MATEMÁTICAS I: 1º BACHILLERATO
Capítulo 2: Álgebra

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO.

Karl Friedrich Gauss

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

En este apartado vamos a centrarnos en la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado y en su interpretación gráfica, para luego exponer los sistemas de ecuaciones e inecuaciones y su aplicación a las Ciencias y a las Ciencias Sociales.

Ya sabes que:

2.1. Resolución de ecuaciones de primer grado

Recuerda que:

La técnica para resolver una ecuación de primer grado consiste siempre en transformar la ecuación inicial en otra equivalente hasta conseguir aislar la incógnita en el primer miembro:

Ejemplo:

- Resolver la ecuación: $\frac{7(x-1)}{3}+\frac{5x}{6}=1-\frac{x}{2}$
- *Primer paso: Suprimir los denominadores.*

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 6, multiplicamos por 6 toda la ecuación.

$$\frac{6.7(x-1)}{3}+\frac{6.5x}{6}=6.1-\frac{6.x}{2} \Rightarrow 14(x-1)+5x=6-3x$$

- *Segundo paso: Efectuar los paréntesis:*

$$14x-14+5x=6-3x$$

- *Tercer paso: Trasponer términos y simplificar:*

$$14x+5x+3x=6+15 \Rightarrow 22x=20$$

- *Cuarto paso: despejar la incógnita, simplificando el resultado.*

$$x=\frac{20}{22}=\frac{10}{11}$$

- *Quinto paso: Comprobar el resultado.*

Sustituimos el resultado obtenido en la ecuación dada y comprobamos que se verifica la igualdad.

Recuerda que:

Las ecuaciones permiten resolver muchos tipos de problemas.

El tratamiento habitual ante un problema concreto es el siguiente:

1. **Plantear una ecuación que concuerde con el enunciado.**
2. **Resolver la ecuación.**
3. **Comprobar el resultado e interpretarlo**

Ejemplo:

- La suma de tres números enteros consecutivos es 108. ¿Cuáles son esos números?

Llamando x al menor. Los tres números, al ser consecutivos, serán:

1º número: x

2º número: $x+1$

3º número: $x+2$

Planteamos ahora la ecuación correspondiente al enunciado: la suma ha de ser 108. Por tanto:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 108$$

Los paréntesis, en este caso, no son necesarios debido a la propiedad asociativa de la suma de números reales. Se han puesto, exclusivamente, para aclarar la ecuación que estamos escribiendo.

Eliminamos los paréntesis y agrupamos términos nos queda:

$$x + x + 1 + x + 2 = 108 \Rightarrow x + x + x = 108 - 1 - 2 = 105 \Rightarrow 3x = 105$$

Despejando la incógnita:

$$x = \frac{105}{3} = 35.$$

Por tanto los números son 35, 36 y 37, cuya suma es 108.

2.2. Ecuaciones de segundo grado

Ya sabes que:

Recuerda que

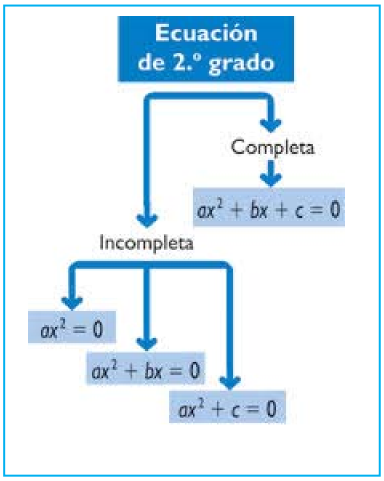
Una ecuación de segundo grado es aquella que tiene como forma general la siguiente:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}, \text{ con } \boldsymbol{a \neq 0}.$$

Una ecuación tiene tantas soluciones como su grado.

Ya sabes que al ser de grado 2 tendrá 2 soluciones o 1 o ninguna en el campo real.

Según sea la ecuación de segundo grado sus soluciones se pueden hallar:



Caso 1: El coeficiente de la x es 0: b = 0:

En este caso la ecuación es de la forma: $ax^2 + c = 0$.

Para hallar las soluciones basta con despejar la x:

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplo:

- Resolver la ecuación: $2x^2 - 8 = 0$

Se despeja x^2: $$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

Caso 2: El término independiente es 0: $c = 0$

La ecuación es ahora de la forma:

$$ax^2 + bx = 0\,.$$

Para resolver basta con sacar factor común a la x:

$$ax + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

En este caso siempre una de las dos soluciones va a ser la $x = 0$.

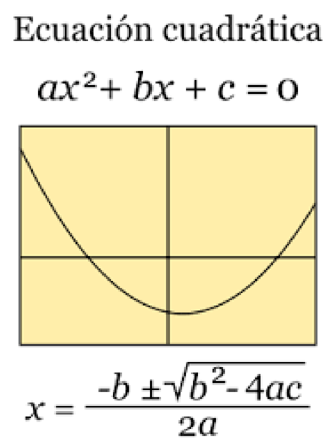
Los casos 1 y 2 son **ecuaciones de segundo grado incompletas**, que también se pueden resolver aplicando la fórmula general. Sin embargo es más rápido resolverlas de la manera que acabamos de exponer.

Caso 3: Resolución analítica de una ecuación de segundo grado completa:

Solución gráfica de una ecuación de segundo grado: Consideramos la función

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Su representación gráfica es una parábola, donde las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos de corte de ésta con el eje de abscisas.



Fuente Wikipedia

*Solución analítica de una **ecuación de segundo grado completa:*** Partiendo de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vamos a obtener el valor de x:

Pasamos el término independiente al segundo miembro quedando expresado de la siguiente manera: $$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos toda la ecuación por $4a$: $$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumamos b^2 a ambos miembros: $$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer miembro es el cuadrado del binomio $2ax + b$. Por tanto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraemos la raíz cuadrada: $$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Pasamos b al segundo miembro y dividimos por $2a$, con lo que obtenemos el siguiente resultado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es la fórmula general para calcular las dos soluciones de la ecuación de segundo grado

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Particularidades:

El radicando, $b^2 - 4ac$, recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación. Se representa por la letra griega Δ. Según sea el signo del discriminante pueden darse tres casos:

- $\Delta > 0$: La ecuación tendrá las dos soluciones x_1 y x_2
- $\Delta = 0$: La ecuación tiene una única **solución doble**, las dos soluciones de la ecuación son iguales:

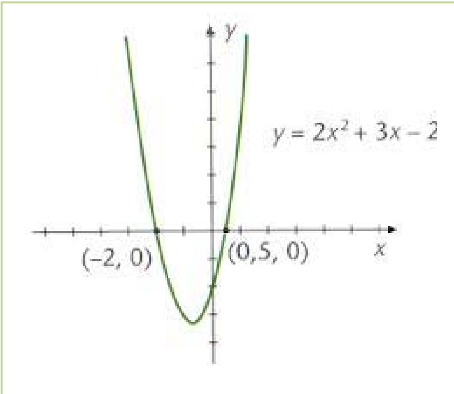
$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0$**:** El radicando es negativo, la ecuación no tiene raíces reales, (la raíz da lugar a un número ** complejo no real,).

Ejemplo:

- Resolver la ecuación:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$



Su solución gráfica es una parábola con el vértice hacia abajo al tener positivo el coeficiente de x^2, como hemos representado aquí.

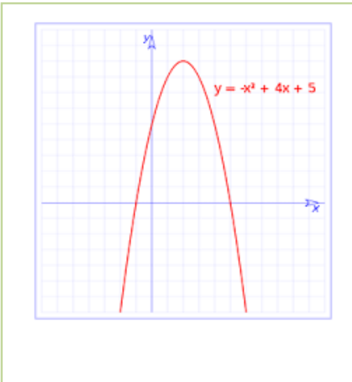
Vamos a ver que sus soluciones analíticas son los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.

Comprobémoslo:

$2x^2 + 3x - 2 = 0$. Aplicando la fórmula general de resolución de una ecuación de segundo grado completa.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -2,$$

que coinciden con los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.



Ejemplo:

- Vamos a considerar ahora un ejemplo de una ecuación de segundo grado con el coeficiente de x^2 negativo $-x^2 + 4x + 5$ cuya representación gráfica es una parábola con el vértice hacia arriba:

Como en el ejemplo anterior aplicamos la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado, la ecuación es:

$$-x^2 + 4x + 5$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-1).5}}{2.(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2} \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 5,$$

que coinciden con el corte de la parábola con el eje de abscisas.

Suma y producto de las soluciones en una ecuación de segundo grado

Vamos a calcular ahora a qué es igual la suma y el producto de las dos raíces de una ecuación de segundo grado.

Llamamos:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a las dos soluciones o raíces.

Veamos en primer lugar, a qué es igual la suma de ambas:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

Es decir:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Veamos ahora el producto:

$$x_1.x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} . \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Es decir: $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

Fórmula de *Cárdano*. $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Las igualdades anteriores nos permite resolver el problema inverso al habitual: en lugar de dada una ecuación hallar sus raíces o soluciones, podremos, sabiendo cuáles son las soluciones de una ecuación, hallar la expresión de dicha ecuación.

En efecto, consideramos la ecuación de segundo grado de siempre, de soluciones x_1 y x_2:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividiendo toda la ecuación por el coeficiente de x^2:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Ecuación equivalente a la dada.

Fijándonos en dicha ecuación, vemos que el coeficiente de la x es igual a la suma de las dos raíces con el signo contrario, mientras que el término independiente es igual al producto de las dos raíces.

Como consecuencia: si las dos raíces de una ecuación de segundo grado son x_1 y x_2, la ecuación es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - sx + p = 0$$

Ejemplo:

- Las dos raíces de una ecuación de segundo grado son $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 2/3$. ¿Cuál es esa ecuación?

Sumando las dos raíces tenemos: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$. Lo llamamos s.

Multiplicamos las dos raíces y tenemos: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Lo llamamos p.

Por la fórmula anterior obtenemos que la ecuación es: $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$.

Si quitamos denominadores nos queda: $6x^2 - 7x + 2 = 0$.

- Otra forma de resolver este tipo de problemas es hacer uso de la factorización de polinomios que se estudió en páginas anteriores.

Consideramos la ecuación de segundo grado completa $ax^2+bx+c=0$ de soluciones x_1 y x_2.

Sabemos que esta primera ecuación es equivalente a esta otra: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

En consecuencia, el polinomio correspondiente a la misma es: $p(x)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$

Tiene como raíces los números x_1 y x_2 y su descomposición factorial es:

$$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)$$

Si efectuamos el producto, podemos escribir la ecuación correspondiente:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

Se pueden plantear múltiples problemas de la vida real y de aplicación a otras ciencias.

Las pautas a seguir son iguales que las de las ecuaciones de primer grado.

Veamos un ejemplo:

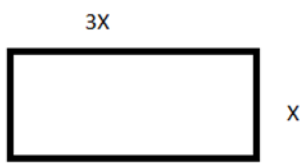
Ejemplo:

- Queremos sembrar de césped una parcela rectangular de 27 m^2, de manera que uno de los lados de la misma sea el triple que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

Llamando x al lado más pequeño del rectángulo, el otro, al ser triple, medirá $3x$.

Puesto que el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura:

$$3x\cdot x=27\Rightarrow 3x^2=27\Rightarrow x^2=9$$



Por tanto las dos soluciones de esta ecuación son x = 3 y x = –3.

Pero puesto que no tienen sentido que una longitud sea negativa para una parcela, la única solución válida para es x = 3 m. Según esto las dimensiones de la parcela son 3 m y 9 m.

Ecuaciones bicuadradas:

Se llaman ecuaciones **bicuadradas** a las ecuaciones del tipo siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Son ecuaciones de cuarto grado, en las cuales la incógnita aparece únicamente elevada a potencias pares. Al ser de cuarto grado, tendrá 4 soluciones.

El proceso general para resolver este tipo de ecuaciones es hacer un cambio de variable.

Haciendo $t=x^2$ tendremos la expresión siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow at^2 + bt + c = 0$$

Conseguimos convertir la ecuación de cuarto grado en una ecuación de segundo grado fácil de resolver, de ahí que lo haya incluido como una ecuación de segundo grado particular.

Se resuelve la ecuación de segundo grado como tal y una vez resuelta debemos realizar el último paso:

Hemos hallado el valor de t, pero la incógnita es x. Con lo cual hemos de deshacer el cambio efectuado:

Si $x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$

Ejemplo:

- Resolver la ecuación $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

Efectuando el cambio $x^2 = t$, la ecuación se convierte en :

$$3t^2 + t - 4 = 0$$

Que resolvemos para t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.3.(-4)}}{2.3} = \frac{-1 \pm 7}{6} \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -\frac{4}{3}$$

Es decir, las dos soluciones de esta ecuación son $t_1 = 1$ y $t_2 = -4/3$, deshacemos el cambio:

$$x^2 = t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = t = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Esta última solución no es un número real, pues una raíz cuadrada negativa no tiene solución real. Se encuentra dentro de los números imaginarios que ya conoces del capítulo anterior.

En definitiva, las cuatro soluciones de la ecuación bicuadrada inicial son:

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}i; x_4 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

39. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x-4}{3x-2}=\frac{4}{7}$

b) $\frac{x+8}{x-1}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{12x}{x^2-1}$

c) $\frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{6}+4x+\frac{x+1}{3}=x+\frac{151}{12}$

40. Resolver:

a. $\frac{x^2}{25}+\frac{(x+3)^2}{9}=1$

b. $\frac{x^2}{16}=1+\frac{3/4x}{9}$

c. $4x^4+8x^2-12=0$

d. $80x^4-48x^2-12=0$

41. Sumando siete unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23.¿De que número se trata?

42. Las dimensiones de un rectángulo son 54 y 36 metro. Trazar una paralela al lado que mide 36 m de modo que se forme un rectángulo semejante al primero. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que dicha paralela divide al lado de 54 m?

43. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €.Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca .¿Cuánto vale cada cosa?

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Resolución de inecuaciones de primer grado y su interpretación gráfica

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

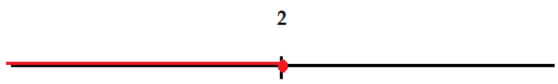
El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

Así,

- $4 \geq x + 2$ y $x + y \geq 2$ son inecuaciones de primer grado, mientras que $x^2 - 5 \geq x$ es de segundo grado.

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan **soluciones** de la misma.

Por ejemplo:

- $4 \geq x + 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \quad \Leftrightarrow$ 

Inecuaciones equivalentes

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

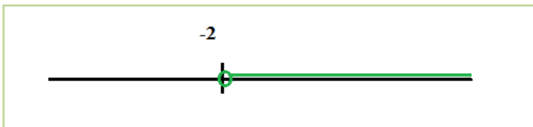
- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

$$5x + 4 < 9 \Leftrightarrow 5x + 4 - 4 < 9 - 4 \Leftrightarrow 5x < 5$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$5x < 5 \Leftrightarrow 5x : 5 < 5 : 5 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

$x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \ \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$ 

Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \quad \text{o bien} \quad ax \leq b.$$

Para resolver la inecuación en la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1º) **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

2º) **Quitar los paréntesis**, si los hay.

3º) **Transponer** los términos con x a un miembro y los números al otro.

4º) **Reducir** términos semejantes.

5º) **Despejar** la x.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

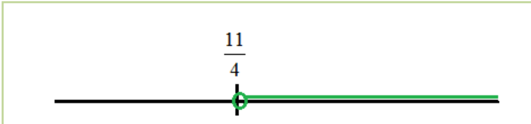
Ejemplo:

$$\frac{x-5}{3}-\frac{(x-8)}{6}>\frac{3-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-5)-(x-8)}{6}>\frac{3(3-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-5)-(x-8)>3(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-10-x+8>9-3x \Leftrightarrow 2x-x+3x>10-8+9 \Leftrightarrow$$

$$4x>11 \Leftrightarrow x>\frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4},+\infty\right)$$



Actividades propuestas

44. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $5 + 3x < 2x + 4$ b) $3 + 4x \leq 8x + 6$ c) $5 + 4x > 3x + 2$ d) $1 + 3x \geq 5x + 7$

45. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $4(3 + 2x) < -(6x + 8)$ b) $7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3)$ c) $9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$

46. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $6 + 3x < x/3 + 1$ b) $5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$ c) $(2 + 5x)/3 > 4x + 1$ d) $(1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$

47. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[2, \infty)$ b) $(-\infty, 3)$ c) $(4, \infty]$ d) $(-\infty, 2)$

48. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{-x-9}$ c) $\sqrt{2-7x}$ d) $\sqrt{-2x+7}$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Resolución de inecuaciones lineales de segundo grado

Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.

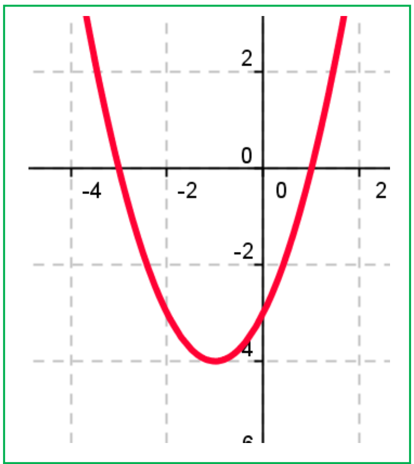
En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Ejemplo:

- *Representa gráficamente la parábola*

$$y = x^2 + 2x - 3$$

e indica en qué intervalos es $x^2 + 2x - 3 > 0$.



Observa en la gráfica que la parábola toma valores negativos entre –3 y 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

El punto –3 no es solución, ni tampoco el punto 1, pues el problema tiene una desigualdad estricta, >.

Si tuviera la desigualdad $\geq$, $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, la solución sería:

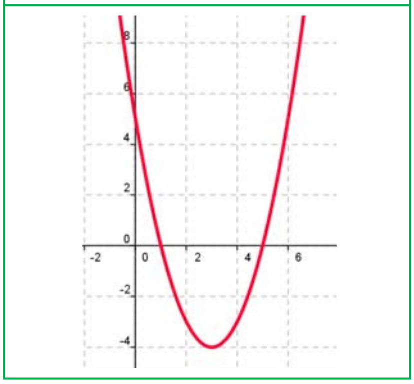
$$x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty).$$

Si fuera $x^2 + 2x - 3 < 0$, la solución sería: $x \in (-3, 1)$.

Si fuera $x^2 + 2x - 3 \leq 0$, la solución sería: $x \in [-3, 1]$.

Ejemplo:

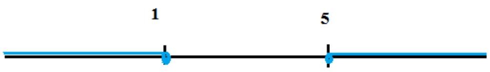
- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$



Las raíces de $x^2 - 6x + 5 = 0$ son $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+		–		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

49. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

50. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

51. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$

c) $x^2 + 9x + 14 > 0$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$

f) $x^2 + 8x + 16 > 0$

g) $x^2 + x + 3 \geq 0$

h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

52. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 6 > 0$

b) $x^2 - x - 12 \leq 0$

c) $x^2 - \mathrm{x} - 20 < 0$

d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$

f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$

h) $2x^2 + x - 15 < 0$

53. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

54. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\dfrac{3x - 2}{x} \leq \dfrac{5 - 2x}{x + 3}$

3.4. Sistemas de inecuaciones lineales

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones, que debe satisfacerse a la vez.

Para su resolución, se procede de la manera siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado.
- **El conjunto solución** del sistema, también llamado **región factible**, está formada por las soluciones comunes a todas las inecuaciones.

Ejemplo:

- Tomemos como ejemplo el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y \le 3 \\ x + y \ge 1 \end{cases}$$

1º Representamos la región solución de la primera inecuación.

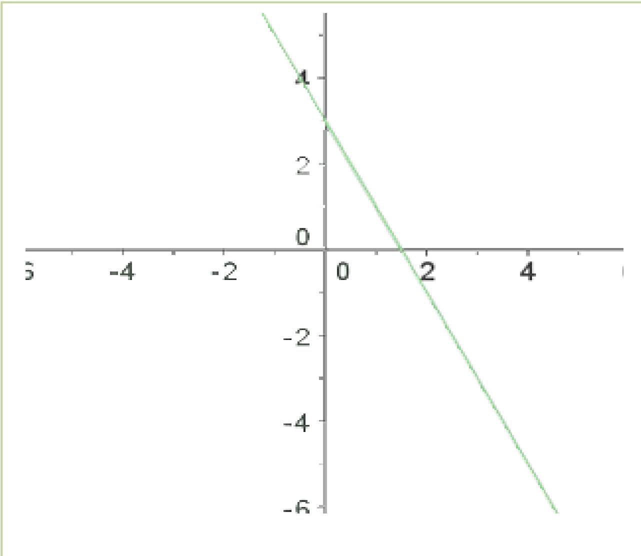
Transformamos la desigualdad en igualdad.

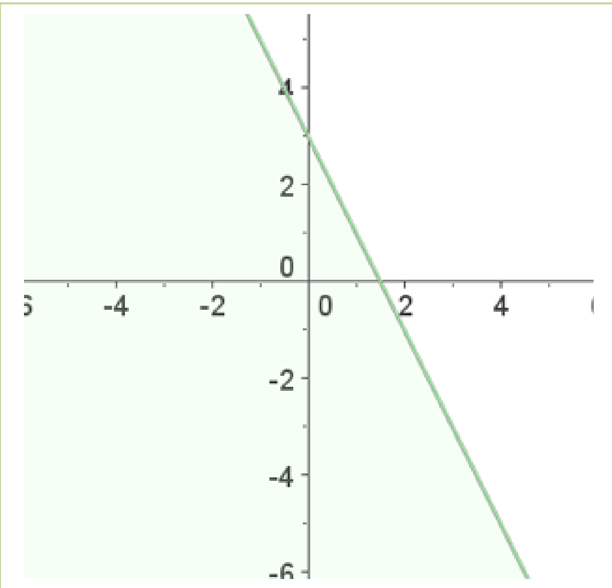
$$2x + y = 3$$

Damos a una de las dos variables dos valores, con lo que obtenemos dos puntos.

$x = 0;\quad 2 \cdot 0 + y = 3;\quad y = 3;\quad (0,\ 3)$

$x = 1;\quad 2 \cdot 1 + y = 3;\quad y = 1;\quad (1,\ 1)$





Al representar y unir estos puntos obtenemos una recta.

Tomamos un punto, por ejemplo el (0, 0), los sustituimos en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano.

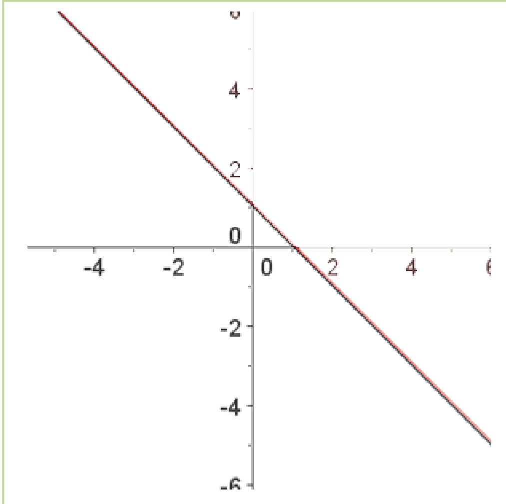
$2x + y \le 3$

$2 \cdot 0 + 0 \le 3 \qquad 0 \le 3 \qquad$ **Sí**

El semiplano que está sombreado es la solución de la primera inecuación.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Hacemos lo mismo con la segunda inecuación:



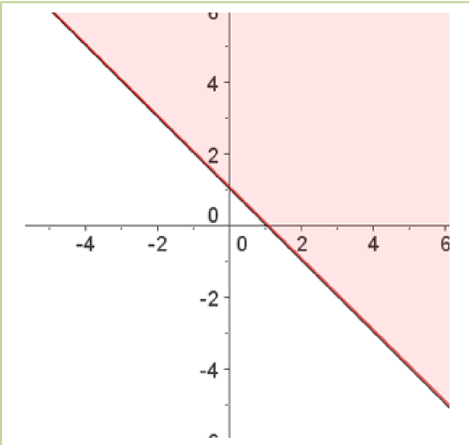
2º Representamos la región solución de la segunda inecuación.

$x + y = 1$

$x = 0; \quad 0 + y = 1; \quad y = 1; \qquad (0, 1)$

$x = 1; \quad 1 + y = 1; \quad y = 0; \qquad (1, 0)$

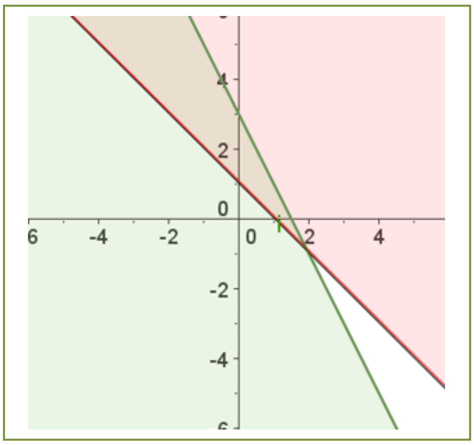
Tomamos un punto, el (0, 0) por ejemplo y lo sustituimos en la inecuación, como no se cumple la desigualdad será el semiplano en el que no está el punto.



$x + y \geq 1$

$0 + 0 \geq 1$ **No**

3º La solución es la intersección de las regiones soluciones.



Actividades resueltas:

- Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

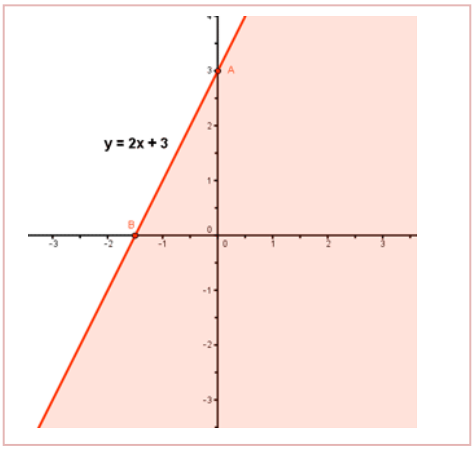
Conjunto de soluciones de la primera inecuación:

$2x - y = -3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 3.$

Puntos de corte de la recta con los ejes:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad A = (0, 3)$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad x = -3/2 \quad \Rightarrow \quad B = (-3/2, 0)$



Probamos con puntos a ambos lados de la recta para ver cuál cumple la inecuación:

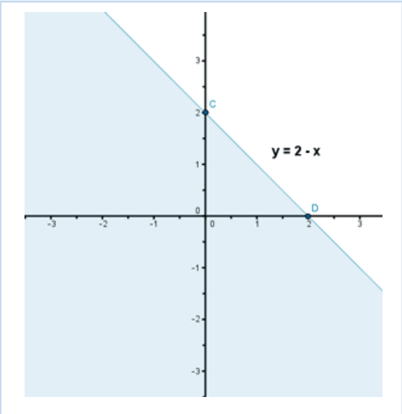
$(0, 0), \quad 2x - y \geq -3 \quad \Rightarrow \quad 0 \geq -3$ SI

Como se cumple la igualdad para el punto propuesto la región factible es el semiplano al que pertenece el punto referido.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Conjunto de soluciones de la segunda inecuación:

$$x + y = 2 \qquad y = 2 - x$$



Puntos de corte de la recta con los ejes:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x = 2 \quad \Rightarrow \quad C = (0, 2)$$

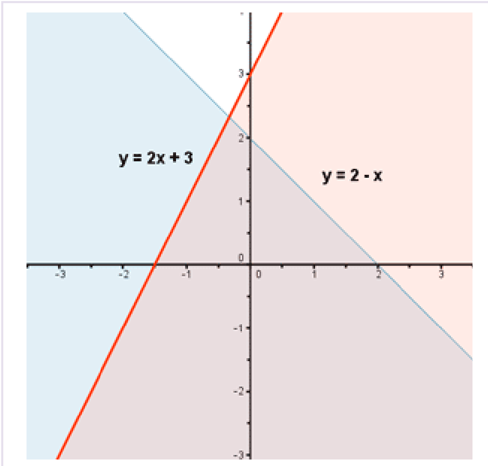
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad D = (2, 0)$$

Probamos con puntos a ambos lados de la recta para ver qué región verifica la inecuación:

$$(0, 0), \quad x + y < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < 2$$

Como se cumple para el punto dado el semiplano elegido es en el que está el punto.

El conjunto de soluciones del sistema, o región factible, está formado por aquellos puntos que cumplan ambas inecuaciones, por tanto, la solución es la intersección de ambos semiplanos:



Actividades propuestas

62. Encuentra la región factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

63. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x - 2y + 3}{3} \geq \dfrac{x - y + 1}{2} \\ 1 - \dfrac{2x - 4 - y}{3} + \dfrac{2x + 3y}{2} \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x + 1) \cdot 10 + x \leq 6(2x + 1) \\ 4(x - 10) < -6(2 - x) - 6x \end{cases}$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$ Grado 3
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$.
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente ($c(x)$) y resto ($r(x)$), ligados a los polinomios iniciales, los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	
Teorema del resto	El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.	
Raíz de un polinomio	Un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, es decir, si $p(\alpha)=0$	2 es raíz de $-3x + 6$. 1 y -3 son raíces de x^2+2x-3
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Fracciones algebraicas	Es una fracción de expresiones polinómicas	$\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$
Resolución de ecuaciones de 1º grado	Son igualdades algebraicas con una sola incógnita y de grado uno.	$\dfrac{7(x-1)}{3}+\dfrac{5x}{6}=1-\dfrac{x}{2}$
Resolución de ecuaciones de segundo grado	Igualdades algebraicas con una sola incógnita y elevada al cuadrado.	$-x^2+4x+5$ Cuya solución es: x_1=-1; x_2=5
Resoluciones de inecuaciones de 1º grado	Desigualdades algebraicas con una sola incógnitas de grado uno	$\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{(x-7)}{6}>\dfrac{4-x}{2}$
Resolución de inecuaciones de 2º grado	Desigualdades algebraicas con una sola incógnita, elevadas al cuadrado.	$x^2 - 6x + 5 > 0$ su solución es el intervalo (1, 5).
Sistemas de ecuaciones lineales, por el método de Gauss	Los sistemas de ecuaciones lineales son ecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad, no pudiendo aparecer el producto de dos de ellas. Resolución por el método de Gauss.	$x + 4y + 3z = -1$ $2x - 3y - 2z = 1$ $-x + 2y + 4z = 2$
Sistemas de inecuaciones lineales	Los sistemas de inecuaciones lineales son inecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad.	

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF