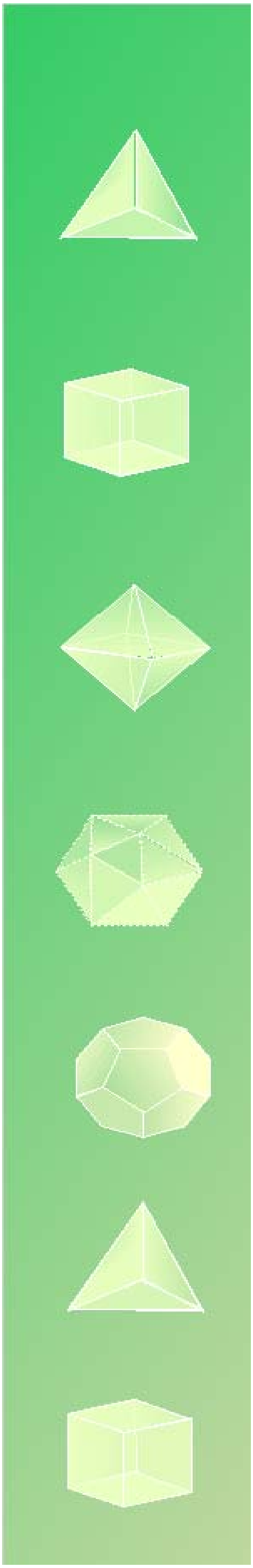


MATEMÁTICAS I:
1º de Bachillerato
Capítulo 5: Ec. recta.

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Revisor: José Luis Lorente Aragón

Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF y http://rabfis15.uco.es/lvct/tutorial/39/Parabolicos.htm

RECTAS Y PROBLEMAS MÉTRICOS

El objetivo de este capítulo es exponer con detalle la Geometría Analítica en dos dimensiones. La Geometría Analítica permite describir diferentes elementos geométricos como puntos, rectas, circunferencias, elipses entre otros.

En este curso nos centraremos en geometría en dos dimensiones, es decir que se puede dibujar en un plano; el próximo curso se verá la Geometría Analítica en el espacio o en 3 dimensiones

La Geometría Analítica se la debemos especialmente a dos matemáticos franceses del siglo XVII, *Pierre de Fermat* y *Renè Descartes*. Es posible que te suene el nombre de años anteriores. Un ejemplo de su influencia es el conocido plano cartesiano, invención de *Descartes* (se llama cartesiano por *Cartesio*, que era el nombre en latín de *Descartes*) concepto básico para describir la Geometría Analítica. La leyenda cuenta que *Descartes* inventó esta geometría mientras estaba tumbado en la cama observando el vuelo de una mosca, actividad ociosa donde las haya. Se le ocurrió que, si ponía en el techo dos ejes y llamaba x e y a la posición de la mosca con respecto a dichos ejes en cada momento, podría describir su vuelo con una expresión que relacionara las dos variables, sin necesidad de dibujar. Este es un ejemplo más de que la creatividad surge en los momentos más inesperados. Fíjate en la idea que se le ocurrió a *Newton* cuando una manzana le cayó en la cabeza (si no conoces la historia, búscala, también es curiosa).

El (aparentemente) simple hecho de determinar una posición mediante coordenadas revolucionó totalmente la Geometría, permitiendo representar toda clase de figuras nuevas y estudiar las ya conocidas de un modo muchísimo más eficaz. Fue asimismo vital para la Física, porque gracias a ello se pudo estudiar el movimiento con un detalle que antes era impensable.

Tanto es así, que normalmente cuando una persona aprende la Geometría Analítica, ya no vuelve casi a usar geometría sin coordenadas. Depende, claro, un poco de gustos personales.

Sea este o no tu caso, esperamos que el capítulo te resulte interesante y que puedas apreciar la potencia y la belleza de estos nuevos métodos.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. RECTAS Y PROBLEMAS MÉTRICOS

2.1. Lugares geométricos

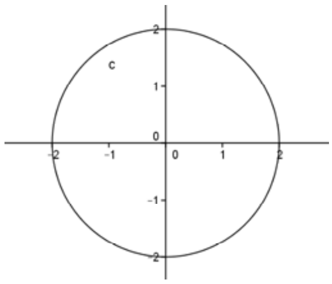
Es el momento de utilizar lo que sabemos de los vectores para estudiar algunas figuras en el plano. Para ello necesitamos un concepto adicional el de lugar geométrico.

Un **lugar geométrico** son los puntos del plano que verifican una o varias condiciones geométricas.

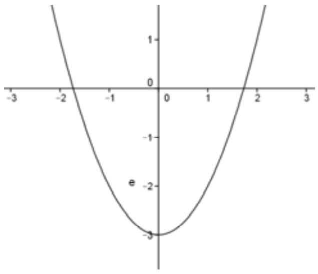
Estos lugares geométricos cumplen determinadas ecuaciones que en breve describiremos

Ejemplos:

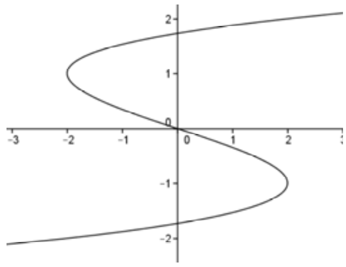
- *Estos son cuatro lugares geométricos definidos cada uno como los puntos que verifican una ecuación. Están representados con el programa Geogebra. En él puedes escribir la ecuación que desees y automáticamente se dibuja el lugar geométrico.*



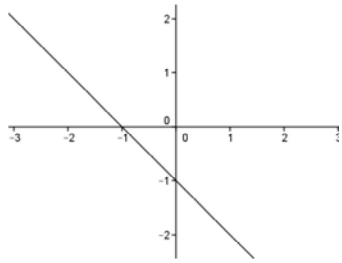
$x^2 + y^2 = 4$



$y = x^2 - 3$



$y^3 - x = 3y$



$x + y = -1$

Este curso estudiaremos algunos de los lugares geométricos más importantes, los que vienen dados por ecuaciones de primer y segundo grado (en x e y). En este apartado veremos los lugares que aparecen con ecuaciones de primer grado (las rectas) y en la siguiente los que corresponden a ecuaciones de segundo grado (las cónicas).

Muchas veces no nos dan la ecuación, sino simplemente nos dicen “los puntos del plano que cumplen tal propiedad” y tendremos nosotros que encontrar la ecuación.

2.2. Rectas. Definición y ecuaciones

Ya conoces de cursos anteriores la ecuación de una recta. Lo que vamos a ver ahora es la recta desde el punto de vista de los vectores y la geometría.

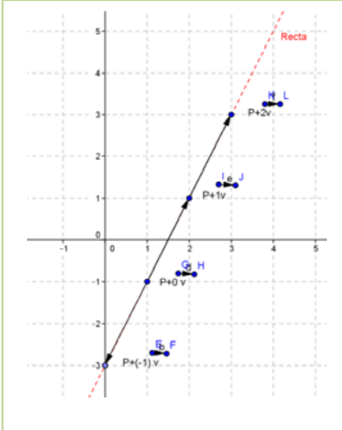
Existen varias maneras equivalentes de definir una recta. La más intuitiva, desde nuestro punto de vista, es la siguiente:

Una **recta** es el lugar geométrico de los puntos del plano que se pueden alcanzar sumando a un punto, múltiplos de un vector. Este vector se llama **vector director**.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- *Gráficamente se ve bastante más claro. Pensemos en el punto* $P = (1, -1)$ *y el vector* $\vec{v} = \overrightarrow{(2,1)}$. *Al irle sumando múltiplos del vector, vamos obteniendo los infinitos puntos de la recta.*



Por ejemplo, son puntos de la recta:

$(1, -1) = (1, -1) + 0\overrightarrow{(2, 1)}$, $\qquad (2, 0) = (3, -1) + 1\overrightarrow{(2, 1)}$,

$(-1, -2) = (1, -1) + (-1)\overrightarrow{(2, 1)}$ y así sucesivamente.

Puede ponerse entonces como $\left\{(x, y) = (1, -1) + k\overrightarrow{(2, 1)}\right\}$ donde k es una variable que va tomando todos los valores reales. Esta ecuación se conoce como ecuación vectorial de la recta. Si se pone en vertical, $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 1k \end{cases}$ se conoce como ecuaciones paramétricas.

Dado un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se llama **ecuación vectorial** a la expresión $\left\{(x, y) = (p_1, p_2) + k\overrightarrow{(v_1, v_2)}\right\}$.

Se llama **ecuación paramétrica** a las expresiones $\begin{cases} x = p_1 + v_1 k \\ y = p_2 + v_2 k \end{cases}$

Observa que siempre decimos "un vector director". Y es que hay más de uno, ya sabes, cualquier múltiplo de un vector director (en otras palabras cualquier vector paralelo) es también vector director. Por ejemplo, si $\overrightarrow{(2, 1)}$ es vector director, también lo son $\overrightarrow{(-2, -1)}$, $\overrightarrow{(4, 2)}$, $\overrightarrow{(10, 5)}$...

Las ecuaciones vectorial y paramétrica (que son prácticamente iguales, como puedes comprobar) son muy útiles si lo que queremos es calcular puntos de la recta.

Actividad resuelta

- *Una recta pasa por los puntos* $A = (1, 2)$, $B = (4, -1)$. *Calcula la ecuación vectorial y la ecuación paramétrica de dicha recta, y encuentra otros dos puntos.*

Lo primero, para calcular la ecuación vectorial de la recta necesitamos un vector de la misma. Puesto que $B = A + \overrightarrow{AB}$, es evidente que $\overrightarrow{AB}$ es vector director. Así pues $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(3, -3)}$ es vector director y, por tanto, su ecuación vectorial es $\left\{(x, y) = (1, 2) + k\overrightarrow{(3, -3)}\right\}$.

Su ecuación paramétrica es: $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 - 3k \end{cases}$.

Para obtener otros dos puntos, damos valores a k. Cualquier valor nos vale.

Por ejemplo si $k = -1$ tenemos el punto $(1, 2) - \overrightarrow{(3, -3)} = (-2, 5)$ en tanto que si $k = \frac{1}{3}$ obtenemos $(1, 2) + \frac{1}{3}\overrightarrow{(3, -3)} = (2, 1)$. Observa que para $k = 1$ se obtiene el punto B.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ecuación continua

Con la ecuación paramétrica o vectorial es muy sencillo obtener puntos, pero no es demasiado sencillo comprobar si un punto pertenece o no a una recta. Por ejemplo, ¿está el punto $(0, 3)$ en la recta $(x, y) = (1, 2) + k\overrightarrow{(3, -3)}$? Para saberlo tendremos que poner (0,3) en lugar de (x, y) y ver si con el mismo valor de k obtenemos las dos coordenadas. No parece muy sencillo ¿verdad?

Buscamos una ecuación que relacione la x con la y. Para obtenerla despejamos k de las dos ecuaciones y las igualamos.

$$\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - p_1 = kv_1 \\ y - p_2 = kv_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - p_1}{v_1} = k \\ \dfrac{y - p_2}{v_2} = k \end{cases}$$

Puesto que los segundos miembros son iguales, los primeros miembros también son iguales. De modo que tenemos $\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$. Esta forma es tan importante que tiene un nombre propio.

Dado un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$ se llama **ecuación continua** a la expresión:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}.$$

Así pues, en el ejemplo anterior, teníamos la ecuación vectorial $(x, y) = (1, 2) + k\overrightarrow{(3, -3)}$ que nos da directamente la ecuación continua $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-3}$.

Para ver si un punto pertenece a la recta, sustituimos en la ecuación el valor de x y de y. Si se cumple la igualdad, sí pertenece. Si no, no.

Ejemplo:

- Volvamos a la recta de antes, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-3}$.

Sustituimos $(0, 3)$ y tenemos $\frac{0-1}{3} = -\frac{1}{3} = \frac{3-2}{-3}$. El punto $(0, 3)$ pertenece a la recta.

En cambio si sustituimos el $(4, 2)$ tenemos $\frac{4-1}{3} = 1 \neq 0 = \frac{2-2}{-3}$. El punto $(4, 2)$ no está en la recta.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ecuación punto-pendiente

El problema de las ecuaciones anteriores es que, aunque representen lo mismo, la expresión no es única ya que una recta tiene muchos puntos y vectores de dirección distintos. Puedes comprobar que $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-3}$ y $\frac{x}{-1}=\frac{y-3}{1}$ son la misma recta pues tienen dos puntos en común. Pero, ¿a qué no lo parece a simple vista?

Para cada vector y cada punto tenemos una ecuación continua distinta. Vamos a empezar a eliminar la parte que dependa del vector.

Si multiplicamos en la ecuación continua por el denominador de la y obtenemos $\frac{v_2}{v_1}(x-p_1)=y-p_2$.

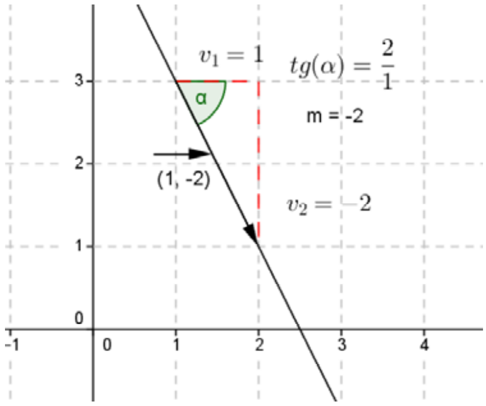
Lo primero, tenemos que notar que $\frac{v_2}{v_1}$ es siempre constante, independientemente del vector que elijamos ya que si dos vectores tienen la misma dirección verifican que $k=\frac{v_2}{w_2}=\frac{v_1}{w_1}$, donde k es la pendiente del vector. La pendiente de la recta se calcula como la de cualquiera de sus vectores. Vamos a resaltar las definiciones.

Se llama **pendiente de una recta** a la pendiente de un vector director suyo. El resultado es el mismo para cualquiera de los vectores directores de la recta. La pendiente puede ser positiva o negativa.

En el caso $v_1=0$ la recta es vertical y su ecuación $x=b$.

Otras maneras equivalentes de definir la pendiente:

1. La pendiente son las unidades de subida (si es positiva) o bajada (si es negativa) por cada unidad que nos movemos en horizontal. Esta es la definición que se usa en las señales de tráfico (expresada en tanto por ciento)
2. La pendiente es la tangente del ángulo que forma un vector con la horizontal. Si el ángulo es en sentido negativo (es decir, hacia abajo) es negativa.



Volvamos pues a la ecuación que teníamos, $\frac{v_2}{v_1}(x-p_1)=y-p_2$.

Si llamamos $m=\frac{v_2}{v_1}$ a la pendiente tenemos otra ecuación:

Dado un punto $P=(p_1,p_2)$ y un número m se llama **ecuación punto-pendiente** a la expresión:

$$y-p_2=m(x-p_1)$$

Observa que esta expresión NO es única, porque depende del punto. Pero ya no depende del vector. Así, $y-2=3(x-1)$ da la misma recta que $y-5=3(x-1)$ pero la pendiente será siempre la misma.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividad resuelta

- *Llamemos r a la recta que pasa por los puntos $A=(1,3)$, $B=(4,0)$. Calcula:*

  a) La pendiente de dicha recta

  b) Averigua si el punto $C=(0,7)$ pertenece a dicha recta y encuentra otros dos puntos

Lo primero, para calcular la recta necesitamos un vector de la misma. Así pues $\overrightarrow{AB}=\overline{(3,-3)}$ es vector director y, por tanto, su ecuación vectorial es $(x,y)=(1,3)+k\overline{(3,-3)}$. La pendiente es –3/3 = –1. La ecuación punto - pendiente es:

$$y-3=(-1)(x-1)\rightarrow y=-x+4\,.$$

Para x = 0 $\rightarrow$ y = 4, luego el punto C no pertenece a la recta. Para encontrar otros puntos damos valores a x y calculamos y:

Para x = 1 $\rightarrow$ y = 3, luego el punto A pertenece a la recta.

Para x = 2 $\rightarrow$ y = 2, luego el punto D (2, 2) pertenece a la recta.

Para x = 3 $\rightarrow$ y = 1, luego el punto E (3, 1) pertenece a la recta.

Ecuación implícita

Si en la ecuación continua hacemos operaciones $\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}$, de modo que haya sólo un coeficiente para el término independiente x e y e igualemos a 0, obtenemos la ecuación implícita, también llamada ecuación general. Con más detalle:

Multiplicando en cruz: $\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}\Rightarrow v_2(x-p_1)=v_1(x-p_2)$.

Operando: $v_2x-v_2p_1=v_1y-v_1p_2\Rightarrow v_2x-v_1y+(v_1p_2-v_2p_1)=0$. Basta cambiarles el nombre a los coeficientes: $A=v_2$, $B=-v_1$, $C=v_1p_2-v_2p_1$

Dados tres números A, B, C se llama **ecuación implícita** de una recta a la expresión: $Ax+By+C=0$.

Se trata de una ecuación lineal con dos variables (x e y). Las infinitas soluciones de esta ecuación son los puntos de la recta que estamos describiendo. Hay que tener en cuenta que puede haber todas las ecuaciones lineales que queramos que representen la misma recta, basta con multiplicar todos los términos de la misma por un mismo número para obtener una ecuación equivalente. Por ejemplo $2x+2y-4=0$ representa la misma recta que $x+y-2=0$

Vector director

Si tenemos la ecuación de una recta en la forma implícita, podemos calcular el vector director directamente. No es muy recomendable aprenderse la fórmula porque es fácil confundirse pero te la ponemos por si te resulta útil. Úsala con cuidado.

Sea $Ax + By + C = 0$: Observa que pasando la "y" al otro lado, $Ax + C = -By$ con lo que la forma continua de esa recta es $\dfrac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \dfrac{y}{A}$ y su vector director es $\overrightarrow{(-B, A)}$.

Si la recta es $Ax + By + C = 0$ un **vector director** es el $\overrightarrow{(-B, A)}$.

El vector $\vec{n} = (A, B)$ se llama **vector normal**, que como puedes ver es perpendicular a la recta.

Actividad resuelta

- *En la actividad de la recta r que pasa por los puntos* $A = (1, 3)$, $B = (4, 0)$, la ecuación implícita es $y = -x + 4 \rightarrow x + y - 4 = 0$

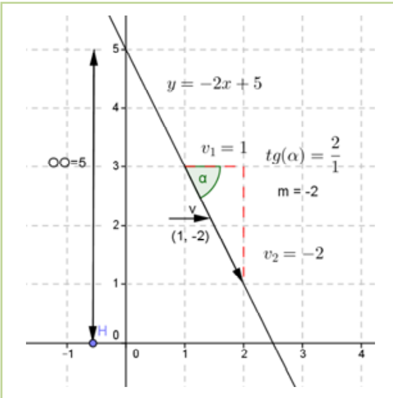
Ecuación explícita

Vamos finalmente a dar una ecuación que sí es siempre única. Si en la ecuación punto-pendiente despejamos la y tenemos la expresión que buscamos:

$y - p_2 = m(x - p_1) \Rightarrow y = mx - mp_1 + p_2$. Si llamamos $n = -mp_1 + p_2$ obtenemos la ecuación $y = mx + n$. Ya la conocían bien, es la ecuación de la recta vista como una función.

Dados dos números m y n se llama **ecuación explícita de una recta** a la expresión: $y = mx + n$. El número m es la **pendiente** y el número n es la **ordenada en el origen**.

Ya hemos visto que m es la pendiente. ¿Qué es pues n? Es claro que es el valor de y cuando sustituimos x por 0 puesto que $y = m0 + n = n$. De ahí el nombre, puesto que cuando x está en el origen (el 0) la ordenada de ese punto es n.



De lo anterior vemos que la recta pasa por el punto $(0, n)$.

Otra manera de ver la ordenada en el origen es el valor de y al cruzar la recta el eje OY.

En el dibujo podemos ver cómo la recta $y = -2x + 5$ tiene $m = -2$ como pendiente y $n = 5$ como ordenada en el origen (OO en el dibujo).

Observa que si m es la pendiente, un vector director es SIEMPRE $(1, m)$.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Resumen:

Acabamos de ver un montón de ecuaciones de la recta y hemos visto brevemente cómo se pasa de una a otra (realmente sólo en un sentido). Es el momento de recopilar lo que tenemos y ver cómo aplicarlo para resolver problemas. Aplicaremos el siguiente **PRINCIPIO FUNDAMENTAL**.

Si una recta se pone en una forma concreta, sus elementos distinguidos son los de dicha forma. Más detalladamente:

1. Si la recta tiene de ecuación $\begin{cases} x = p_1 + v_1 k \\ y = p_2 + v_2 k \end{cases}$ automáticamente (p_1, p_2) es un punto de la recta y (v_1, v_2) es un vector. Esta es la extracción de elementos de la forma **paramétrica**.
2. Si la recta tiene de ecuación $\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$ automáticamente (x_0, y_0) es un punto de la recta y (v_1, v_2) es un vector. Esta es la extracción de elementos de la forma **continua**.
3. Si la recta tiene de ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ automáticamente m es la pendiente y (x_0, y_0) es un punto. Esta es la extracción de elementos de la forma **punto-pendiente**.
4. Si la recta tiene de ecuación $Ax + By + C = 0$ automáticamente (A, B) es un vector perpendicular a la recta. Esta es la extracción de elementos de la forma **implícita**.
5. Si la recta tiene de ecuación $y = mx + n$ automáticamente m es la pendiente y n es la ordenada en el origen, o bien $(0, n)$ es un punto y $(1, m)$ es un vector de dirección. Esta es la extracción de elementos de la forma **explícita**.

Actividad resuelta

- *Consideremos la recta* $5x + 2y - 7 = 0$. *Calcula su pendiente, un punto y un vector director.*

Hay un montón de maneras de resolver esto.

Una directamente: el vector (5, 2) es perpendicular a la recta, luego el vector (2, –5) es un vector de dirección, y la pendiente es: –5/2. Si y = 0, entonces x = 7/5, luego un punto de la recta es: $\left(-\frac{7}{5}, 0\right)$.

Vamos a hacerlo ahora pasando a dos formas que nos sean útiles, la punto - pendiente y la continua.

Despejamos y: $5x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 2y = -5x + 7 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$. La pendiente, por tanto es $-\frac{5}{2}$, y un punto, la ordenada en el origen es $n = \frac{7}{2}$.

Vamos a partir de nuevo de la ecuación implícita y multiplicar en cruz para buscar la forma continua.

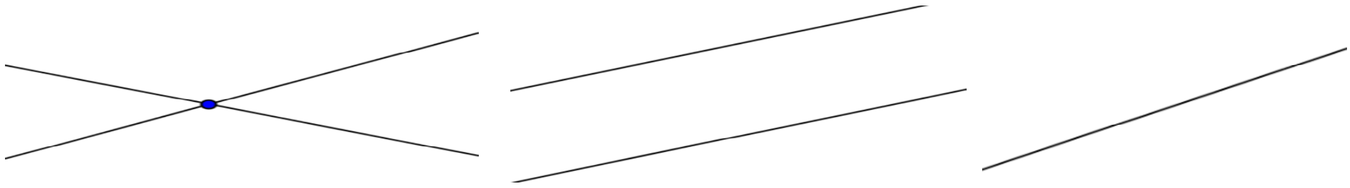
$5x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 2y = -5x + 7 \Rightarrow \frac{y}{-5} = \frac{x - \frac{7}{5}}{2} \Rightarrow \frac{x - \frac{7}{5}}{2} = \frac{y - 0}{-5}$. Un punto es, por tanto, el $\left(-\frac{7}{5}, 0\right)$ y un vector es el $\overrightarrow{(2, -5)}$. Comprobamos inmediatamente que la pendiente es $-\frac{5}{2}$ como nos había salido antes.

2.3. Posiciones relativas de rectas

Las posiciones relativas de dos rectas se pueden estudiar desde dos puntos de vista, el geométrico y el analítico.

Desde el punto de vista geométrico, las posiciones de dos rectas en el plano son sencillas.

1. Rectas **secantes,** cuando las rectas se cortan. Es decir, tienen un único punto en común.
2. Rectas **paralelas** si no tiene ningún punto en común y tienen misma pendiente.
3. Rectas **coincidentes** cuando son la misma recta (infinitos puntos en común).



Secantes *Paralelas* *La misma recta (paralelas coincidentes)*

¿Cómo distinguir esos casos? Vamos a dar varios métodos para hacerlo.

Método 1: Con vectores directores

Es claro que dos rectas son paralelas o iguales si (y solamente si) sus vectores son paralelos. A su vez, si son paralelas no tienen puntos en común y si son coincidentes los tienen todos. Eso sugiere el siguiente método:

1. Calcular los vectores directores de las dos rectas. Si NO son paralelos, son secantes.
2. Si los vectores son paralelos, tomar un punto cualquiera de una recta y ver si es punto de la otra. Si lo es, son coincidentes. Si no, son paralelas.

Actividad resuelta

- *Estudiar la posición relativa de las rectas* $5x + 2y - 7 = 0$ y $(x, y) = (1, 2) + k\,\overrightarrow{(4, -10)}$.

Solución:

Necesitamos calcular un vector de la primera. El vector (5, 2) es ortogonal a la recta, luego el vector $\overrightarrow{(-2\,,5)}$ es un vector de dirección.

La segunda ya nos da directamente el vector director, es el $\overrightarrow{(4, -10)}$.

¿Son paralelos estos vectores? Para verlo, dividimos las componentes: $\dfrac{4}{-2} = -2 = \dfrac{-10}{5}$. Sí, lo son.

Podría haberse visto sin más que observar que $\overrightarrow{(4, -10)} = -2\overrightarrow{(-2, 5)}$.

Por tanto, o las rectas son paralelas o son la misma. Tenemos que tomar un punto de una y ver si es punto de la otra. Puesto que la primera está en forma implícita, ver si es punto de ella es más fácil, así que vamos a tomar un punto de la segunda. El más fácil es obviamente el punto $(1, 2)$.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Sustituyendo, nos da $5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 7 = 2 \neq 0$. Puesto que el punto no verifica la ecuación, NO es un punto de la recta y las rectas son paralelas.

Método 2: Analizando y resolviendo el sistema

Si pasamos las dos rectas a forma general o implícita tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El sistema $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ puede ser:

1. Compatible determinado $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ (si multiplicas en cruz puedes darte cuenta que $m_1 \neq m_2$). Hay una única solución (punto de corte), por tanto las rectas son secantes.
2. Compatible indeterminado $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (ecuaciones proporcionales). Infinitas soluciones, por tanto las rectas son la misma recta o rectas coincidentes.
3. Incompatible $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (misma pendiente pero distintas ecuaciones). No hay soluciones, por tanto las rectas son paralelas.

En resumen, el método es:

1. Escribir las dos rectas en forma general
2. Clasificar el sistema
3. Identificar-la posición relativa en función de las soluciones del sistema

Resolvemos el sistema

Si sale un punto entonces las rectas son secantes.

Si obtenemos 0 = 0 lo que ocurre es que hay infinitas soluciones. Eso significa que las dos ecuaciones son la misma, o, lo que es lo mismo, las dos rectas son la misma.

Si obtenemos 1 = 0 lo que ocurre entonces es que no hay solución. En otras palabras, las rectas deben ser paralelas.

En resumen, el método es:

1. Escribir las dos rectas en forma general (cualquier forma excepto vectorial o paramétrica).
2. Intentar resolver el sistema.
3. Tenemos tres casos:
    a. Si sale un punto: **SECANTES**.
    b. Si sale 0 = 0: **LA MISMA RECTA**.
    c. Si sale 1 = 0 **PARALELAS**

Actividad resuelta

- *Estudiar la posición relativa de las rectas* $5x+2y-7=0$ y $(x,y)=(1,2)+k\,\overrightarrow{(4,-10)}$.

Solución:

Ya habrás visto que son las mismas de antes. Lo que ocurre es que vamos a aplicar el otro método. En primer lugar, hay que poner la segunda en forma de implícita. Lo más rápido, puesto que tenemos un punto y un vector, es escribir la forma continua: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-10}$, y operando: $-10x-4y+2=0$

Multiplicamos la primera por 2 y sumamos para resolverlo por reducción (o por el método de Gauss).

$$\begin{cases}5x+2y-7=0\\-10x-4y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(5x+2y-7=0)\\-10x-4y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10x+4y=14\\-10x-4y=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10x+4y=14\\0=12\end{cases}.$$

Sumando se obtiene $0=12$. Luego NO tiene solución. Las rectas son paralelas, como ya habíamos visto. Debe salir lo mismo, esto son matemáticas ☺.

2.4. Problemas métricos. Distancia de un punto a una recta

Hasta ahora hemos ido construyendo las herramientas para resolver problemas de geometría. Vamos a dedicar este apartado a recapitular lo que ya tenemos y dar algunas indicaciones sobre cómo resolver problemas. Resolveremos aquí algunos problemas típicos, pero la geometría es muy extensa y te animamos a que practiques.

Veremos también un problema muy especial, la distancia de un punto a una recta. Ya lo puedes resolver con lo que sabes, pero por su importancia vamos a calcular una fórmula.

Algunas cosas que ya sabes (y cómo hacerlas)

1. Calcular **distancias** entre dos puntos (módulo del vector que une los puntos).
2. Ángulo entre **rectas** (ángulo entre sus vectores con el producto escalar).
3. Calcular ángulos en triángulos (**ángulo entre los vectores** con producto escalar).
4. Calcular ecuaciones de **rectas** (busca un punto y un vector y aplica la forma vectorial o continua).
5. Posiciones relativas de **rectas** (Resuelve el sistema para hallar el punto de intersección).

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

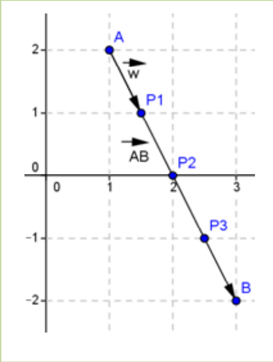
Vamos a ver algunos problemas resueltos:

Actividad resuelta

- *Divide el segmento que une los puntos* $A \equiv (1,\, 2)$ *y* $B \equiv (3,\, -2)$ *en cuatro partes iguales.*

Solución:

El vector que une los puntos es $\overrightarrow{AB} = (2,-4)$. Si queremos dividir el segmento en cuatro partes iguales, lo que deberemos hacer es dividir el vector en cuatro partes e irlas sumando:



$$\vec{w} = \frac{1}{4}\overrightarrow{(2,\,-4)} = \overrightarrow{(0'5,\,-1)}$$

Por tanto, los puntos son:

$P_1 = A + \vec{w} = (1,\, 2) + (0'5,-1) = (1'5,1)$, $P_2 = P_1 + \vec{w} = (2,\, 0)$, $P_3 = P_2 + \vec{w} = (2'5,\, -1)$

Observa como la solución la gráfica coincide con lo obtenido.

En el caso del punto medio, se hace exactamente igual, dividiendo entre 2. Pero se puede calcular también de otro modo:

Dados dos puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, su punto medio es $M = \dfrac{A+B}{2} = \left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$.

Ejemplo

- El punto medio entre $A \equiv (1,\, 2)$ y $B \equiv (3,\, -2)$ es $M = \left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{2+(-2)}{2}\right) = (2,\, 0)$ como ya sabíamos.

Actividades propuestas

21. Dados los puntos $A = (1,4)$ y $B = (-3,6)$ calcula su punto medio:

a. Construyendo el vector que los une.

b. Con la fórmula. Comprueba que sale lo mismo.

22. Considera los puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Demuestra que con las dos maneras de calcular el punto medio sale lo mismo.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividad resuelta

- *Calcula el ángulo entre las rectas* $r \equiv \{x+y=2\}$ *y la recta* s *que pasa por el punto* $A \equiv (1,\,-1)$ *y tiene pendiente* 2.

Solución:

Lo primero, vamos a calcular la recta s. Ya que nos dan la pendiente, podemos aplicar la ecuación punto-pendiente para obtener: $y-1=2[x-(-1)]$.

Necesitamos un vector de la recta. Pasamos a forma continua, que es: $\frac{y-1}{2}=\frac{x+1}{1}$ o, reordenando $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}$. Un vector de la recta es $(1,\,2)$. Recuerda que si m es la pendiente, un vector director es SIEMPRE $(1,\,m)$.

Y ahora, un vector de la otra recta. Hay muchas maneras de hacerlo, vamos a calcularlo obteniendo dos puntos. Es claro que $(1,1)\in r$, $(2,\,0)\in r$. El vector que los une es $(-1,1)$ que será por tanto un vector director de la recta.

Más sencillo es usar que $Ax+By-2=0$ tiene como vector ortogonal (A,B) y, por tanto, como vector directos a $(-B,A)=(-1,1)$. O bien calculando la pendiente despejando: $y=-x+2$.

En cualquier caso, ahora basta calcular el ángulo entre los vectores con la fórmula:

$$\cos\alpha=\frac{(1,\,2)\cdot(-1,1)}{\|(1,2)\|\cdot\|(-1,1)\|}=\frac{-1+2}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Haciendo el arco coseno, obtenemos $arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=65'91^{o}$. Observa que el ángulo entre dos rectas es siempre menor de 90º, por lo que siempre conviene tomar el coseno positivo

Actividades propuestas

23. Calcula una recta perpendicular a $r\equiv x+2y=5$ que pase por $(2,\,0)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.

24. Sean las rectas $r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=1-2\lambda\end{cases}$ y $s\equiv 2x+y=2$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.

25. Consideremos la recta $r\equiv(1,3)+\lambda(1,-2)$.

a. Calcula su pendiente.

b. ¿Pertenece el punto $(2,\,2)$ a la recta? ¿Y el punto $(0,-2)$?

c. Da al menos tres puntos de la recta.

d. Dibuja la recta.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Distancia de un punto a una recta

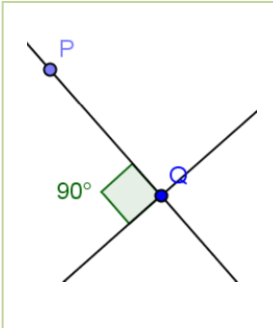
En primer lugar vamos a definir lo que es.

La **distancia entre un punto y una recta** es la mínima distancia que hay entre el punto y cualquiera de los puntos de la recta. Si P es el punto y r es la recta se representa por $d(P, r)$.

Es decir, dada una recta r y un punto exterior a ella P, la distancia del punto a la recta es:

$$d(P, r) = \min \{d(P, Q) : Q \in r\}$$

Este es un problema que ya se puede hacer con lo que sabes. De modo que vamos exponerlo de una manera un poco diferente del resto. En primer lugar, vamos a resolverlo con lo que ya sabes y después, como es un problema importante, vamos a deducir una fórmula para hacerlo directamente. Naturalmente, tú puedes resolverlo cómo quieras. Lo único previo que vamos a notar es una propiedad que resulta bastante obvia intuitivamente.



Dada una recta r y un punto exterior a ella P, el punto Q de mínima distancia es el que cumple que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta.

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia entre el punto* $P \equiv (1, -2)$ *y la recta* $r \equiv \left\{(x, y) = (-2,2) + k\,(\overrightarrow{4,-2})\right\}$.

Lo que debemos calcular es el punto Q. De modo que calculamos la recta perpendicular a r que pasa por P (la vamos a llamar s por ponerle un nombre). Su intersección con r será el punto Q.

El vector perpendicular a $(4, -2)$ ya sabes que es $(2, 4)$. Así pues, la recta es $s \equiv \left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4}\right\}$ puesto que pasa por P y tiene a $(2, 4)$ como vector director. Para hacer la intersección necesitamos a r en una forma con x e y. Lo más sencillo es pasarla a forma continua, que resulta ser $r \equiv \left\{\frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-2}\right\}$. Para calcular Q, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-2}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 2y + 4 \\ -2x - 4 = 4y - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -2x - 4y = -4 \end{cases}.$$

Resolvemos el sistema multiplicando la segunda ecuación por 2:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2(-2x - 4y = -4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -4x - 8y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -10y = 0 \end{cases} \Rightarrow -10y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2$$

El punto Q es, por tanto, $(2, 0)$. Basta calcular la distancia entre P y Q, distancia entre dos puntos que ya conoces.

$$d(P,Q) = d[(1, -2), (2, 0)] = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2'24.$$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Fórmula general para la distancia de un punto a una recta

Ya hemos visto que el problema se puede resolver con los conocimientos que ya tienes. Vamos a dar la fórmula general, su demostración la veremos en el apéndice II.

La **distancia entre un punto** $P \equiv (x_0, y_0)$ **y una recta** $r \equiv \{Ax + By + C = 0\}$ se calcula:

$$d(P,r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia entre el punto* $P \equiv (1,-2)$ *y la recta* $r \equiv \left\{ (x,y) = (-2,2) + k\,\overrightarrow{(4,-2)} \right\}$.

Solución:

Debemos pasar la recta a forma implícita. En forma continua (ya lo habíamos visto) es $\frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-2}$. Multiplicando en cruz es $-2x - 4 = 4y - 8 \Rightarrow -2x - 4y + 4 = 0$. Para dejarlo más bonito, multiplicamos por (-1), si bien este paso no es necesario. Obtenemos al final que la ecuación implícita de la recta es:

$$2x + 4y - 4 = 0 .$$

Aplicamos sin más la fórmula:

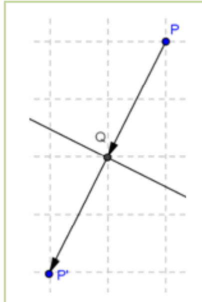
$$d(P,r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{-10}{\sqrt{20}} \right| = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \sqrt{5} \approx 2'24$$

Una vez más, el resultado es el mismo.

Observa que esta fórmula NO calcula el punto de mínima distancia. Si lo necesitáramos, no habría más remedio que utilizar el método anterior.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Punto simétrico



Este es un concepto que aparece mucho en Geometría. Punto simétrico es la imagen en el espejo. Más concretamente, el "espejo" es una recta. La definición formal es la que sigue.

Dada una recta r y un punto P exterior a ella el simétrico, P', es un punto situado a la misma distancia de la recta y de forma que el vector $\overrightarrow{PP'}$ perpendicular a la recta.

El punto P' **simétrico** de P respecto a la recta r es igual a $P' = Q + \overrightarrow{PQ}$ siendo Q el punto de r de mínima distancia a P.

Actividad resuelta

- *Calcula el punto simétrico de* $P \equiv (1, -2)$ *respecto a la recta* $r \equiv \left\{(x, y) = (-2, 2) + k\,\overrightarrow{(4, -2)}\right\}$.

Solución:

Ya habíamos calculado el punto Q, que era (2, 0). Así pues, $\overrightarrow{PQ} = (2, 0) - (1, -2) = \overrightarrow{(1, 2)}$. El simétrico es, por tanto $P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (2, 0) + (1, 2) = (3, 2)$.

Actividades propuestas

26. Supone que la distancia de un punto a una recta es 0. ¿Qué significa ese resultado? Aplícalo a la recta $2x - y = 1$ y el punto (2, 3).

27. Considera la recta $x + 2y = 3$ y el punto A = (2, 3). Calcula el punto Q de mínima distancia y el simétrico de A respecto de la recta.

28. Calcula la distancia al origen de las rectas que se indican.

a. $2x + y = 3$ b. $(x, y) = (1, -2) + \lambda\overrightarrow{(2, -1)}$ c. $y = \dfrac{x}{2}$

29. Calcula la distancia del punto (1, 2) a las rectas que se indican.

a. $x + 3y = 4$ b. $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$ c. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1}$ d. $y - 2 = 4(x + 1)$

30. Una recta pasa por el punto (3, 1) y forma con los semiejes positivos un triángulo de área seis unidades. Calcula dicha recta.

31. Calcula el punto de simétrico de A = (1, 2) respecto a la recta y = 3.

32. Consideremos un pentágono irregular $ABCDE$ formado por los puntos

A = (–2, 3), B = (1, 4), C = (3,3), D = (2, 2) y E = (–1, 1).

Dibújalo y calcula su área [Te recomendamos dividirlo en figuras más manejables].

33. Consideremos un cuadrado $ABCD$. El punto A es (1, 2) y los puntos B y C están sobre la recta $y - x = 3$. Calcula los cuatro vértices del cuadrado y su área.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.5. Traslaciones

Muchos lugares geométricos tienen ecuaciones bastante más sencillas si los expresamos centrados en el origen de coordenadas. Para ello, vamos a ver cómo mover los lugares geométricos.

Si queremos transformar el punto (x_0, y_0) en el origen de coordenadas se hace $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$ y de este modo la nueva ecuación aparece centrada en el origen. En otras palabras, se usa la tabla:

	Coordenadas antiguas	Coordenadas nuevas
Punto	(x_0, y_0)	$(0, 0)$
Primera coordenada	x	$x' = x - x_0$
Segunda coordenada	y	$y' = y - y_0$

Esta transformación se puede hacer en un sentido o en el otro.

Actividad resuelta

- *Dada la recta* $2y + x = 3$ *trasladarla para que pase por el origen de coordenadas.*
- *Calcular la recta con pendiente 2 que pase por el punto* $(1, 2)$

Solución:

1. Basta ponerlo junto. Hacemos en $2y + (x - 3) = 0$ el cambio $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y \end{cases}$ la recta se transforma en $2y' + x' = 0$, recta que, en efecto, pasa por el rigen de coordenadas.
2. Lo que vamos a hacer es la transformación inversa. La recta con pendiente 2 que pasa por el origen es obviamente $y' = 2x'$. El cambio es ahora $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$ por lo que sustituyendo obtenemos la ecuación $y - 2 = 2(x - 1)$. No por casualidad es la ecuación punto-pendiente, la ecuación punto pendiente SIEMPRE puede deducirse así.

Puede parecerte que las traslaciones no sirven de gran cosa, poco nos han arreglado los problemas. Pero es que las rectas son lugares geométricos muy sencillos, en cuanto veamos alguno más complicado veremos su gran utilidad.

2.6. Mediatriz y bisectriz

Un ejemplo de lugar geométrico que ya conoces es el de las mediatrices y las bisectrices. Con lo que ya sabes, puedes resolver todos los problemas en los que aparezcan. Pero vamos a insistir en su definición como lugar geométrico.

La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos, $X(x, y)$, que equidistan de los extremos del segmento. Es decir:

$$d(X, A) = d(X, B).$$

Vamos a comenzar con un ejemplo:

Actividad resuelta

- *Dado el segmento de extremos* A = (1, 1) *y* B = (5, 3) *determina la ecuación de su mediatriz.*

Solución

Debemos imponer: $d(X, A) = d(X, B)$, siendo $X = (x, y)$.

$d(X, A) = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

$d(X, B) = \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$. Igualamos:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}.$$

Elevamos al cuadrado:

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = (x-5)^2+(y-3)^2.$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1 = x^2-10x+25+y^2-6y+9 \rightarrow 8x+4y-32=0 \rightarrow 4x+2y-16=0$$

En efecto, ¡es la ecuación de una recta! A pesar de los términos en cuadrado que nos aparecían.

Ya sabemos que un vector perpendicular a dicha recta nos lo dan los coeficientes: (4, 2), que en efecto son las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ = (5 – 1, 3 – 1) = (4, 2), que es perpendicular a la recta. Sabemos también que debe pasar por el punto medio del segmento: $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (3, 2)$. En efecto (3, 2) es un punto de la recta pues: 4·3 + 2·2 = 12 + 4 = 16.

Por tanto también puedes calcular la ecuación de la mediatriz como

Mediatriz de un segmento es la recta que pasa por el **punto medio** y es **perpendicular al segmento**.

En general

La ecuación de la mediatriz del segmento AB, con $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ es por tanto:

$$d(X, A) = d(X, B)$$

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}.$$

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2 = (x-b_1)^2+(y-b_2)^2.$$

$$x^2-2a_1x+a_1{}^2+y^2-2a_2y+a_2{}^2 = x^2-2b_1x+b_1{}^2+y^2-2b_2y+b_2{}^2 \rightarrow$$

$$2(b_1-a_1)x+2(b_2-a_2)y+a_1{}^2+a_2{}^2-b_1{}^2-b_2{}^2=0$$

No te aprendas esta ecuación. Únicamente observa que es una recta perpendicular al segmento.

Bisectriz

La **bisectriz** de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos, X (x, y), que equidistan de los lados del ángulo. Si el ángulo está formado por las rectas r y s, la definición nos dice:

$$d(X, r) = d(X, s).$$

Vamos a comenzar con un ejemplo:

Actividad resuelta

- *Dadas las rectas r: $3x + 4y = 1$, y s: $4x + 3y = 5$, determina la ecuación de su bisectriz (o bisectrices).*

Solución

Debemos imponer: $d(X, r) = d(X, s)$, siendo $X = (x, y)$.

$$d(X,r)=\left|\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{3x+4y-1}{5}\right|=d(X,s)=\left|\frac{4x+3y-5}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|=\left|\frac{4x+3y-5}{5}\right|$$

Al quitar los valores absolutos tenemos dos soluciones posibles:

1) $3x + 4y - 1 = 4x + 3y - 5 \quad \rightarrow \quad -x + y + 4 = 0$
2) $3x + 4y - 1 = -(4x + 3y - 5) \quad \rightarrow \quad 7x + 7y - 6 = 0$

Observa que hemos obtenido dos bisectrices, ya que dos rectas forman cuatro ángulos iguales dos a dos, que son dos rectas perpendiculares, y en este caso particular paralelas a las bisectrices de los cuadrantes.

Actividades propuestas

34. Determina las mediatrices de los segmentos de extremos A y B. Represéntalo gráficamente.

a. $A = (2, 7)$ y $B = (6, 3)$ b. $A = (-3, 5)$ y $B = (0, -3)$ c. $A = (-1, 0)$ y $B = (7, -4)$

35. Determina las mediatrices de los segmentos de extremos A y B. Represéntalo gráficamente.

a. $A = (0, 7)$ y $B = (0, 3)$ b. $A = (-3, 0)$ y $B = (6, 0)$ c. $A = (-5, 0)$ y $B = (0, -5)$

36. Determina las bisectrices de las rectas r y s. Represéntalo gráficamente.

a. $r : x + 2y - 5 = 0$ y $s : 2x - y - 8 = 0$ b. $r : 3x + 5y - 2 = 0$ y $s : 4x - 6y - 1 = 0$

37. Determina las bisectrices de las rectas r y s. Represéntalo gráficamente.

a. $r : x = 0$ y $s : y = 0$ b. $r : x + y = 0$ y $s : x - y = 0$

38. Dado el triángulo de vértices ABC, siendo $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$ y $C = (4, 4)$, determina las ecuaciones de:

a. Sus mediatrices y las coordenadas del circuncentro
b. Sus bisectrices y las coordenadas del incentro
c. Sus alturas y las coordenadas del ortocentro
d. Sus medianas y las coordenadas del baricentro

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Las antenas parabólicas

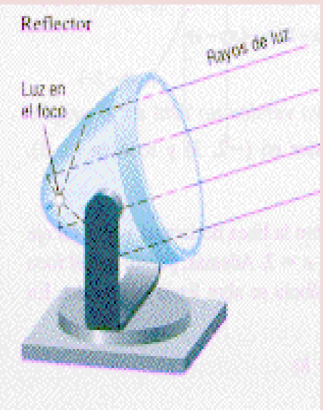
De todas las palabras raras que hemos visto en este tema, posiblemente la que hayas visto más frecuentemente en la vida diaria haya sido la parábola.

Y es que es muy posible que en tu casa (o la de tus vecinos) haya una antena parabólica. ¿Y qué es una antena parabólica? Pues una antena que tiene (¡oh, sorpresa!) forma de parábola. Más exactamente, como una parábola es una figura plana y la antena es en tres dimensiones, es la figura que se obtiene al girar una parábola (el nombre técnico es paraboloide).

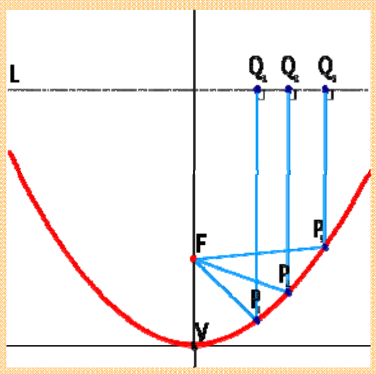
La razón por la que se hacen las antenas de esa manera es porque la parábola tiene una propiedad muy curiosa. Cualquier rayo que llegue paralelo a su eje de simetría se refleja en el foco.

Si las ondas de TV (o radio o luz) llegan desde muy lejos, son aproximadamente rayos paralelos. Y de este modo todos se reflejan en el foco. Por tanto basta poner un receptor en el foco y recibiremos toda la señal. Si te fijas en la figura, una antena tiene únicamente un receptor, situado en su foco.

Una aplicación algo menos conocida del mismo principio son los faros de los coches. El faro tiene forma de parábola. Se pone una luz en el foco y automáticamente, se emiten rayos paralelos hacia delante.



Un foco de luz. Fuente: http://rabfis15.uco.es/lvct/tutorial/39/Parabolicos.htm



Rayos reflejándose en una parábola.

Fuente: Wikipedia

Una antena parabólica

Fuente: modificación propia de un original del Banco de imágenes de INTEF)

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La recta de *Euler* y la circunferencia de *Feuerbach*

Uno de los hechos más sorprendentes de las Matemáticas es el hecho de que se sigan descubriendo cosas sobre objetos matemáticos que parecían ya agotados.

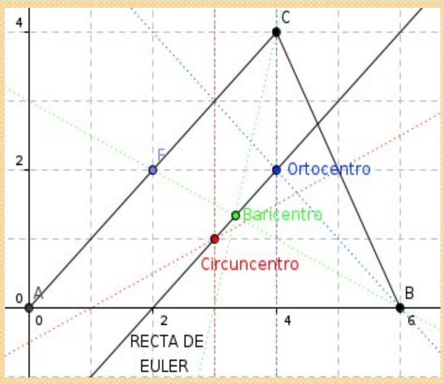
Posiblemente la figura geométrica más simple sea el triángulo, que son simplemente tres puntos no alineados. Lleva siendo estudiado desde la antigüedad. Ya conoces sus cuatro centros (ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro).

Lo que quizás no sepas es que los tres primeros (ortocentro, circuncentro y baricentro) SIEMPRE están en la misma recta. Esta recta se conoce como **recta de *Euler*** en honor a su descubridor, el matemático suizo del siglo XVIII *Leonhard Euler*.

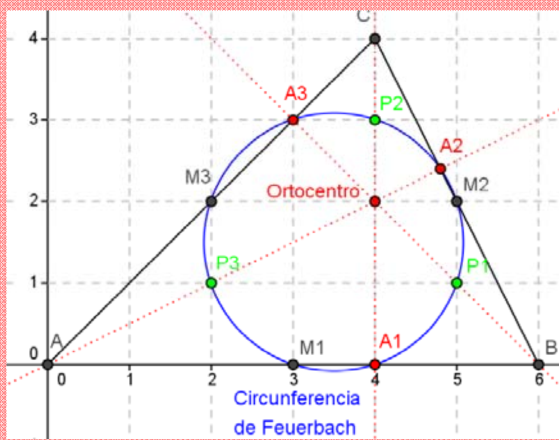
Otra figura notable que se puede construir a partir de un triángulo no es una recta sino una circunferencia. Si tomas los puntos medios de los lados y los pies de las alturas, estos seis puntos están sobre una circunferencia. Se llama circunferencia de *Feuerbach* por *Karl Wilhelm Feuerbach*, matemático alemán del siglo XIX.

Puede probarse además que esta circunferencia divide en dos partes iguales a los segmentos que unen al ortocentro con los vértices. Vale que esto ya es un poco más cogido por los pelos, pero reconoce que el hecho de pasar por los otros seis puntos es notable.

Por cierto, la recta de *Euler* TAMBIÉN pasa por el centro de la circunferencia de *Feuerbach*, ¡cosas de la Matemática…!



Hemos dibujado en el triángulo de vértices A = (0, 0), B = (6, 0) y C =(4, 4) las dos figuras. Un ejercicio que puedes hacer es calcular la recta y la circunferencia (con *Geogebra* o programa similar o con papel y boli)



M_1, M_2 y M_3 son los puntos medios de los lados, A_1, A_2 y A_3 son los pies de las alturas y P_1, P_2 y P_3 los puntos medios entre el ortocentro y los vértices

Otro ejercicio curioso que puedes hacer es, con *Geogebra* o programa similar, hacer las construcciones y luego mover los vértices del triángulo. Observarás que el triángulo se distorsiona, pero la recta de *Euler* sigue siendo recta y la circunferencia de *Feuerbach* sigue siendo circular.

RESUMEN

		Ejemplos
Vector	Par $\overrightarrow{(a,b)}$ que representa un desplazamiento.	P=(1,1), Q= (2,-1), $\overrightarrow{PQ}=(1,-2)$
Producto escalar	Número que se calcula multiplicando las componentes de dos vectores: $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2$	$\overrightarrow{(1,2)}\cdot\overrightarrow{(1,-3)}=1\cdot 1+2(-3)=-5$
Módulo de un vector	Longitud del desplazamiento que representa el vector: $\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$.	$\left\|\overrightarrow{(1,3)}\right\|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$
Ángulo entre vectores	$\cos\alpha=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}$	$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{(1,2)}\cdot\overrightarrow{(1,-3)}}{\left\|\overrightarrow{(1,2)}\right\|\left\|\overrightarrow{(1,-3)}\right\|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$
Recta	Son los puntos que se pueden alcanzar sumándole a un punto un vector. Puede estar en forma vectorial, paramétrica, continua, punto - pendiente, implícita o explícita.	$(x,y)=(1,1)+\lambda(2,-3)$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-3}$ $x+2y=4$; $y=-\dfrac{x}{2}+2$
Distancia de un punto a una recta	$d(P,r)=\left\lvert\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\rvert$	r: $3x+4y=7$; $P(1,2)$; $d(P,r)=\left\lvert\dfrac{3\cdot 1+4\cdot 2-6}{\sqrt{3^2+4^2}}\right\rvert=\dfrac{5}{5}=1$
Lugar geométrico	Puntos del plano que verifican una ecuación	$x+y=3$, $x^3-3y^2=1$
Circunferencia	Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un centro. Su ecuación es $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	Circunferencia de radio 4 y centro (0, 2): $x^2+(y-2)^2=16$
Elipse	Lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. Su ecuación canónica es $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2=1$
Hipérbola	Lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. Su ecuación es $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Si $a=b$ se llama **hipérbola equilátera.** En ese caso su ecuación es $y=\dfrac{k}{x}$	$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$ $xy=10$
Parábola	Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco y una recta llamada directriz. Su ecuación es $y-y_0=\alpha(x-x_0)^2$	$y=x^2+1$ (vertical) $x-2=(y-1)^2$ (horizontal)

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Apéndice II. Deducción de la fórmula de la distancia de un punto a una recta

Supongamos una recta r en forma implícita $Ax + By + C = 0$ y un punto P cualquiera de coordenadas (x_0, y_0). Queremos demostrar que la distancia del punto a la recta es $d(P,r) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$.

Pongamos que el punto de mínima distancia es Q, con coordenadas $Q \equiv (q_x, q_y)$. Ya hemos visto que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta. También hemos visto que el vector director de la recta es $(-B, A)$ por lo que el vector (A, B) es perpendicular a la recta.

Pero si $\overrightarrow{PQ}$ y (A, B) son perpendiculares al mismo vector entonces es porque son paralelos, es decir $\overrightarrow{PQ} = t\,(A, B)$. Sabemos además que la distancia que buscamos es el módulo de $\overrightarrow{PQ}$. Si hacemos el vector (A, B) unitario, entonces tenemos (A, B) y $|k|$ es EXACTAMENTE la distancia (observa que tenemos que poner valor absoluto porque puede ser negativo).

Vamos a calcular k. Si multiplicamos los dos lados por el vector $\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|}$ obtenemos directamente el valor de k. $\overrightarrow{PQ}\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|} = k\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|}\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|} = k\frac{\|(A,B)\|^2}{\|(A,B)\|^2} = 1$.

Por tanto, basta hacer el producto. Hagámoslo.

$k = \overrightarrow{PQ}\cdot\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|} = (q_x - x_0, q_y - y_0)\cdot\frac{(A,B)}{\sqrt{A^2+B^2}}$ pues $\overrightarrow{PQ} = (q_x - x_0, q_y - y_0)$ y $\overrightarrow{(A,B)} = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Operando: $k = \frac{Aq_x + Bq_y - Ax_0 - By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}$ Pero esto no nos arregla mucho, queremos una fórmula donde no aparezca el punto Q. Para ello, tenemos en cuenta que $Aq_x + Aq_y + C = 0$ por ser un punto de la recta. Por tanto, encontramos $Aq_x + Bq_y = -C$ y llevándolo a la ecuación obtenemos la fórmula:

$k = \frac{-Ax_0 - By_0 - C}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Tomando valores absolutos, tenemos la fórmula final:

$$d(P,r) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$