Conceptos básicos. Suma, resta y producto de polinomios

Un **monomio** en una variable o indeterminada x es una expresión de la forma ax^n, en la que a es un número real llamado **coeficiente**, y n es un número natural al que llamamos **grado**. Dos monomios del mismo grado reciben el nombre de **monomios semejantes**. Solamente se pueden sumar o restar monomios semejantes. Sin embargo, dos monomios cualesquiera se pueden multiplicar o dividir, aplicando para ello las propiedades de las potencias.	**Monomio**: $-6x^5$; **Coeficiente**: -6 ; **Grado**: 5 **Monomio**: $\frac{7x^3}{5}=\frac{7}{5}x^3$; **Coeficiente**: $\frac{7}{5}$; **Grado**: 3 **Suma**: $-5x^3+2x^3=(-5+2)x^3=-3x^3$ **Producto**: $(2x^4)\cdot(-6x^3)=-12x^7$; **División**: $\frac{18x^6}{-3x^5}=-6x$
Un **polinomio** en una variable o indeterminada x es una suma de monomios de la forma: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ El **grado** de un polinomio es el mayor exponente al que está elevado la variable x. El **coeficiente principal** o **coeficiente líder** del polinomio es aquel que acompaña al término de exponente más alto. **Término independiente** es el que no está acompañado de variable x.	**Polinomio**: $5x^3-4x^5-3x^6+2x^2-x+1$ **Grado**: 6 ; **Coeficiente líder**: -3 ; **Término independiente**: 1 **Polinomio**: $-x^4-\frac{1}{2}x^3+5x^2-\frac{2}{3}x$ **Grado**: 4 ; **Coeficiente líder**: -1 ; **Término independiente**: 0
Valor numérico de un polinomio	
El **valor numérico**, como su nombre indica, es el valor que resulta de sustituir en el polinomio $P(x)$ el valor de la variable por un número real dado, $x=a$. El valor numérico para $x=a$ se designa por $P(a)$. Un número real a se dice que es una **raíz** de un polinomio $P(x)$ si su valor numérico es 0, es decir: a raíz de $P(x)\Leftrightarrow P(a)=0$	El valor numérico de $P(x)=-3x^4-2x^3-\frac{1}{2}x^2-x+3$ para $x=-2$ es: $P(-2)=-3(-2)^4-2(-2)^3-\frac{1}{2}(-2)^2-(-2)+3=$ $=-3\cdot16-2\cdot(-8)-\frac{1}{2}\cdot4+2+3=-48+16-2+2+3=-29$
Suma, resta y producto de polinomios	
Suma. Para sumar polinomios se suman los monomios o términos semejantes. **Polinomio opuesto**. El opuesto de un polinomio $P(x)$ es el polinomio $-P(x)$ que resulta de cambiar el signo a todos los términos de $P(x)$ **Resta**. Para restar dos polinomios se suma al primero el opuesto del segundo. **Multiplicación o producto**. Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva respecto de la suma ("todos por todos") y se simplifican términos aplicando las propiedades de las potencias.	Dados $P(x)=2x^3-x^2+x-1$ y $Q(x)=-3x^2+6$, hagamos la suma, la resta y el producto: **Suma**: $P(x)+Q(x)=(2x^3-x^2+x-1)+(-3x^2+6)=$ $=2x^3-x^2+x-1-3x^2+6=2x^3-4x^2+x+5$ **Resta**: $P(x)-Q(x)=(2x^3-x^2+x-1)-(-3x^2+6)=$ $=2x^3-x^2+x-1+3x^2-6=2x^3+2x^2+x-7$ **Producto**: $P(x)\cdot Q(x)=(2x^3-x^2+x-1)\cdot(-3x^2+6)=$ $=2x^3\cdot(-3x^2)-x^2\cdot(-3x^2)+x\cdot(-3x^2)-1\cdot(-3x^2)+$ $+2x^3\cdot6-x^2\cdot6+x\cdot6-1\cdot6=$ $=-6x^5+3x^4-3x^3+3x^2+12x^3-6x^2+6x-6=$ $=-6x^5+3x^4+9x^3-3x^2+6x-6$

División de polinomios. Regla de Ruffini. Teorema del resto

División de polinomios

Al dividir un polinomio $P(x)$ (dividendo) de grado m entre un polinomio $Q(x)$ (divisor) de grado n, con $m>n$, se obtiene un cociente $C(x)$ de grado $m-n$, y un resto $R(x)$, de tal manera que

$$P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$$

El procedimiento para dividir es el siguiente:

1. Colocamos el dividendo y el divisor ordenados de mayor a menor grado. Si falta algún término del dividiendo dejamos un espacio.
2. Empezamos dividiendo los términos de mayor grado del dividendo y del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicamos este término por cada uno de los términos del divisor y los colocamos, con signo contrario (pues hemos de restar) bajo los términos correspondientes del dividendo.
4. Continuamos el proceso hasta que el grado del polinomio obtenido es menor que el grado del divisor (éste último será el resto de la división).

Dados $P(x)=2x^2-x^4-x+3$ y $Q(x)=-x^2+2x-2$, efectuar la división $P(x):Q(x)$.

Colocamos adecuadamente el dividendo y el divisor y procedemos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
-x^4 & & +2x^2 & -x & +3 & -x^2+2x-2 \\ \cline{6-6}
x^4 & -2x^3 & +2x^2 & & & x^2+2x \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +4x^2 & -x & +3 & \\
 & +2x^3 & -4x^2 & +4x & & \\ \cline{2-5}
 & & & 3x & +3 &
\end{array}$$

De este modo, el cociente es el polinomio $C(x)=x^2+2x$ y el resto es el polinomio $R(x)=3x+3$.

Además, puedes comprobar que se cumple la siguiente igualdad (“dividendo igual a divisor por cociente más el resto”):

$$-x^4+2x^2-x+3=\left(-x^2+2x-2\right)\cdot\left(x^2+2x\right)+\left(4x+3\right)$$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un método para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $x-a$ o $x+a$. El procedimiento es el siguiente:

1. Colocamos en horizontal los coeficientes del dividendo ordenado de mayor a menor grado y, **si falta alguno, ponemos un cero**.
2. A la izquierda y más abajo colocamos el valor de la variable que anula el cociente, es decir, a si el divisor es $x-a$; o bien $-a$ si el divisor es $x+a$.
3. Bajamos directamente el primer coeficiente del dividendo. Éste será el primer coeficiente del cociente.
4. Multiplicamos sucesivamente a o $-a$ por cada término del cociente, y sumamos el resultado con el coeficiente siguiente del dividendo.
5. El cociente $C(x)$ es un polinomio de **un grado menor** que el divisor, cuyos coeficientes están ordenados.
6. El resto R de la división es el último número.

Dividir $P(x)=x^4-2x^3-5x+2$ entre $x+2$.

Colocamos en horizontal los coeficientes del dividendo y ponemos un cero en el lugar del término de grado dos, que no aparece. Colocamos debajo, a la izquierda el valor que anula el cociente, en este caso -2, y procedemos:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -2 & 0 & -5 & 2 \\
-2 & & -2 & 8 & -16 & 42 \\ \hline
 & 1 & -4 & 8 & -21 & 44
\end{array}$$

El cociente de la división es el polinomio de grado 3 cuyos coeficientes son los números de la última fila, salvo el último, que es el resto:

$$C(x)=x^3-4x^2+8x-21\ \ ;\ \ R=44$$

Teorema del resto

El resto R que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio del tipo $x-a$ ($x+a$), es igual al valor numérico del polinomio para $x=a$ ($x=-a$). Es decir:

$$R=P(a) \text{ o bien } R=P(-a)$$

Si se divide $P(x)$ entre $x-a$, obtenemos un cociente $Q(x)$ y un resto R de tal manera que $P(x)=(x-a)\cdot C(x)+R$

Sustituyendo x por a tenemos:

$$P(a)=(a-a)\cdot C(a)+R=0\cdot C(a)+R=0+R=R$$

Por ejemplo, el resto R de la división $\left(x^3-2x+1\right):(x+2)$ es

$$R=P(-2)=(-2)^3-2(-2)+1=-8+4+1=-3$$

Factorización de polinomios

Concepto de factor de un polinomio. Polinomios irreducibles

Un polinomio $Q(x)$ es un **factor** de otro polinomio $P(x)$ si al realizar la división $P(x):Q(x)$ el resto es cero.

En este caso $P(x)=Q(x)\cdot C(x)$ donde $C(x)$ es el cociente de la división.

Un polinomio que no tiene factores se denomina **polinomio irreducible**. Por ejemplo, todos los polinomios de grado uno de la forma $x+a$ o $x-a$, son irreducibles.

Hemos visto que a es una raíz de un polinomio $P(x)$ si $P(a)=0$. Por el teorema del resto, esto quiere decir que al dividir $P(x)$ entre $x-a$ el resto es cero, es decir que $P(x)=(x-a)\cdot C(x)$.

Por tanto, decir que a es una raíz de un polinomio $P(x)$ es lo mismo que decir $x-a$ es un factor de $P(x)$. También diremos que a es una solución de la ecuación $P(x)=0$.

Factorización de polinomios. Procedimiento

Si un polinomio $P(x)$ tiene coeficientes enteros, para que a sea una raíz del mismo, es necesario que su término independiente sea múltiplo de a.

Por tanto, para buscar factores de $P(x)$ del tipo $x-a$, probaremos con los valores de a que sean divisores (positivos y negativos) del término independiente.

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como producto de factores irreducibles. Si el polinomio tiene coeficientes enteros, el procedimiento a seguir para factorizarlo será pues el siguiente:

1. Encontramos los divisores del término independiente.
2. Comprobamos si son raíces del polinomio, comenzando por el más pequeño.
3. Con el primero que encontremos aplicamos la regla de Ruffini.
4. Tomamos el cociente que hayamos obtenido y repetimos el proceso empezando a probar con la misma raíz obtenida anteriormente.
5. Si un divisor del término independiente no es raíz en un paso, tampoco lo será en el siguiente. Puede que haya raíces repetidas (dobles, triples, etc.); por lo tanto, si una raíz lo es en un paso, también lo puede ser en el siguiente.
6. Cuando tengamos un cociente de grado 2, podemos resolver la ecuación correspondiente de segundo. Es la única opción que tenemos si el polinomio tiene raíces reales no enteras (racionales o irracionales).
7. Finalmente escribimos la descomposición en producto de factores del polinomio.

Factorizar el polinomio $x^5-12x^3-2x^2+27x+18$.

1. Divisores del término independiente:
   $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm9,\ \pm18$
2. Probamos si los divisores son raíces del polinomio:
   - $P(1)=1^5-12\cdot1^3-2\cdot1^2+27\cdot1+18=$
     $=1-12-2+27+18=32\neq0\Rightarrow1$ **no es raíz**.
   - $P(-1)=(-1)^5-12\cdot(-1)^3-2\cdot(-1)^2+27\cdot(-1)+18=$
     $-1+12-2-27+18=0\Rightarrow-1$ **sí es raíz**.
3. Aplicamos la regla de Ruffini con $x=-1$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -12 & -2 & 27 & 18 \\ -1 & & -1 & 1 & 11 & -9 & -18 \\ \hline & 1 & -1 & -11 & 9 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

   El cociente resultante es $x^4-x^3-11x^2+9x+18$

4. Tomamos el cociente resultante y repetimos el proceso probando de nuevo la misma raíz:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -11 & 9 & 18 \\ -1 & & -1 & 2 & 9 & -18 \\ \hline & 1 & -2 & -9 & 18 & \boxed{0} \end{array}$$

Y así sucesivamente repetimos el proceso hasta que terminemos con un polinomio irreducible. Podemos continuar de una manera más compactada aplicando Ruffini repetidamente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -9 & 18 \\ 2 & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 9 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Por tanto $P(x)=(x+1)^2(x-2)(x-3)(x+3)$

Fracciones algebraicas

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, con $Q(x)\neq 0$ una **fracción algebraica** es una expresión algebraica del tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Si $P(x)$ es un número real, es decir si $P(x)=k$, entonces la expresión $\dfrac{k}{Q(x)}$, también se considera una fracción algebraica.

Por poner algunos ejemplos, son fracciones algebraicas las siguientes:

$$\frac{2x^3-3x^2+6x-5}{4x^4-3x^2+x-1}\ ;\ \frac{x+1}{x^2-1}\ ;\ \frac{2x-3}{x-2}\ ;\ \frac{2}{x}\ ;\ \frac{1}{x^3-x^2+x-1}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

En general, para simplificar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se factorizan $P(x)$ y $Q(x)$. Si existen factores comunes se eliminan y queda otra fracción algebraica equivalente donde los grados del numerador y del denominador son menores que los de la fracción algebraica original.

Para simplificar la fracción algebraica $\dfrac{2x^3-7x^2-5x+4}{x^3-6x^2+5x+12}$ factorizamos los polinomios y eliminamos factores comunes:

$$\frac{2x^3-7x^2-5x+4}{x^3-6x^2+5x+12}=\frac{(x+1)(x-4)(2x-1)}{(x+1)(x-3)(x-4)}=\frac{2x-1}{x-3}$$

A veces se descompone la fracción en dos sumandos. Si $\text{grado}\,P(x)\geq\text{grado}\,Q(x)$ efectuamos la división y hallamos el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$. Entonces tenemos que $P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$. Dividiendo todos los términos entre $Q(x)$ tenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

De la fracción $\dfrac{x^3-3x^2+x-2}{x^2+4x-1}$ se obtiene, realizando la división, que el cociente es $C(x)=x-7$ y el resto es $R(x)=30x-9$ (¡compruébalo!). Entonces:

$$x^3-3x^2+x-2=(x^2+4x-1)(x-7)+(30x-9)$$

Y de aquí:

$$\frac{x^3-3x^2+x-2}{x^2+4x-1}=x-7+\frac{30x-9}{x^2+4x-1}$$

Suma, resta, producto y división de fracciones algebraicas

Suma y resta. Para sumar o restar fracciones algebraicas se procede exactamente igual que al sumar o restar fracciones numéricas. Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores (para ello debemos factorizar los denominadores) y procedemos a efectuar las sumas y restas correspondientes. Al final, si es posible, se simplifica la fracción algebraica resultante, tal y como se ha mostrado en la sección anterior.

$$\frac{2x^3-x^2+x-1}{x^3+2x^2-x-2}-\frac{x^2-x+2}{x^2-1}=\frac{2x^3-x^2+x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{x^2-x+2}{(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x^3-x^2+x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{(x^2-x+2)(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{2x^3-x^2+x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)}-\frac{x^3+x^2+4}{(x+1)(x-1)(x+2)}=$$

$$=\frac{x^3-2x^2+x-5}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+2x^2-x-2}$$

Producto y división. El producto y la división de fracciones algebraicas se realiza exactamente igual que el producto y división de fracciones numéricas. Al final, si es posible, se simplifica la fracción algebraica resultante, tal y como se ha mostrado en la sección anterior. Por eso es mejor factorizar todos los polinomios antes de efectuar los productos correspondientes .

$$\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x-1}{x^2-x-2}=\frac{(x^2-4)(x-1)}{(x^2+2x-3)(x^2-x-2)}=$$

$$\frac{(x+2)(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+3)(x+1)(x-2)}=\frac{x+2}{(x+3)(x+1)}=\frac{x+2}{x^2+4x+3}$$