c + 360 \\ 100b + 10c + a &= 100b + 10a + c - 45 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 90a + 9b - 99c &= 459 \\ 90a - 90b &= 360 \\ -9a + 9c &= -45 \end{aligned}\right\}$$

$$\to \left.\begin{aligned} 10a + b - 11c &= 51 \\ 10a - 10b &= 40 \\ -a + c &= -5 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{a = c+5} \left.\begin{aligned} b - c &= 1 \\ -10b + 10c &= -10 \end{aligned}\right\}$$

$a = c + 5$ y $b = c + 1$

Para determinar la solución sabemos que los tres números son enteros y, por tanto, c es un número de 0 a 9. Como $a = c + 5$, c solo puede valer 0, 1, 2, 3 y 4. Para cada uno de estos valores de c resultan a y b.

Si $c = 0$, entonces: $a = 5$ y $b = 1$. El número es 510.

Si $c = 1$, entonces: $a = 6$ y $b = 2$. El número es 621.

Si $c = 2$, entonces: $a = 7$ y $b = 3$. El número es 732.

Si $c = 3$, entonces: $a = 8$ y $b = 4$. El número es 843.

Si $c = 4$, entonces: $a = 9$ y $b = 5$. El número es 954.

117 El triple de un número menos su mitad es siempre mayor que 3. ¿Qué números cumplen esta propiedad?

Llamamos x al número:

$$3x - \frac{x}{2} > 3 \rightarrow 6x - x > 6 \rightarrow x > \frac{6}{5} \rightarrow \left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$$

Los números que cumplen esta propiedad son los números mayores que $\frac{6}{5}$.

118 De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene un número menor que 1. ¿Qué número puede ser?

Llamamos x al número: $x^2 - \frac{x}{2} < 1 \rightarrow 2x^2 - x - 2 < 0$

Resolvemos la ecuación: $2x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 - (-10) - 1 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 - 0 - 1 < 0 \rightarrow \left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}, \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 2 \cdot 10^2 - 10 - 1 > 0 \rightarrow \left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}, \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Los números pedidos son los números mayores que $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ y menores que $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$.

119 ¿Es cierto que la suma de un número y de su cuadrado es siempre positiva? ¿Qué números cumplen esa condición?

Llamamos x al número:

Vemos que no se verifica que: $-\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}$

$x + x^2 > 0$

Resolvemos la ecuación: $x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = -0{,}5 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 > 0 \rightarrow (-\infty, 0)$ es solución de la inecuación.

Si $x = -0{,}5 \rightarrow (-0{,}5)^2 - 0{,}5 < 0 \rightarrow (-1, 0)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 10 > 0 \rightarrow (0, +\infty)$ es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

120 Encuentra todos los números enteros que multiplicados por el siguiente número den un resultado menor que 24.

Llamamos x al número:

$x(x+1) < 24 \rightarrow x^2 + x - 24 < 0$

Resolvemos la ecuación:

$$x^2 + x - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{97}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2} \end{cases}$$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow (-10)^2 - 10 - 24 > 0 \rightarrow \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}\right)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 + 0 - 24 < 0 \rightarrow \left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}\right)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow 10^2 + 10 - 24 > 0 \rightarrow \left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, +\infty\right)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $\left(\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}\right)$.

Los números pedidos son los números mayores que $\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}$ y menores que $\dfrac{-1+\sqrt{97}}{2}$.

121 Determina para qué valores de x es posible realizar las operaciones indicadas.

a) $\sqrt{5-3x}$

b) $\sqrt{x-3}$

c) $\sqrt{4-3x-x^2}$

d) $\log(2-5x)$

e) $\log(6-x-x^2)$

f) $\log(x^2-2x+1)$

a) $5 - 3x \geq 0 \rightarrow x \leq \dfrac{5}{3}$

$\left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right]$

b) $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

$[3, +\infty)$

c) $4 - 3x - x^2 \geq 0$

Resolvemos la ecuación: $-x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - 3 \cdot (-10) + 4 < 0 \rightarrow (-\infty, -4)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 3 \cdot 0 + 4 > 0 \rightarrow (-4, 1)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 3 \cdot 10 + 4 < 0 \rightarrow (1, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $[-4, 1]$.

d) $2 - 5x > 0 \rightarrow x < \dfrac{2}{5}$

$\left(-\infty, \dfrac{2}{5}\right)$

e) $6 - x - x^2 > 0$

Resolvemos la ecuación: $-x^2 - x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto de cada intervalo en que queda dividida la recta:

$x = -10 \qquad x = 0 \qquad x = 10$

Si $x = -10 \rightarrow -(-10)^2 - (-10) + 6 < 0 \rightarrow (-\infty, -3)$ no es solución de la inecuación.

Si $x = 0 \rightarrow -0^2 - 0 + 6 > 0 \rightarrow (-3, 2)$ es solución de la inecuación.

Si $x = 10 \rightarrow -10^2 - 10 + 6 < 0 \rightarrow (2, +\infty)$ no es solución de la inecuación.

Las soluciones de la ecuación no lo son de la inecuación.

Por tanto, la solución es $(-3, 2)$.

f) $x^2 - 2x + 1 > 0$

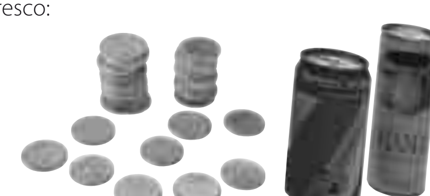
La ecuación solo se anula para $x = 1$, y en el resto de los valores el primer miembro de la inecuación es siempre positivo.

$x \neq 1$

122 ●●● **Jesús y Beatriz quieren saber cuánto cuesta un bote de refresco, pero no recuerdan exactamente lo que pagaron. Jesús compró 8 botes y sabe que pagó con un billete de 5 € y que le devolvieron una moneda de 2 € y algo más de dinero. Beatriz compró 18 botes y recuerda que pagó la cantidad exacta con un billete de 5 €, una moneda de 2 € y alguna moneda más. Con estos datos, ¿qué podrías decir del precio del bote de refresco?**

Llamamos x al precio del bote de refresco:

$$\left.\begin{array}{r} 5 - 8x > 2 \\ 18x < 7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x < \dfrac{3}{8} \\ x < \dfrac{7}{18} \end{array}\right\}$$



El precio del bote de refresco es menor que 0,375 €.

PARA FINALIZAR...

123 **Demuestra la siguiente propiedad que cumplen los números combinatorios.**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\cdots+\binom{n}{n}1^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

124 **Demuestra, utilizando el método de inducción, las siguientes igualdades.**

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

a) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n=1$: $\dfrac{1(1+1)}{2}=1$

Suponemos cierta la igualdad para $n=k$ y la demostramos para $n=k+1$:

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

La igualdad es cierta.

b) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n=1$: $\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=1$

Suponemos cierta la igualdad para $n=k$ y la demostramos para $n=k+1$:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

La igualdad es cierta.

c) Comprobamos que las igualdades se verifican para $n=1$: $\left[\dfrac{1(1+1)}{2}\right]^2=1$

Suponemos cierta la igualdad para $n=k$ y la demostramos para $n=k+1$:

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=\frac{k^4+6k^3+13k^2+12k+4}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

La igualdad es cierta.

125 **Discute las soluciones de la siguiente ecuación, según los valores de *m*.**

$$x^2-2x+\log m=0$$

Por la definición de logaritmo, $m>0$: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 1\cdot\log m$

Para que la ecuación no tenga solución: $4-4\log m<0\rightarrow(10,+\infty)$

Para que la ecuación tenga una solución: $4-4\log m=0\rightarrow m=10$

Para que la ecuación tenga dos soluciones: $4-4\log m>0\rightarrow(-\infty,10)$

126 **Si las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son x_1 y x_2, escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:**

a) Los cuadrados de x_1 y x_2. b) Los inversos de x_1 y x_2. c) Los opuestos de x_1 y x_2.

a) $(x - x_1^2)(x - x_2^2) = 0 \rightarrow x^2 - (x_1^2 + x_2^2)x + x_1^2 \cdot x_2^2$

b) $\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0$

c) $(x + x_1)(x + x_2) = 0 \rightarrow x^2 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$

127 **Halla la relación entre los coeficientes de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ y la suma, el producto y la suma de los dobles productos de sus tres raíces.**

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0 \rightarrow x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0$

Dividiendo la ecuación de tercer grado entre el coeficiente del monomio de mayor grado, y comparando los coeficientes, se obtiene que:

El coeficiente de segundo grado es el opuesto a la suma de las tres raíces.

El coeficiente de primer grado es la suma del resultado de multiplicar las raíces dos a dos.

El término independiente es el opuesto del producto de las tres raíces.

128 **Juan y Luis suben en una escalera mecánica. Juan sube tres veces más rápido que su amigo, haciéndolo ambos de peldaño en peldaño. Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis contó 50 escalones. Con esos datos, calcula los peldaños «visibles» de la escalera.**

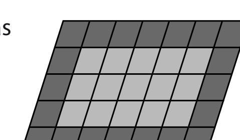
Mientras Juan sube un escalón, la escalera mecánica ha subido x escalones, y el número de escalones visibles es $75 + 75x$.

Luis sube 50 escalones. Como lo hace tres veces más despacio que Juan, mientras que Luis sube un escalón, la escalera sube $3x$. El número de escalones visibles es $50 + 150x$.

Por tanto, resulta que: $75 + 75x = 50 + 150x \rightarrow x = \frac{1}{3}$

El número de peldaños «visibles» es 100.

129 **Tenemos un suelo rectangular, formado por baldosas enteras cuadradas de color claro, que está rodeado de baldosas oscuras, también cuadradas. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo claro para que el número de baldosas de la zona clara sea igual al de la franja oscura que lo rodea?**



Sean x e y el número de baldosas claras que hay en el largo y el ancho.

$(x + 2)(y + 2) = 2xy \rightarrow$ Esta ecuación tiene infinitas soluciones.

Una solución de esta ecuación es: $x = 10$ e $y = 3$

Es decir, el rectángulo claro tendrá 10 baldosas de largo y 3 baldosas de ancho.