Ecuaciones exponenciales

En una ***ecuación exponencial*** la incógnita se encuentra en el exponente. No hay un procedimiento concreto para resolverlas, pero sí que es importante conocer y aplicar las propiedades de las potencias, de las raíces y, en su caso, de los logaritmos.

Normalmente nos podemos encontrar con cuatro casos.

- Conseguir que los dos miembros de la ecuación tengan la misma base.
- Aplicar un cambio de variable.
- Extraer factor común.
- Aplicar logaritmos.

Veamos algunos ejemplos que aclaren cada uno de los casos que se puedan presentar.

Resolver la ecuación $2^x\cdot 4^{2x-1}=16$

En este caso expresar todos los factores en base 2. Luego aplicamos las propiedades de las potencias para simplificar:

$$2^x\cdot\left(2^2\right)^{2x-1}=2^4\Rightarrow 2^x\cdot 2^{4x-2}=2^4\Rightarrow 2^{5x-2}=2^4$$

Ahora usamos que si $a^m=a^n\Rightarrow m=n$:

$$5x-2=4\Rightarrow 5x=6\Rightarrow x=\frac{6}{5}$$

Resolver la ecuación $\dfrac{2^x\sqrt{4^x}}{8^{x+1}}=\sqrt{\dfrac{16^{x-1}}{2^{1-x}}}$

Esta ecuación es más complicada pero se procede como en el ejemplo anterior, utilizando las propiedades de las potencias:

$$\frac{2^x\sqrt{2^{2x}}}{2^{3x+3}}=\sqrt{\frac{2^{4x-4}}{2^{1-x}}}\Rightarrow\frac{2^x\cdot\left(2^{2x}\right)^{1/2}}{2^{3x+3}}=\left(\frac{2^{4x-4}}{2^{1-x}}\right)^{1/2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2^x\cdot 2^x}{2^{3x+3}}=\left(2^{5x-5}\right)^{1/2}\Rightarrow 2^{-x-3}=2^{\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-3=\frac{5}{2}x-\frac{5}{x}\Rightarrow -2x-6=5x-5\Rightarrow -7x=1\Rightarrow x=-\frac{1}{7}$$

Resolver la ecuación $9^x-10\cdot 3^x+9=0$

En este caso no podemos recurrir al método empleado anteriormente. Proponemos pues un cambio de variable. Para ello llamaremos $3^x=t$, con lo que $9^x=\left(3^2\right)^x=\left(3^x\right)^2\Rightarrow 9^x=t^2$. Aplicando el cambio tenemos:

$$t^2-10t+9=16\Rightarrow t^2-10t+9=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos dos soluciones para t: $t_1=1$, $t_2=9$. Deshaciendo el cambio obtenemos las soluciones para x:

$$t=1\Rightarrow 3^x=1=3^0\Rightarrow x=1\quad;\quad t=9\Rightarrow 3^x=9=3^2\Rightarrow x=2$$

Resolver la ecuación $3\cdot 2^{x+1}-2^x=10$

En este caso vamos a extraer factor común (aunque con un cambio de variable también se podría resolver):

$$3\cdot 2^{x+1}-2^x=10\Rightarrow 3\cdot 2\cdot 2^x-2^x=10\Rightarrow 6\cdot 2^x-2^x=10\Rightarrow(6-1)\cdot 2^x=10\Rightarrow 5\cdot 2^x=10\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$$

Como último ejemplo resolveremos la ecuación exponencial $5^{2x-1}-3^{x+1}=0$

Ahora no podemos aplicar ninguno de los métodos anteriores. Aplicamos logaritmos teniendo en cuenta sus propiedades.

$$5^{2x-1}-3^{x+1}=0\Rightarrow 5^{2x-1}=3^{x+1}\Rightarrow\log 5^{2x-1}=\log 3^{x+1}\Rightarrow(2x-1)\log 5=(x+1)\log 3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x\cdot\log 5-\log 5=x\cdot\log 3+\log 3\Rightarrow 2x\log 5-x\cdot\log 3=\log 5+\log 3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(2\log 5-\log 3)=\log 5+\log 3\Rightarrow x=\frac{\log 5+\log 3}{2\log 5-\log 3}\cong 1,277$$

Ecuaciones logarítmicas

En una ***ecuación logarítmica*** la incógnita está afectada por un logaritmo. Al igual que ocurría con las ecuaciones exponenciales, no hay un procedimiento concreto para resolver una ecuación logarítmica, pero debemos conocer y aplicar con criterio las propiedades de los logaritmos.

En general la estrategia para resolver ecuaciones logarítmicas consiste en transformar la ecuación hasta que los dos miembros de la igualdad estén expresados mediante el mismo logaritmo y luego aplicar que si $\log_a m = \log_a n$, entonces $m = n$. Para ello se aplican las propiedades de los logaritmos y, si algún término es un número se expresa mediante un logaritmo utilizando que $k = \log_a a^k$.

Finalmente, una vez resuelta, **se deberá comprobar** que la solución no provoque la existencia de un logaritmo de un número negativo o de 0.

Resolver la ecuación $2\log x + 1 = \log 4 + \log 5x$

En primer lugar transformamos los números en logaritmos:

$$2\log x + \log 10 = \log 4 + \log 5x$$

Ahora usamos las propiedades de los logaritmos:

$$\log x^2 + \log 10 = \log 4 + \log 5x \Rightarrow \log 10x^2 = \log 20x$$

Ya tenemos los dos términos igualados a un mismo logaritmo, por tanto:

$$10x^2 = 20x \Rightarrow 10x^2 - 20x = 0 \Rightarrow 10x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Ahora comprobamos las soluciones sustituyéndolas en la ecuación original. Recuérdese que un logaritmo, o bien de 0, o bien de un número negativo no existe.

$$x = 0 \Rightarrow 2\log 0 + 1 = \log 4 + \log 0$$

$$x = 2 \Rightarrow 2\log 2 + 1 = \log 4 + \log 10$$

Esto indica que solamente $x = 2$ es solución (con la calculadora se puede comprobar que primer y segundo miembro son iguales).

Resolver la ecuación $(x^2 - 5x + 9)\log 2 + \log 125 = 3$

Aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$(x^2 - 5x + 9)\log 2 + \log 125 = 3 \Rightarrow \log 2^{x^2-5x+9} + \log 125 = \log 10^3 \Rightarrow \log\left(2^{x^2-5x+9} \cdot 125\right) = \log 1000$$

Ya tenemos los dos términos igualados a un mismo logaritmo, entonces:

$$2^{x^2-5x+9} \cdot 125 = 1000 \Rightarrow 2^{x^2-5x+9} = 8 \Rightarrow 2^{x^2-5x+9} = 2^3 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos que las soluciones son $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Ambas son también soluciones de la ecuación logarítmica inicial pues, evidentemente, al no se obtiene ningún logaritmo de cero o de un número negativo.

Resolver la ecuación logarítmica $\log\sqrt{3x+1} - \log\sqrt{2x-3} = 1 - \log 5$

Aplicando de nuevo las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$\log\sqrt{3x+1} - \log\sqrt{2x-3} = 1 - \log 5 \Rightarrow \log\sqrt{3x+1} - \log\sqrt{2x-3} = \log 10 - \log 5 \Rightarrow \log\frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}} = \log\frac{10}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3x+1}{2x-3}} = \frac{10}{5} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{3x+1}{2x-3}}\right)^2 = \left(\frac{10}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{3x+1}{2x-3} = 4 \Rightarrow 3x+1 = 8x-12 \Rightarrow -5x = -13 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$$

Esta solución es solución de la ecuación logarítmica inicial pues, sustituyendo en la misma, se obtiene:

$$\log\sqrt{\frac{39}{5}+1} - \log\sqrt{\frac{26}{5}-1} = 1 - \log 5 \Rightarrow \log\sqrt{\frac{44}{5}} - \log\sqrt{\frac{21}{5}} = 1 - \log 5$$

Expresión esta última que tiene sentido pues se trata de realizar logaritmos de números positivos.

Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Son sistemas con dos incógnitas formados por ecuaciones exponenciales o logarítmicas o ambas.

Para resolver este tipo de sistemas se utilizan los conocimientos anteriores de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, con el objetivo de reducirlos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, habitualmente no lineal. Normalmente el método que se aplica es el de sustitución.

Veamos un par de ejemplos.

Resuelve el sistema $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2\log x = \log\left(y^2+21\right) \end{cases}$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para obtener ecuaciones no logarítmicas en el sistema:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2\log x = \log\left(y^2+21\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x + \log y = \log 10 \\ \log x^2 = \log\left(y^2+21\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log xy = \log 10 \\ \log x^2 = \log\left(y^2+21\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x^2 = y^2+21 \end{cases}$$

Observa que ya hemos reducido el sistema original a un sistema no lineal con dos incógnitas. Despejamos, por ejemplo, de la primera ecuación, la incógnita y : $y = \dfrac{10}{x}$, y la sustituimos en la segunda ecuación.

$$x^2 = \left(\frac{10}{x}\right)^2 + 21 \Rightarrow x^2 = \frac{100}{x^2} + 21 \Rightarrow x^4 = 100 + 21x^2 \Rightarrow x^4 - 21x^2 - 100 = 0$$

Esta última es una ecuación bicuadrada. Efectuando el cambio de variable $x^2 = z$, resulta la ecuación de segundo grado: $z^2 - 21z - 100 = 0$, cuyas soluciones son $z_1 = 25$, $z_2 = -4$. La segunda de las soluciones no proporciona soluciones para x. Si $z = 25$, entonces tenemos dos soluciones para x: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$. Hemos de descartar la última de ellas pues da lugar a logaritmos negativos, que no tienen sentido.

Finalmente si $x = 5$, obtenemos $y = \dfrac{10}{5} \Rightarrow y = 2$, que es la solución del sistema planteado inicialmente.

Resuelve el sistema $\begin{cases} 2\cdot 2^x + 3^y = 7 \\ 2^x + 2\cdot 3^y = 8 \end{cases}$

En este caso se trata de un sistema de ecuaciones exponenciales. Si aplicamos los cambios $2^x = a$ y $2^y = b$ nos queda en este caso un sistema lineal:

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ a + 2b = 8 \end{cases}$$

De la segunda ecuación

$$a = 8 - 2b$$

Sustituyendo en la primera:

$$2(8-2b) + b = 7 \Rightarrow 16 - 4b + b = 7 \Rightarrow -3b = -9 \Rightarrow b = 3$$

Por tanto:

$$a = 8 - 2\cdot 3 = 8 - 6 \Rightarrow a = 2$$

Ahora deshacemos los cambios de variable realizados al principio:

$$2^x = a \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$3^y = b \Rightarrow 3^y = 3 \Rightarrow y = 1$$