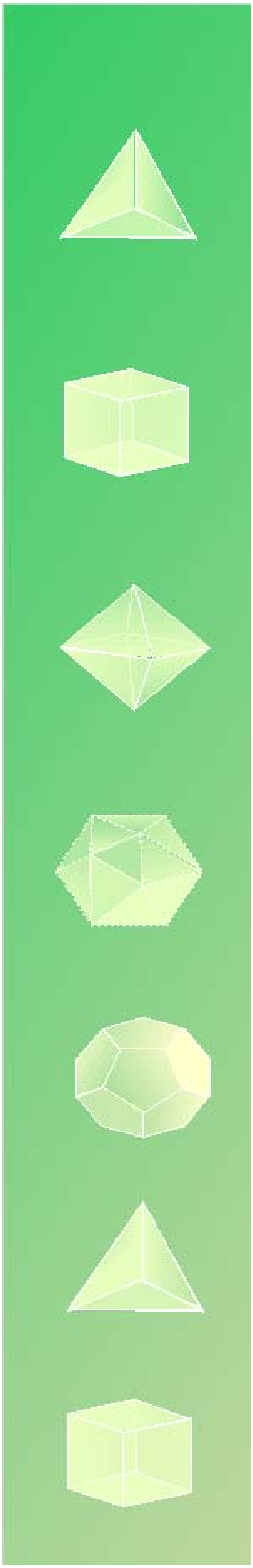


MATEMÁTICAS I:
1º de Bachillerato
Capítulo 4: Trigonometría

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Luis Lorente Aragón y Andrés García Mirantes

Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

En el curso anterior ya te habrás familiarizado con los conceptos más importantes de la trigonometría y hasta es posible que conozcas su historia.

Instrumento para medir ángulos
Museo Arqueológico de Madrid

Como seguramente sabes, la palabra trigonometría significa "medición de triángulos". Más concretamente, viene del griego "τριγωνομετρία" ("trigonometria"), donde "τρίγωνο" significa triángulo y "μετρεῖν" significa medir.

Es una de las disciplinas de las Matemáticas más antiguas. Hay tablillas babilónicas del siglo XX (¡antes de Cristo!) y papiros egipcios del XVII a.C. que tratan temas de trigonometría.

No sólo son antiguos sus orígenes, también su desarrollo. Prácticamente todo lo que vamos a ver en este capítulo (que es esencialmente todo lo que se sabe) acerca de resolución de triángulos ya lo conocían los griegos en el siglo II antes de Cristo. El enfoque suyo, sin embargo era fundamentalmente geométrico y muchos teoremas que nosotros vemos en forma algebraica se escribían de manera muy diferente. ¡Pero ya eran conocidos!

¿Por qué este desarrollo tan rápido? La explicación no es muy sorprendente. La trigonometría se utiliza muchísimo en Astronomía, medida de terrenos (agrimensura) y navegación, tres campos muy necesarios en las civilizaciones antiguas. Y no pienses que la Astronomía se hacía por curiosidad, era vital saber los movimientos de los astros para las crecidas del Nilo y para guiar barcos por las estrellas.

Por eso existen instrumentos realmente antiguos de medidas de ángulos, como la ilustración que puedes ver del Museo Arqueológico de Madrid.

En este capítulo no sólo veremos resolución de triángulo. También se estudiarán las identidades y ecuaciones donde aparecen razones trigonométricas. El estudio de estas fórmulas se lo debemos fundamentalmente a la civilización hindú (siglo X fundamentalmente). De hecho seno y coseno vienen del sáncrito. Seno viene de *jyā* (cuerda de arco) y *koṭi-jyā* (*jyā* del complementario).

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

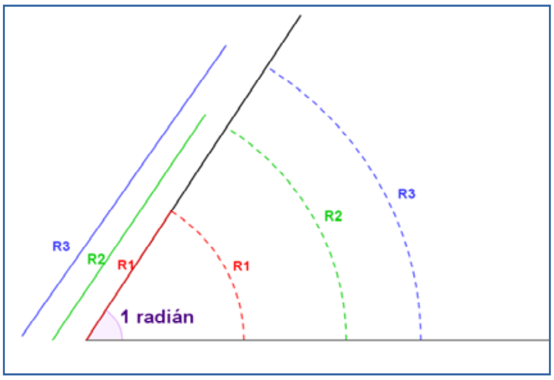
1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1.1. Medida de ángulos

En el sistema sexagesimal de medida de ángulos, la unidad es el **grado sexagesimal** que se define como la trescientos sesenteava parte de un ángulo completo. Tiene dos divisores: el **minuto** que es la sesenteava parte de un grado y el **segundo** que es la sesenteava parte de un minuto.

Probablemente hayas visto ya en el curso anterior que la unidad de medida de ángulos en el Sistema Internacional es el **radián.**

El **radián** es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por **rad**.



Puesto que a un ángulo completo le corresponde un arco de longitud $2\pi R$, a un radián un arco de longitud R, entonces:

Nº de radianes de un ángulo completo = $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ rad

Y la relación con el sistema sexagesimal la obtenemos a partir del ángulo completo:

ángulo completo = 360 º = 2 π rad $\Leftrightarrow$ ángulo llano = 180 º = π radianes

Por esta relación se obtiene que 1 rad $\cong$ 57, 216 º $\cong$ 57 º 12´ 58´´.

Podríamos por tanto haber definido el radián de otra manera totalmente equivalente, a partir de los grados.

Un **radián** son $\frac{180}{\pi}$ grados sexagesimales.

¿Por qué esta medida? ¿No resulta un poco extraño usar un número irracional como π para medir? Hay dos razones para ello.

1. Con radianes es muy fácil transformar longitudes en ángulos y viceversa. Con grados es un poco más complicado (tampoco mucho).
2. Cuando veamos en este mismo curso las derivadas, las funciones trigonométricas se expresan en radianes. Esto es así porque las derivadas salen más sencillas. Pero bueno, lo veremos más adelante.

Actividades propuestas

1. Expresa en radianes las siguientes medidas: 60 º, 120 º, 225 º, 330 º.

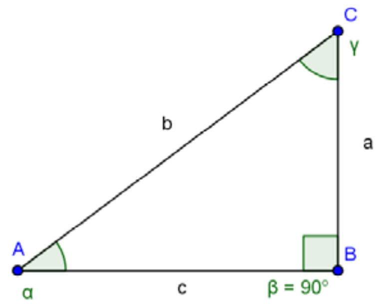
2. Expresa en grados sexagesimales: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{10\pi}{6}$ radianes.

3. ¿Cuánto suman (en radianes) los ángulos de un triángulo? ¿Cuánto mide un ángulo recto en radianes?
4. Para ver la utilidad de los radianes, supongamos un móvil que se mueve en una circunferencia de dos metros de radio con una velocidad de 4 m/s. Calcula su velocidad en rad/s y en grados por segundo. ¿cuántas vueltas da por minuto?
5. Un móvil ha recorrido 3 rad en una circunferencia de radio 2 m. ¿Cuánto espacio ha recorrido? ¿Y si la circunferencia tuviera radio 0'5 m?
6. Hemos recorrido 40 grados de una circunferencia de radio 2 m. ¿cuánto espacio hemos recorrido? ¿y si tuviera radio 0'5 m? ¿Es más fácil o más difícil que hacerlo con radianes?

1.2. Razones trigonométricas de ángulos agudos

Ya has visto el año pasado cómo se definían las razones trigonométricas en un triángulo. Nos limitaremos por tanto a recordar cómo se hacían y a introducir la notación que vamos a seguir en este capítulo.

Los vértices de un triángulo los representaremos con letras mayúsculas, empezando el alfabeto (A, B, C,…). El lado opuesto a cada vértice lo representaremos con la letra minúscula correspondiente a dicho vértice (a, b, c…). A su vez el ángulo correspondiente a cada vértice lo representaremos con la letra griega que toque, empezando el alfabeto griego (α, β, γ…).



En otras palabras:

- En el vértice A está el ángulo α y opuesto a él, el lado a.
- En el vértice B está el ángulo α y opuesto a él, el lado b.
- En el vértice C está el ángulo α y opuesto a él, el lado c.

En la medida de lo posible usaremos siempre esa convención, para todos los triángulos, sean rectángulos o no. También marcaremos los ángulos rectos como en la figura, con forma cuadrada.

Como ya sabes, se definen las razones trigonométricas del ángulo α como:

$$sen(\alpha)=\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}=\frac{a}{b}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}=\frac{c}{b}$$

$$tg(\alpha)=\frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ contiguo}=\frac{a}{c}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{b}\right)}=\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

En inglés se escribe *sin*(α) para el seno y *tan*(α) para la tangente. Posiblemente lo tengas así en tu calculadora.

Como ya has visto el año pasado, esta definición no depende del triángulo elegido.

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón

Estas razones no son independientes unas de otras. De hecho, si sabemos que un ángulo es agudo, basta una CUALQUIERA de las razones trigonométricas para calcular todas las demás.

1. **PRIMERA RELACIÓN FUNDAMENTAL**: $\left[sen(\alpha)\right]^2+\left[\cos(\alpha)\right]^2=1$
2. **SEGUNDA RELACIÓN FUNDAMENTAL:** $tg(\alpha)=\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Una cuestión de notación

Es muy habitual, aunque no del todo correcto, escribir los cuadrados de las funciones trigonométricas antes del argumento. Es decir $sen^2(\alpha)$ quiere decir $[sen(\alpha)]^2$ y NO $sen[sen(\alpha)]$.

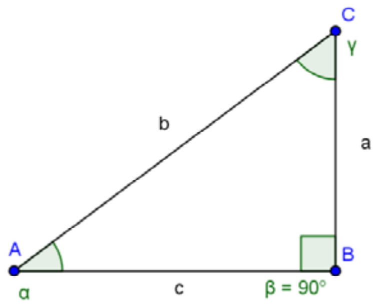
Esta notación está tan generalizada que creemos conveniente que te habitúes a ella y por eso es la que seguiremos a partir de ahora. Pero fíjate por favor en lo que significa.

También se utiliza para otras potencias. Así, por ejemplo $sen^8(\alpha)=[sen(\alpha)]^8$ y $\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$.

Actividad propuesta

7. En la figura se verifica el teorema de *Pitágoras* $a^2+b^2=c^2$. Utilizando dicho teorema, demuestra la primera relación fundamental.

8. Utilizando las definiciones de las razones trigonométricas, demuestra la segunda relación fundamental.



Otras razones trigonométricas

Además de las razones trigonométricas que hemos visto, existen otras tres que son un poco menos habituales. Son las siguientes:

$$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\cos ec(\alpha)=\frac{1}{sen(\alpha)}$$

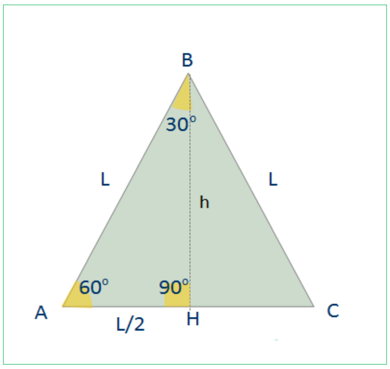
$$\cot g(\alpha)=\frac{1}{tg(\alpha)}$$

Actividad propuesta

9. Utilizando la definición de las identidades, demuestra:

a) $1+tg^2(\alpha)=\sec^2(\alpha)$ b) $1+\cot g^2(\alpha)=\cos ec^2(\alpha)$

Razones trigonométricas de 30° y 60°



Consideramos un triángulo equilátero de lado L. Trazamos la altura correspondiente al lado sobre el que se apoya. Con ello queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos miden 90°, 30° y 60°. Además la hipotenusa mide L y uno de sus catetos $L/2$. Por el teorema de *Pitágoras* podemos obtener el que nos falta:

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Calculamos las razones trigonométricas de 30° y 60° en el triángulo $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$sen\ 60^o = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3}\ L}{2} : L = \frac{\sqrt{3}\ L}{2\ L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen\ 30^o = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2\,L} = \frac{1}{2}$$

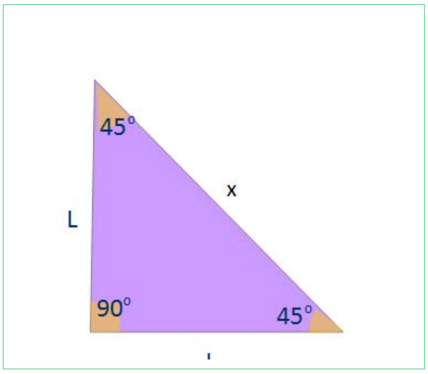
$$\cos 60^o = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2\,L} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^o = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3}\ L}{2} : L = \frac{\sqrt{3}\ L}{2\ L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 60^o = h : \frac{L}{2} = \frac{2\,h}{L} = \frac{2\sqrt{3}\,L}{2} : L = \frac{2\sqrt{3}\,L}{2\,L} = \sqrt{3},\ tg\ 30 = \frac{L}{2} : h = \frac{L}{2} : \frac{\sqrt{3}\ L}{2} = \frac{2\,L}{2\sqrt{3}\,L} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Razones trigonométricas de 45°

Ahora vamos a trabajar con un triángulo rectángulo isósceles. Pongamos que los dos catetos tienen una longitud L. Utilizamos de nuevo el teorema de *Pitágoras* y obtenemos el valor de la hipotenusa x en función de L:

$$x = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$



Ahora podemos calcular ya las razones trigonométricas de 45°

$$sen\ 45^o = \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} := \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

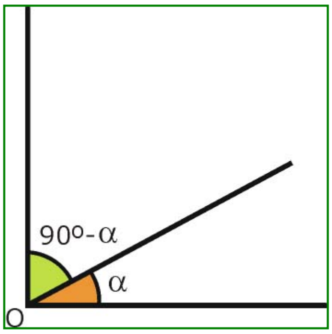
$$\cos 45^o = \frac{L}{x} = \frac{L}{L\sqrt{2}} := \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

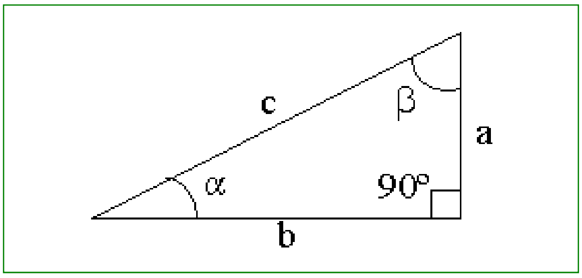
$$tg\ 45^o = \frac{L}{L} = 1$$

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

Ángulos complementarios

Antes de nada recordemos que son los ángulos complementarios. Dos ángulos son complementarios si la suma de ambos resulta 90^o, – . Por ejemplo 30^o y 60^o son ángulos complementarios, 20^o y 70^o o 45^o y 45^o también entre otros. De forma genérica si llamamos α a cualquier ángulo agudo su complementario es 90 – α.





En todo triángulo rectángulo los ángulos no rectos son complementarios:

$$90^0 + \alpha + \beta = 180^o \rightarrow \alpha + \beta = 90^o \rightarrow \beta = 90^o - \alpha$$

En esta sección queremos ver la relación entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios. De momento nos limitaremos a ángulos agudos, luego se verá el caso para ángulos arbitrarios.

Nos fijamos el dibujo del triángulo rectángulo y calculemos las razones trigonométricas.

Para α : $sen(\alpha) = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$, $tg(\alpha) = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \dfrac{a}{b}$. Para β : $sen(\beta) = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$, $\cos(\beta) = \dfrac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$, $tg(\beta) = \dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \dfrac{b}{a}$

Igualando razones iguales:

$$sen(\alpha) = \cos(90-\alpha) = \frac{a}{c}$$
$$\cos(\alpha) = sen(90-\alpha) = \frac{b}{c}$$
$$tg(\alpha) = \frac{1}{tg(90-\alpha)} = \frac{a}{c}$$

Actividades propuestas

10. Comprueba las anteriores relaciones a partir de los ángulos de 30^o y 60^o.

11. Explica, a partir de lo visto en este apartado, porque el seno y el coseno de 45^o son iguales, y porque la tangente vale la unidad.

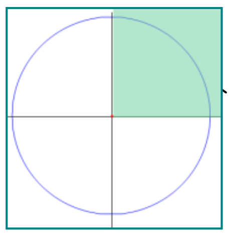
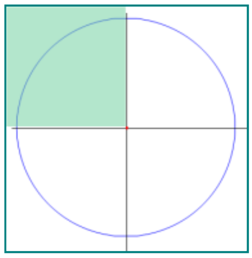
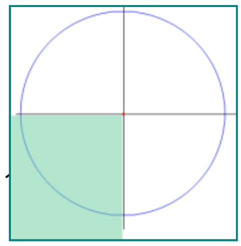
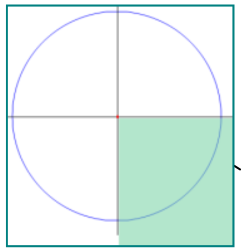
1.3. Razones trigonométricas de ángulos arbitrarios

Se llama **circunferencia trigonométrica** o *goniométrica* a una circunferencia de radio unidad centrada en el origen de coordenadas.

Es posible representar cualquier ángulo en la circunferencia trigonométrica. Para ello siempre se toma un lado fijo que es la semirrecta definida por la parte positiva del eje de abscisas; el segundo lado es la semirrecta variable que corresponda según su medida. El sentido de un ángulo se mide de OX a la semirrecta variable que determina su amplitud. Se entiende que para un ángulo negativo coincide con el de las agujas de un reloj analógico y para un ángulo positivo, el contrario.

El punto $P = (x_\alpha, y_\alpha)$, el punto $(x_\alpha, 0)$ y el origen de coordenadas delimitan un triángulo. Este triángulo es SIEMPRE rectángulo y su hipotenusa es SIEMPRE uno (puesto que es el radio de la circunferencia).

La circunferencia trigonométrica divide al plano en cuatro regiones que se denominan cuadrantes.

			
PRIMER CUADRANTE	SEGUNDO CUADRANTE	TERCER CUADRANTE	CUARTO CUADRANTE

Como puedes ver en la figura, si el ángulo está en el primer cuadrante, tenemos un ángulo agudo. Podemos pues calcular sus razones trigonométricas:

$$sen(\alpha) = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha,\ \cos(\alpha) = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha \text{ y } tg(\alpha) = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

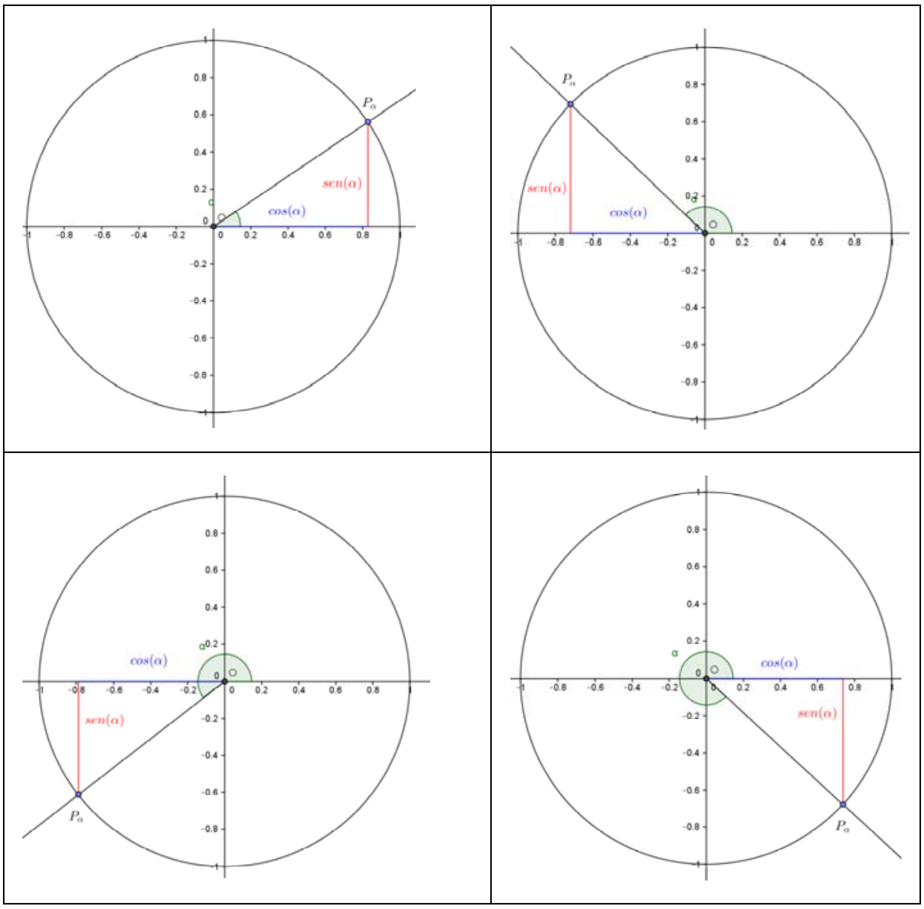
Ahora bien, esta definición tiene también sentido cuando el ángulo está en cualquiera de los otros cuadrantes.

Haciendo la misma construcción, se calcula el punto $P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ y se definen el seno, coseno y tangente a partir de sus componentes, de la misma manera.

$$sen(\alpha) = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha,\ \cos(\alpha) = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha \text{ y } tg(\alpha) = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

La única diferencia es que las componentes de P_α pueden ser nulas o negativas y por tanto las razones trigonométricas pueden ser nulas y negativas. Asimismo, observa que si el coseno es 0 la tangente no está definida. En la figura puedes ver un ejemplo en el segundo cuadrante

De este modo, se conserva la definición para ángulos agudos que son ángulos del primer cuadrante y se amplía a ángulos de cualquier signo y amplitud. En las figuras siguientes aparecen el seno y coseno de cualquier cuadrante.



Recuerda finalmente que las funciones trigonométricas son periódicas con periodo 360 grados o 2π radianes. De este modo $sen(\alpha + 2\pi\, n) = sen(\alpha)$ para cualquier n entero.

También se definen con esa fórmula, ángulos negativos. Un ángulo negativo quiere decir que se recorre en sentido de las agujas del reloj. Para pasarlo a positivo se le suma 360 grados tantas veces como sea necesario.

Así $\cos(-30) = \cos(-30 + 360) = \cos(330)$ y $sen(-400) = sen(-400 + 2 \cdot 360) = sen(320)$

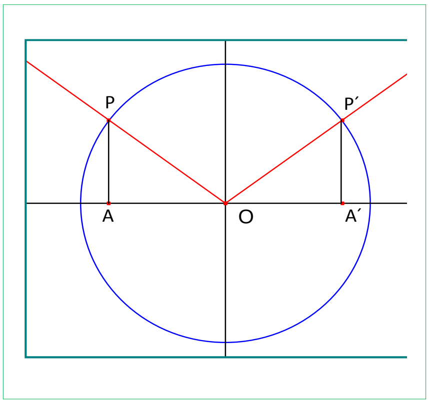
Si bien es muy probable que ya lo hayas visto el curso pasado, vamos a repasar las fórmulas de reducción de ángulos al primer cuadrante.

Los ángulos α de los cuadrantes segundo, tercero o cuarto pueden relacionarse con ángulos agudos β que podemos situar en el primer cuadrante y que tienen razones trigonométricas con los mismos valores absolutos que los ángulos α iniciales.

En los casos en los que deseemos obtener qué ángulos corresponden a una razón trigonométrica dada, resulta especialmente importante ya que, aunque hagamos uso de la calculadora, ésta nos devolverá un único valor y, sin embargo, existen infinitos ángulos solución de este problema. Gracias a lo que describiremos en este apartado, podremos encontrarlos sin dificultad.

Para hacer más cómoda la explicación consideraremos que a partir de P se miden las razones trigonométricas del ángulo α y a partir de $P´$ las del ángulo β

Ángulos del segundo cuadrante



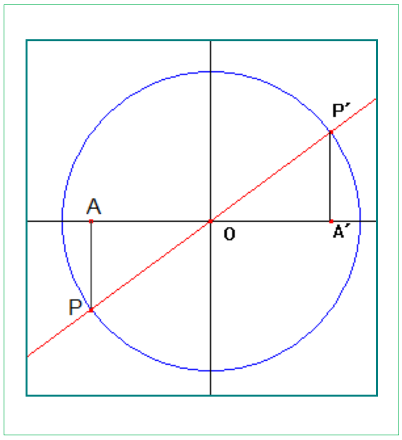
Construimos los triángulos rectángulos OPA y $OP´A´$ iguales de forma que la hipotenusa sea en ambos casos el radio de la circunferencia *goniométrica* y además β = ángulo AOP = ángulo $A´OP´$.

$$sen\ \alpha = \overline{AP} = \overline{A'P'} = sen\ \beta$$

$$\cos \alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -\cos \beta$$

Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{sen\ \beta}{-\cos \beta} = -tg\ \beta$

Ángulos del tercer cuadrante



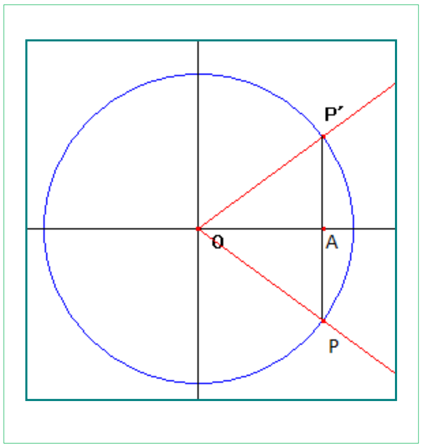
También en este caso los triángulos rectángulos OPA y $OP´A´$ son iguales. Su hipotenusa es el radio de la circunferencia *goniométrica* y sus catetos los segmentos determinados por las coordenadas de los puntos P y $P´$. La construcción se realiza además de modo que β = ángulo AOP = ángulo $A´OP´$.

$$sen\ \alpha = \overline{AP} = -\overline{A'P'} = -sen\ \beta$$

$$\cos \alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -\cos \beta$$

Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{-sen\ \beta}{-\cos \beta} = tg\ \beta$

Ángulos del cuarto cuadrante



Por último construimos los triángulos rectángulos OPA y $OP´A$ iguales de modo análogo a lo descrito en los dos casos anteriores, observando que, en este caso $A = A´$.

$$sen\ \alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -sen\ \beta$$

$$\cos \alpha = \overline{AO} = \cos \beta$$

Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-sen\ \beta}{\cos \beta} = -tg\ \beta$$

Actividades propuestas

12. Copia en tu cuaderno, y sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

Ángulo	*Seno*	*Coseno*	*Tangente*	*Secante*	*Cosecante*	*Cotangente*
135°						
120°						
210°						
315°						
390°						
3000°						
–150°						

13. Utiliza la calculadora y lo aprendido en este apartado para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360^o cuyo seno es de 0'6.

14. Ídem todos los ángulos negativos menores en valor absoluto que 360^o cuya tangente vale 4.

15. Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360^o y 720^o cuyo coseno vale 0'75.

Ángulos determinados por los semiejes

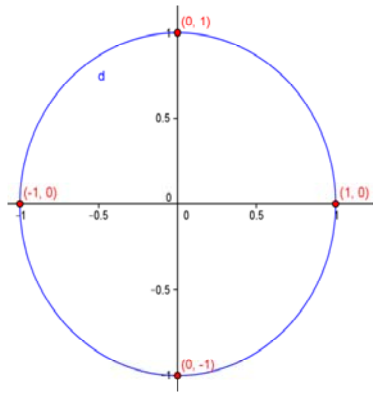
Hay cuatro puntos P_α donde la circunferencia corta a los ejes coordenados. Es fácil ver que son los puntos:

$$(1, 0)\ [\alpha = 0^o]$$

$$(0, 1)\ [\alpha = 90^o]$$

$$(-1, 0)\ [\alpha = 180^o]$$

$$(0, -1)\ [\alpha = 270^o]$$



Por tanto, los ángulos $0^o + 360^o n$, $90^o + 360^o n$, $180^o + 360^o n$ y $270^o + 360^o n$ están determinados por semiejes de coordenadas y sus razones trigonométricas se miden a partir de puntos de los ejes.

De ahí se obtiene con facilidad:

$sen\ (0^o + 360^o n) = 0$; $\quad \cos\ (0^o + 360^o n) = 1$; $\quad tg(0^o + 360^o n) = 0$.

$sen\ (90^o + 360^o n) = 1$; $\quad \cos\ (90^o + 360^o n) = 0$; $\quad tg(90^o + 360^o n)$ no existe.

$sen\ (180^o + 360^o n) = 0$; $\quad \cos\ (180^o + 360^o n) = -1$; $\quad tg(180^o + 360^o n) = 0$.

$sen\ (270^o + 360^o n) = -1$; $\quad \cos\ (270^o + 360^o n) = 0$; $\quad tg(270^o + 360^o n)$ no existe.

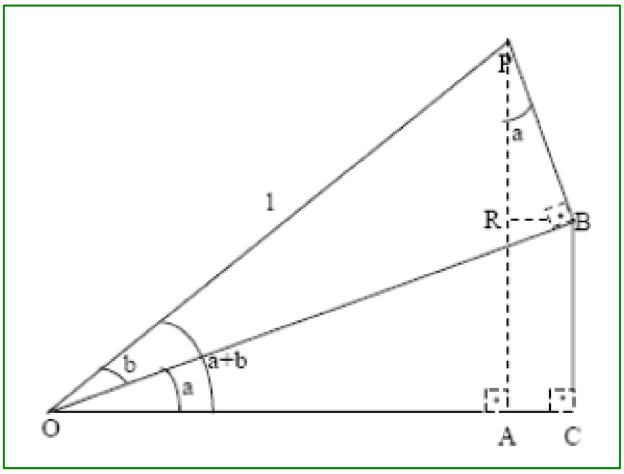
2. CÁLCULO DE RAZONES DE UNOS ÁNGULOS A PARTIR DE OTROS

2.1. Razones trigonométricas de la suma de ángulos

Muchas veces es de utilidad poder calcular las razones trigonométricas de una suma de ángulos a partir de conocer las razones trigonométricas de los ángulos independientes.

El objetivo del presente apartado es expresar las razones $sen(a+b)$, $cos(a+b)$ y $tg(a+b)$ en función de $sen(a)$, $sen(b)$, $cos(a)$, $cos(b)$, $tg(a)$ y $tg(b)$.

Para el cálculo utilizaremos la siguiente figura formada por dos triángulos rectángulos OCB y OBP superpuestos. La hipotenusa OB de un triángulo es un cateto del otro. En la figura a la hipotenusa OP le daremos el valor de 1 unidad. En la construcción se obtiene un tercer triángulo rectángulo OAP en donde el ángulo del vértice O es la suma de los ángulos ($a+b$) de los otros dos triángulos (a y b).



Por propiedades de perpendicularidad podemos ver otro triángulo rectángulo semejante PRB (iguales ángulos y lados proporcionales) al triángulo OCB. Para entender la semejanza sólo tienes que ver que los lados de los triángulos son perpendiculares.

Nuestro objetivo es poner las razones trigonométricas del ángulo $a+b$, del triángulo OPA en función de a y b. Vamos a calcular el seno y el coseno de este ángulo:

$$sen\,(a+b) = AP = AR + RP = CB + RP$$

$$\cos\,(a+b) = OA = OC - AC = OC - RB$$

Pongamos los segmentos CB, RP, OC y RB en función de los ángulos de a y b:

$$sen(a) = \frac{CB}{OB} \rightarrow CB = OB \cdot sen(a)$$

$$sen(a) = \frac{RB}{PB} \rightarrow RB = PB \cdot sen(a)$$

$$\cos(a) = \frac{RP}{PB} \rightarrow RP = PB \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a) = \frac{OC}{OB} \rightarrow OC = OB \cdot \cos(a)$$

$$sen(b) = \frac{PB}{1} \rightarrow PB = sen(b)$$

$$\cos(b) = \frac{OB}{1} \rightarrow OB = \cos(b)$$

$$sen(a) = \frac{CB}{OB} \rightarrow CB = OB \cdot sen(a)$$

$$sen(a) = \frac{RB}{PB} \rightarrow RB = PB \cdot sen(a)$$

$$\cos(a) = \frac{RP}{PB} \rightarrow RP = PB \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a) = \frac{OC}{OB} \rightarrow OC = OB \cdot \cos(a)$$

$$sen(b) = \frac{PB}{1} \rightarrow PB = sen(b)$$

$$\cos(b) = \frac{OB}{1} \rightarrow OB = \cos(b)$$

Con estas igualdades fácilmente relacionaremos el seno y coseno de la suma de dos ángulos con las razones simples… ¡¡hemos llegado a nuestro objetivo!!

$$sen(a+b) = sen(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot sen(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - sen(a) \cdot sen(b)$$

Una nota adicional: Aunque lo hayamos demostrado sólo para ángulos agudos, estas fórmulas son válidas para ángulos cualesquiera. Sólo hay que ir reduciéndolos al primer cuadrante. Es pesado, pero no reviste especial dificultad.

Para calcular la tangente utilizaremos la relación que tiene con el seno y el coseno visto en el apartado anterior:

$$tg(a+b)=\frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)}\underbrace{=}_{\substack{dividiendo\\ num\ y\ den\ por\\ \cos(a)\cos(b)}}\frac{\frac{sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}=$$

$$=\frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)}$$

Resumen:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA

$$\begin{cases} sen(a+b)=sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)\\ \cos(a+b)=\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)\\ tg(a+b)=\dfrac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)}\end{cases}$$

Actividades propuestas

16. Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30°, 45°, 60° y 90° las razones trigonométricas de 75°, 120°, 150°, 105° y 135°

17. Comprueba que las razones trigonométricas de 90° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 30° y de 60°.

2.2. Razones trigonométricas de la resta de ángulos

En este apartado nos planteamos obtener las razones trigonométricas de la resta de dos ángulos ($a-b$) en función de a y b. La demostración en este caso es mucho más sencilla que en el sub-apartado anterior, pues simplemente vamos a usar el resultado de la suma, sumando un ángulo negativo ($-b$). Para la demostración utilizaremos la relación entre un ángulo del cuarto cuadrante ($-b$ = 360 $-b$) en función del ángulo b en el primero. Recordemos esta relación vista en un apartado anterior:

- $sen(-b) = sen(360-b) = -sen(b)$
- $cos(-b) = cos(360-b) = cos(b)$
- $tg(-b) = tg(360-b) = -tg(b)$

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

Aplicamos estos resultados a las razones trigonométricas de la suma visto anteriormente:

$$sen(a-b) = sen(a + (-b)) = sen(a)\cdot cos(-b) + cos(a)\cdot sen(-b) = sen(a)\cdot cos(b) - cos(a)\cdot sen(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a + (-b)) = cos(a)\cdot cos(-b) + sen(a)\cdot sen(-b) = cos(a)\cdot cos(b) + sen(a)\cdot sen(b)$$

$$tg(a-b) = tg(a+(-b)) = \frac{tg(a)+tg(-b)}{1-tg(a)\cdot tg(-b)} = \frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)\cdot tg(b)}$$

Resumiendo:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA RESTA

$$\begin{cases} sen(a-b) = sen(a)\cdot \cos(b) - \cos(a)\cdot sen(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cdot \cos(b) + sen(a)\cdot sen(b) \\ tg(a-b) = \dfrac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)\cdot tg(b)} \end{cases}$$

Actividades propuestas

18. Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º y 90º las razones trigonométricas de 15º

19. Comprueba que las razones trigonométricas de 30º se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90º, y de 60º.

20. Demuestra las fórmulas de ángulos complementarios usando las fórmulas de la resta. Es decir, verifica que $sen(90 - \alpha) = cos(\alpha)$ y las demás usando estas fórmulas. Observa que esta demostración que acabas es más general que la que hicimos antes, porque ahora α no tiene por qué ser agudo.

2.3. Razones trigonométricas del ángulo doble

En este apartado buscamos expresar las razones trigonométricas del ángulo doble, 2*a*, en función del ángulo *a*.

Para calcularlo utilizamos las razones trigonométricas de la suma:

$$sen(2a) = sen(a+a) = sen(a)\cdot \cos(a) + \cos(a)\cdot sen(a) = 2\cdot sen(a)\cdot \cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos(a)\cdot \cos(a) - sen(a)\cdot sen(a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$

$$tg(2a) = \frac{tg(a)+tg(a)}{1-tg(a)\cdot tg(a)} = \frac{2\cdot tg(a)}{1-tg^2(a)}$$

Resumiendo:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$\begin{cases} sen(2a) = 2\cdot sen(a)\cdot \cos(a) \\ \cos(2a) = \cos^2(a) - sen^2(a) \\ tg(2a) = \dfrac{2\cdot tg(a)}{1-tg^2(a)} \end{cases}$$

2.4. Razones trigonométricas del ángulo mitad

Como has visto en los dos anteriores sub-apartados podemos calcular las razones de las resta y del ángulo doble a partir de las razones trigonométricas de la suma. Para nuestro propósito de calcular las razones trigonométricas de los ángulos mitad utilizaremos las fórmulas del ángulo doble y de la relación fundamental de la trigonometría. Vamos a ello:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x) \quad \rightarrow \quad sen(x) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) = \cos^2(x) - \left(1 - \cos^2(x)\right) = 2\cos^2(x) - 1 \quad \rightarrow \quad \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

Llamando 2x = a, y por tanto x = a/2 tendremos los resultados que resumimos en el siguiente cuadro

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

$$\begin{cases} sen\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}} \\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}} \\ tg\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}} \end{cases}$$

Actividad resuelta

- *Calcular sen*(3*a*) *en función únicamente de sen*(*a*)

Solución:

Para la resolución utilizaremos el seno de la suma, expresando 3a = 2a + a. Luego utilizaremos el seno y el coseno del ángulo doble para los *sen*(2*a*) y *cos*(2*a*). Por últimos para expresar todo en función del seno usaremos la relación fundamental que nos relaciona el coseno de un ángulo con su seno. Vamos a ello:

Paso 1. Seno de la suma: *sen*(*a*+*b*) = *sen*(*a*)·*cos*(*b*) + *cos*(*a*)·*sen*(*b*).

$$sen(3a) = sen(2a + a) = sen(2a)\cdot\cos(a) + \cos(2a)\cdot sen(a)$$

Paso 2. Seno y coseno del ángulo doble: *sen*(2*a*) = 2*sen*(*a*)·*cos*(*a*) y *cos*(2*a*) = $cos^2(a) - sen^2(a)$.

$$sen(3a) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)\cdot\cos(a) + \left(\cos^2(a) - sen^2(a)\right)sen(a) =$$

$$= 2\cdot sen(a)\cdot\cos^2(a) + \cos^2(a)\cdot sen(a) - sen^3(a) = 3\cdot\cos^2(a)\cdot sen(a) - sen^3(a)$$

Paso 3. Relación fundamental trigonometría: $sen^2(a) + cos^2(a) = 1$.

$$sen(3a) = 3\cdot(1 - sen^2(a))\cdot sen(a) - sen^3(a) = 3\cdot sen(a) - 4\cdot sen^4(a)$$

Actividades propuestas

21. Calcula las razones trigonométricas de 22’5^{o} y 11’25^{o} a partir de las razones trigonométricas de 45^{o}.

22. Comprueba que las razones trigonométricas de 45 ^{o} se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90 ^{o}.

23. Calcula *cos*(3*a*) en función únicamente de *cos*(*a*),

24. Calcula *sen*(4*a*) en función únicamente de *sen*(*a*) y *cos*(4*a*) en función de *cos*(*a*).

2.5. Transformaciones de sumas de razones trigonométricas en productos

En este apartado vamos a ver como trasformar la suma o diferencia de dos razones trigonométricas en un producto de razones trigonométricas. La utilidad de esto es más grande del que a simple vista parece, de hecho lo utilizaremos bastante en el apartado siguiente de resolución de ecuaciones trigonométricas.

Vamos a demostrar, como en los anteriores sub-apartados, las identidades que nos relacionan la suma de dos razones trigonométricas en el producto de otras dos razones. Para este objetivo partimos de las ya conocidas razones trigonométricas del seno y coseno de la suma y diferencia:

$$(1)\quad sen(a+b) = sen(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot sen(b)$$
$$(2)\quad sen(a-b) = sen(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot sen(b)$$

(1) + (2) → $sen(a+b) + sen(a-b) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(b)$

(1) – (2) → $sen(a+b) - sen(a-b) = 2\cdot\cos(a)\cdot sen(b)$

Como el objetivo es que sean los argumentos de las razones trigonométricas sumadas conocidos se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=A \\ a-b=B \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{l} a=\dfrac{A+B}{2} \\ b=\dfrac{A-B}{2} \end{array}\right\}$$

De esta forma:

$$sen(A) + sen(B) = 2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$sen(A) - sen(B) = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Vamos a obtener la suma y diferencia de cosenos:

$$(1)\quad \cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - sen(a)\cdot sen(b)$$
$$(2)\quad \cos(a-b) = \cos s(a)\cdot\cos(b) + sen(a)\cdot sen(b)$$

(1) + (2) → $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cdot\cos(a)\cdot\cos(b)$

(1) – (2) → $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\cdot sen(a)\cdot sen(b)$

Haciendo el cambio de variable:

$$\cos(A) + \cos(B) = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos(A) - \cos(B) = -2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Recapitulemos los resultados:

$$sen(A)+sen(B)=2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \cos(A)+\cos(B)=2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$sen(A)-sen(B)=2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \cos(A)-\cos(B)=-2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Actividad resuelta

- *Simplifica la expresión* $\frac{sen(9a)+sen(a)}{\cos(9a)-\cos(a)}$ *hasta obtener una única razón trigonométrica*

Solución:

Primero trasformamos las sumas en productos: $\frac{sen(9a)+sen(a)}{\cos(9a)-\cos(a)}=\frac{2\cdot sen(5a)\cdot\cos(4a)}{-2\cdot sen(5a)\cdot sen(4a)}$

Podemos simplificar y agrupar en la cotangente: $\frac{sen(9a)+sen(a)}{\cos(9a)-\cos(a)}=\frac{2\cdot \cancel{sen(5a)}\cdot\cos(4a)}{-2\cdot \cancel{sen(5a)}\cdot sen(4a)}=-\cot g(4a)$

Actividades propuestas

25. Calcula sin hacer uso de la calculadora

a. $sen(75) - sen(15)$

b. $cos(15) - sen(15)$

26. Utiliza las transformaciones de sumas en productos para poner en función del seno y coseno del ángulo a:

a. $sen(45+a) + sen(45 - a)$

b. $cos(120+a) + cos(60 + a)$

c. $cos(270 - a) - cos(90 - a)$

27. Simplifica las siguientes expresiones hasta obtener una única razón trigonométrica:

a. $\frac{sen(5a)+sen(3a)}{\cos(5a)+\cos(3a)}$

b. $\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{sen(x+y)+sen(x-y)}$

3. ECUACIONES Y SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOS

3.1. Ecuaciones

Es importante distinguir una ***identidad*** (trigonométrica o no) y una ***ecuación***. Aunque es algo que trabajas desde la ESO es conveniente recordarlo, para no confundir conceptos. Una identidad es una igualdad que es cierta para cualquier valor de las letras (variables), por ejemplo $sen^2(x)+\cos^2(x)=1$. Por el contratio una ecuación sólo se cumple para algún valor de las letras (ahora se suele llamar incógnitas), por ejemplo "$sen(x)$ = 0" será cierto para x = 0^o y x = 180^o pero no para x = 90^o.

En este punto que ahora abordamos lo que tratamos es de resolver las ecuaciones, es decir encontrar los valores de las incógnitas donde se cumpla la igualdad.

Podemos poner algunas pautas para resolver las ecuaciones, pero no hay ninguna "receta mágica" que permita resolverlas de forma mecánica como las ecuaciones de segundo grado. Sólo repetir y hacer bastantes ecuaciones te va a facilitar resolver otras. Permítenos que te demos esas **pautas** que antes describíamos:

I. Para resolver una ecuación los ***argumentos*** de las razones trigonométricas (lo que está dentro de los paréntesis del *sen*, *cos*, *tg*…) han de ser ***iguales***. De esta forma si tenemos en algunos x en otros 2x, por ejemplo podemos transformarlos en x con el ángulo doble

II. Si tenemos ***sumas o resta de dos razones trigonométricas*** (seno o coseno) igualadas a cero, podemos transformarlas en producto y así luego separar la ecuación en dos igualdades elementales.

III. Si tenemos varias razones trigonométricas con mismo argumento mediante las igualdades trigonométricas, $sen^2(x)+\cos^2(x)=1$, $1+tg^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ o $tg(x)=\dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$ podremos poner todas las razones en ***función de una única razón trigonométrica*** y mediante un cambio de variable resolver la ecuación.

Vamos a ver alguna ecuación y su resolución:

Actividad resuelta

- *Ecuación básica con una única razón trigomométrica:* ***sen*(2*x*) = 1/2.**
- Primero despejamos la x buscando, en la circunferencia trigonométrica o con la calculadora, el 1/2. En este caso sabemos que el ángulo mide o 30º (π/6 radianes) o 150º (5π/6 radianes).
- Usando la calculadora (*recuerda*, debes usar las teclas *shift* y luego *sin*) y obtendrás sólo una de las dos soluciones que tiene[1], 2x = 30^o, (según tengas la calculadora, en grados, 2x = 30^o, o en radianes, 2x = 0'52 rad).
- A partir circunferencia trigonométrica podemos obtener la otra solución entre [0^o, 360^o) que tiene la igualdad.

Tenemos que en nuestro ejemplo las soluciones entre [0^o, 360^o) son 30^o y 150^o

Para completar las soluciones se debe incluir las soluciones en cualquier rango, no sólo en el intervalo [0^o, 360^o), por lo que debido a la peridicidad de las funciones trigonométricas podemos sumarle las

[1] Cuando es $sen(x)$ = 1, $sen(x)$ = –1, $cos(x)$ = 1, $cos(x)$ = –1 sólo tienen una solución entre [0, 360^o)

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

vueltas que se deséen a las soluciones anteriores.

Luego la solución para el problema es $2x = \begin{cases} 30^o + 360^o k \\ 150^o + 360^o k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$ (número de vueltas) y por tanto despejando x tenemos:

$$x = \begin{cases} 15^o + 180^o k \\ 75^o + 180^o k \end{cases} \rightarrow \ x = \begin{cases} 15^o + 360k \\ 195^o + 360k \\ 75^o + 360k \\ 255^o + 360k \end{cases}$$

Actividades propuestas

28. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $cos(3x) = 0$ b) $tg(2x) = -1$ c) $sen(4x) = -1$

29. Expresa en radianes las soluciones de la actividad resuelta ($sen(2x) = 1/2$) y de la actividad propuesta anterior.

Actividad resuelta

- *Ecuación trigonométrica con suma de dos razones trigonométricas (seno o coseno) transformable en productos.*

Un caso particular es la ecuación: $\boldsymbol{sen(4x) - sen(2x) = 0}$ que procedemos ahora a resolver.

Transformamos la suma en producto aplicando identidades del apartado anterior:

$sen(4x) - sen(2x) = 0 \rightarrow 2cos(3x)\cdot sen(x) = 0$.

Cuando un producto es igual a cero cada uno de los multiplicandos puede ser cero, y la ecuación se transforma en tantas ecuaciones simples como factores tengamos, en nuestro ejemplo dos:

(1) $cos(3x) = 0$ y (2) $sen(x) = 0$.

Resolvamos estas dos ecuaciones:

(1) $cos(3x) = 0 \rightarrow 3x = \begin{cases} \\ \end{cases} \rightarrow x = \begin{cases} \\ \end{cases} = \begin{cases} 30^o + 360^o k \\ 150^o + 360^o k \\ 270^o + 360^o k \\ 90^o + 360^o k \\ 210^o + 360^o k \\ 330^o + 360^o k \end{cases}$

(2) $\rightarrow x = \begin{cases} \\ \end{cases}$

Actividades propuestas

30. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $cos(5x) - cos(x) = 0$

b) $sen(2x) - sen(4x) = 0$

Actividad resuelta

- Ecuación trigonométrica donde no podemos transformar las sumas en productos por ser más de dos o *combinar seno y coseno.*

Tendremos que transformar todas las razones trigonométricas en una misma. Los pasos a seguir son los que siguen:

(1) Si tienen distinto argumento mediante transformaciones de ángulo doble poner todas las razones con mismo argumento.

(2) Si tenemos mismo argumento pero distintas razones trigonométricas poner todas en función de la misma utilizando las identidades $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, $tg(x) = sen(x)/cos(x)$ y $1+tg^2(x) = 1/cos^2(x)$

Como caso particular vamos a resolver $\boldsymbol{cos(2x) - sen(x) = sen^2(x)}$.

Primero transformamos el $cos(2x)$ en función ángulo x (coseno del ángulo doble):

$$cos^2(x) - sen^2(x) - sen(x) = sen^2(x) \rightarrow cos^2(x) - 2\cdot sen^2(x) - sen(x) = 0$$

Tenemos ahora que expresar el seno en función del coseno o al revés, utilicemos la identidad fundamental de la trigonometría $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$, con este cambio tenemos que la ecuación se transforma en ecuación en $sen(x)$:

$$1 - sen^2(x) - 2\cdot sen^2(x) - sen(x) = 0 \Rightarrow 1 - 3\cdot sen^2(x) - sen(x) = 0$$

Es una ecuación de segundo grado en $sen(x)$, llamando a $sen(x) = t$ lo verás más sencillo:

$$-3t^2 - t + 1 = 0.$$

Resolviendo $t = sen(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{13}}{-6} & (1) \\ \dfrac{1-\sqrt{13}}{-6} & (2) \end{cases}$ que son dos ecuaciones c*omolas de la primera actividad resuelta.*

$$(1)\ \ sen(x) = \frac{1+\sqrt{13}}{-6} \qquad \rightarrow \qquad x =$$

$$(2)\ \ sen(x) = \frac{1-\sqrt{13}}{-6} \qquad \rightarrow \qquad x =$$

Actividades propuestas

31. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $sen(x) + cos(x) = 1$

b) $sen(2x) = 2\cdot \cos(x)$

c) $sen^2(x) - cos^2(x) - cos(2x) = 1$

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Sistemas

Tenemos un sistema de ecuaciones trigonométricas cuando al menos en una de las ecuaciones que lo forman es una ecuación trigonométrica.

Resolver los sistemas trigonométricos no siempre es sencillo. Veamos los tipos de sistemas más frecuentes:

Nota: En las ecuaciones trigonométricas donde las incógnitas aparezcan en ecuaciones sin estar dentro de alguna razón trigonométrica se suponen que están expresadas en radianes.

Sistemas resolubles por los cambio de variable o por reducción.

Son sistemas donde aparecen sólo dos razones trigonométricas, tal que podemos hacer el cambio de variable y obtener un sistema de ecuaciones no trigonométricas.

Actividad resuelta

$$\begin{cases} sen(2x) + \cos(3y) = 1 \\ 2 \cdot sen(2x) + 4 \cdot \cos(3y) = 3 \end{cases}$$

Este es un ejemplo típico de cambio de variable.

$X = sen(2x)$, $Y = cos(3y)$ → $\begin{cases} X + Y = 1 \\ 2 \cdot X + 4 \cdot Y = 3 \end{cases}$, resolviendo el sistema lineal tenemos $X = 1/2$, $Y = 1/2$.

Deshaciendo el cambio de variable nos quedan ecuaciones trigonométricas del primer tipo:

$X = 1/2$ → $sen(2x) = 1/2$ → $x = \begin{cases} 15^o + 180^o k \\ 75^o + 180k \end{cases}$ $x = \begin{cases} 15^o + 360^o k \\ 195^o + 360^o k \\ 75^o + 360^o k \\ 255^o + 360^o k \end{cases}$

$Y = 1/2$ → $cos(3Y) = 1/2$ → $y = \begin{cases} 100^o + 360^o k \\ 220^o + 360^o k \\ 340^o + 360^o k \\ 20^o + 360^o k \\ 140^o + 360^o k \\ 260^o + 360^o k \end{cases}$

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

Actividad resuelta

$$\begin{cases} (1)\ \ y+\cos^2(x)=1 \\ (2)\ \ 2\cdot y+2\cdot sen^2(x)=0 \end{cases}$$

Podemos obtener una ecuación sin más que restar la ecuación (2) menos dos veces la ecuación (1)

$$2\cdot(1) - (2) \rightarrow 2\cdot cos^2(x) - 2\cdot sen^2(x)=2\ ,$$

Se resuelve transformando el seno en coseno o al revés mediante la igualdad fundamental:

$$cos^2x=1 - sen^2x$$

$$2 - 2sen^2(x) - 2sen^2(x) = 2 \rightarrow sen^2(x) = 0 \rightarrow x=\begin{cases} 0^\circ+360k \\ 180^\circ+360k \end{cases}$$

$$y = 1 - cos^2(x) = sen^2(x) = 0.$$

Actividades propuestas

32. Resuelve los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{array}{r} x+sen^2 y=2 \\ x+\cos^2\ y=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} sen(x)\cdot\cos(y)=\dfrac{3}{4} \\ \cos(x)\cdot sen(y)=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

Sistemas donde una variable se puede despejar.

En este tipo de sistemas despejamos la variable y la introducimos en la ecuación trigonométrica*:*

Actividad resuelta

$$\begin{cases} sen(x)+\cos(y)=1 \\ x+y=\pi/2 \end{cases}$$

Podemos despejar en la segunda ecuación una de las dos incógnitas y meterla en la primera obteniendo un sistema: $x = \dfrac{\pi}{2} - y$.

$sen(\dfrac{\pi}{2} - y) + cos(y) = 1$, utilizando la relación de ángulos complementarios $sen(\dfrac{\pi}{2} - y) = cos(y)$, con lo que la ecuación es $cos(y) + cos(y) = 1 \rightarrow cos(y)=1/2 \rightarrow y=\begin{cases} 60^\circ+360^\circ\cdot k=\dfrac{\pi}{3}+2\cdot\pi\cdot k \\ 300^\circ+360^\circ\cdot k=\dfrac{5\pi}{3}+2\cdot\pi\cdot k \end{cases}$

Sustituyendo y obtendremos la x = $\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k\right) = \frac{\pi}{6} - 2\cdot\pi\cdot k \\ \frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k\right) = \frac{-7\pi}{6} - 2\cdot\pi\cdot k \end{cases}$

Soluciones, si $x = \frac{\pi}{6} - 2\cdot\pi\cdot k \rightarrow y = \frac{\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k$; si $x = \frac{-7\pi}{6} - 2\cdot\pi\cdot k \rightarrow y = \frac{5\pi}{3} + 2\cdot\pi\cdot k$

Actividades propuestas

33. Resuelve los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{array}{r} sen(x) - sen(y) = 0 \\ x - y = \pi \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} sen(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\}$

Sistemas donde podemos eliminar las razones trigonométricas

En estos sistemas eliminamos la razón trigonométrica a partir de las funciones inversas (arco tangentes, arco coseno o arco seno). Resolvemos el sistema.

Actividad resuelta

$$\begin{cases} sen(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sen(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x - y = \begin{cases} 45^o + 360^o k \\ 135^o + 360^o k \end{cases} \\ x + y = \begin{cases} 60^o + 360^o k \\ 120^o + 360^o k \end{cases} \end{array}.$$

Tenemos 4 posibles sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 45^o + 360^o k \\ x + y = 60^o + 360^o k \end{cases} \rightarrow 2x = 105^o + 360^o k \rightarrow \begin{cases} x = 52{,}5^o + 360^o k \rightarrow y = 7{,}5^o + 360^o k \\ x = 232{,}5^o + 360^o k \rightarrow y = 187{,}5^o + 360^o k \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 45^o + 360^o k \\ x + y = 120^o + 360^o k \end{cases} \rightarrow 2x = 165^o + 360^o k \rightarrow \begin{cases} x = 82{,}5^o + 360^o k \rightarrow y = 37{,}5^o + 360^o k \\ x = 262{,}5^o + 360^o k \rightarrow y = 217{,}5^o + 360^o k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 135^o + 360^o k \\ x + y = 60^o + 360^o k \end{cases} \rightarrow 2x = 195^o + 360^o k \rightarrow \begin{cases} x = 97{,}5^o + 360^o k \rightarrow y = 322{,}5^o + 360^o k \\ x = 277{,}5^o + 360^o k \rightarrow y = 142{,}5^o + 360^o k \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 135^o + 360^o k \\ x + y = 120^o + 360^o k \end{cases} \rightarrow 2x = 255^o + 360^o k \rightarrow \begin{cases} x = 127{,}5^o + 360^o k \rightarrow y = 352{,}5^o + 360^o k \\ x = 307{,}5^o + 360^o k \rightarrow y = 172{,}5^o + 360^o k \end{cases}$

Actividad propuesta

34. Resuelve los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{array}{r} \cos(x-y) = 0 \\ \cos(x+y) = 0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} sen(x-y) = 1/2 \\ \cos(x-y) = 1/2 \end{array}\right\}$

4. RESOLUCIÓN GENERAL DE TRIÁNGULOS

En este apartado, nos ocuparemos de un problema muy concreto, la resolución de triángulos. Resolver un triángulo es calcular todos sus lados y sus ángulos.

En un triángulo hay seis datos: tres lados y tres ángulos. Como veremos, un triángulo puede resolverse, en general (con las excepciones que citaremos) si de los seis datos conocemos tres cualesquiera.

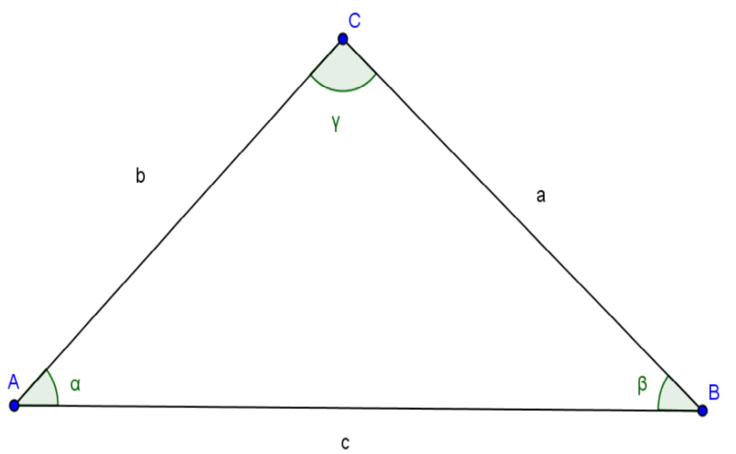
Es muy posible que de cursos anteriores ya conozcas gran parte de lo que vamos a ver en este apartado. En cualquier caso, nosotros comenzaremos desde el principio.

Notación general

Por comodidad, vamos a representar los triángulos siempre de la misma manera, como ya habíamos visto en el apartado 1.2 para ángulos agudos. Para mayor comodidad lo vamos a repetir aquí.

1. Los vértices se representarán con letras mayúsculas, A, B, C ...
2. El lado opuesto a un vértice se representará con la letra minúscula correspondiente a, b, c ...
3. El ángulo correspondiente a un vértice se representará con la letra griega (minúscula) correspondiente. Pondremos α (alfa) para el vértice A, β (beta) para el vértice B y γ (gamma) para el vértice C. No utilizaremos más letras griegas, si necesitáramos representar más ángulos usaremos primas como en α' (alfa prima) o α'' (alfa segunda).

Puedes ver a continuación un esquema.



4.1. Teorema del coseno

El teorema del coseno a veces recibe el nombre de *Teorema de Pitágoras Generalizado*, que es una descripción más exacta. Es esencialmente el teorema de *Pitágoras* para triángulos no rectángulos (y además incluye como caso especial los triángulos rectángulos).

Su enunciado es sencillo:

Teorema del coseno

Si a, b y c son los lados de un triángulo cualquiera y α es el ángulo entre b y c se cumple la igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

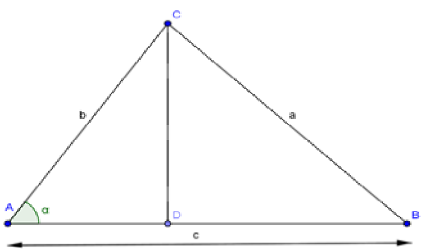
Notas

- Cuando el triángulo es rectángulo y a es la hipotenusa entonces $\alpha = 90^o$. Si sustituimos en la fórmula tenemos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90$. Pero al ser $\cos 90 = 0$ la fórmula se reduce al **teorema de Pitágoras** $a^2 = b^2 + c^2$. Todos los problemas que se resuelven con el teorema de Pitágoras se resuelven con el teorema del coseno (pero, obviamente, no al revés).
- El teorema del coseno vale para CUALQUIER ángulo α, no es necesario que sea agudo. Por ejemplo puede ser α = 110^o, lo único que el coseno sería negativo. Pero la fórmula es la misma.
- Podemos utilizar el teorema de los cosenos si en un triángulo conocemos:
  - Los tres lados.
  - Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
  - Dos lados y el ángulo que forman.

Demostración del teorema

Vamos a hacerlo para un triángulo acutángulo. Dejaremos como ejercicio el caso obtusángulo (el rectángulo lo suponemos conocido, es el *Teorema de Pitágoras*).

Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Esta altura puede caer sobre el lado AB o fuera de él. Vamos a considerar el primer caso, el segundo quedará como ejercicio.



Queremos calcular el lado a = BC. Por el teorema de *Pitágoras* es $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2$. El problema es que no tenemos ni CD ni DB. Lo que sí tenemos es b = AC, c = AB y el ángulo α.

Sabemos que $sen\,(\alpha) = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC\,sen(\alpha)$.

Sabemos también $\cos(\alpha) = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC\cos(\alpha)$.

Pero, por construcción $AD + DB = AB$ y AB sí lo tenemos. Luego es $DB = AB - AD$.

Recapitulando y escribiendo en función de a, b y c que son los datos originales:

$$CD = AC\,sen(\alpha) \Rightarrow CD = b\,sen(\alpha)$$

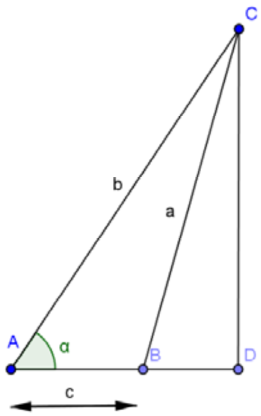
$$DB = AB - AD = c - AC\cos(\alpha) = c - b\cos(\alpha)$$

Finalmente $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2 = [b\,sen(\alpha)]^2 + [c - b\cos(\alpha)]^2$. Basta operar un poco:

$$a^2 = [b\,sen(\alpha)]^2 + [c - b\cos(\alpha)]^2 = b^2 sen^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 sen^2(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) = b^2\left[sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right] + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

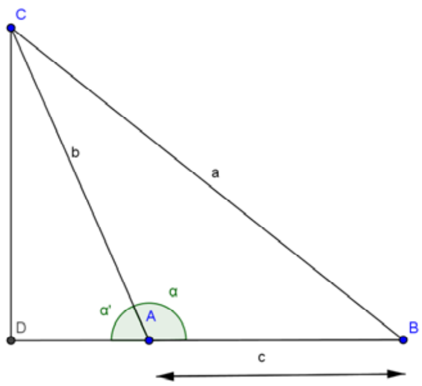
Pero $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ con lo que finalmente tenemos el resultado deseado.



Actividades propuestas

35. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del coseno en ese caso [***Pista:*** los únicos cambios aparecen al despejar AD que se suma en vez de restar].

36. Demuestra que el teorema del coseno también vale para ángulos entre 90 y 180 grados. Para ello, procede como sigue:



a) En la figura que tienes a tu izquierda considera el ángulo α'. Se cumple que $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$ ¿Por qué?

b) Considera el triángulo rectángulo DBC y pon a en función de CD y DB.

c) De la misma manera que antes, pon CD y DB en función de b, c y α'.

d) Sustituye en la expresión para a hasta llegar a una fórmula para a en función de b, c y α'. Al sustituir el $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$ tienes el resultado.

37. Dibuja un triángulo con b = 5, c = 8 y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^\circ$ (usa una regla y un transportador). Calcula el otro lado con el teorema del coseno y comprueba que coincide con el resultado medido. No te saldrá exactamente por el redondeo y el error de medición pero debería ser muy similar.

38. Un triángulo tiene de lados 3, 5 y 7. Calcula sus ángulos.

39. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del coseno para calcular el otro lado. Obtendrás dos soluciones.

b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos ¿serías capaz de dibujarlos?

4.2. Teorema del seno

El teorema del coseno es sólo la mitad de las herramientas que necesitamos para resolver triángulos. La otra mitad es el teorema del seno, que vamos a definir a continuación. Su enunciado y demostración son más sencillos que el teorema del coseno.

Teorema del seno:

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

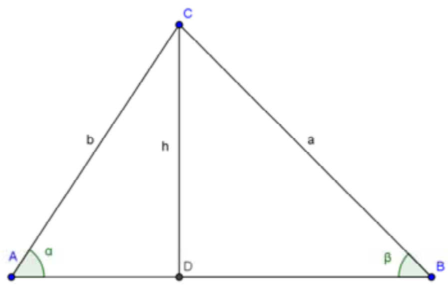
Notas

- Como antes el teorema del seno vale para CUALQUIER ángulo α, no es necesario que sea agudo. En este caso además el seno es siempre positivo pues los lados de un triángulo suman 180 grados. Y obviamente ningún ángulo puede ser 0 o 180, porque nos quedamos sin triángulo.
- El teorema del seno es preferible al del coseno si conocemos:
  a) Dos ángulos (es decir, tres ángulos) y un lado.
  b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Demostración del teorema

Como antes, vamos a hacerlo para un triángulo acutángulo y dejaremos como ejercicio los otros casos, el caso obtusángulo (el rectángulo lo suponemos conocido, es el Teorema de *Pitágoras*).

Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Esta altura puede caer sobre el lado AB o fuera de él. Vamos a considerar el primer caso, el segundo quedará como ejercicio.



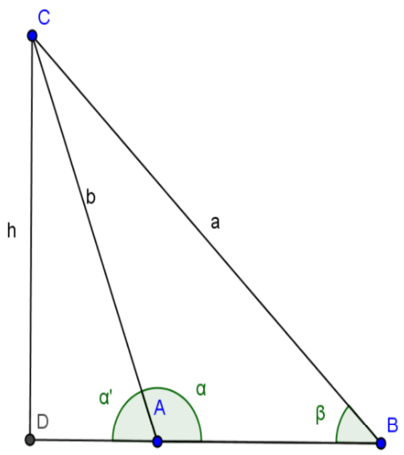
Por definición de seno, tenemos $sen(\alpha) = \frac{h}{b}$ y también $sen(\beta) = \frac{h}{a}$. De este modo, despejando h en los dos lados e igualando $b\,sen(\alpha) = h = a\,sen(\beta)$.

En otras palabras $b\,sen(\alpha) = a\,sen(\beta) \Rightarrow \frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}$.

Con el mismo razonamiento para el ángulo γ correspondiente al vértice C se tiene la otra igualdad.

Al igual que en el teorema anterior, en las actividades propuestas veremos el otro caso.

Actividades propuestas



40. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del seno en ese caso [***Pista:*** hay que utilizar α' en vez de α y ver la relación entre el seno de ambos ángulos]

41. El ejercicio anterior ya demuestra que el teorema del seno vale para triángulos obtusángulos ¿por qué? Demuestra el teorema para un triángulo rectángulo usando que $sen 90 = 1$

42. Como antes, dibuja un triángulo con b = 5, c = 8 y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^o$. Calcula con el teorema del seno el ángulo opuesto al lado b y calcula, SIN UTILIZAR EL TEOREMA DEL COSENO el otro ángulo y el lado que falta. Comprueba que te sale lo mismo que si hubieras utilizado el teorema del coseno para calcular a.

43. Un triángulo dos ángulos que valen 40 y 60 grados respectivamente. El lado entre ellos es de 8 cm. Calcula todos sus ángulos y lados.

44. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del seno para calcular el otro ángulo. Hay dos soluciones porque hay dos ángulos con el mismo seno. Calcula los dos.

b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos, ¿serías capaz de dibujarlos?

Problemas con el teorema del seno. Las soluciones obtusa y aguda

Si sabemos que un ángulo α está entre 0º y 180º y conocemos su coseno, el ángulo está determinado. Eso significa que, con el teorema del coseno, siempre podemos calcular ángulos de un triángulo sin ambigüedad.

Pero no ocurre lo mismo con el teorema del seno. Dado el seno de un ángulo, hay dos ángulos entre 0º y 180º cuyo seno coincida. En efecto, *sen*(30) = *sen*(150), *sen*(40) = *sen*(140) y en general $sen(\alpha) = sen(180 - \alpha)$. Sólo lo tenemos identificado cuando $sen(\alpha) = 1$ que da únicamente $\alpha = 90^o$.

Por eso, si utilizamos el teorema del seno para calcular ángulos, hay dos soluciones, la solución aguda y la solución obtusa. En algunas ocasiones esto está bien porque hay dos triángulos posibles pero en otras simplemente estamos introduciendo soluciones falsas.

¿Cómo arreglar este problema? Hay dos maneras. La más fácil es no utilizar nunca el teorema del seno para calcular ángulos, sino sólo lados.

La otra manera es utilizarlo para el cálculo de ángulos PERO ASEGURÁNDONOS DE QUE EL ÁNGULO ES AGUDO, ¿y cómo saber esto? Pues con el siguiente resultado.

Si un triángulo es obtusángulo, el ángulo obtuso es opuesto al lado más grande.

Demostración del teorema

Supongamos un triángulo obtusángulo de lados a, b y c con α el ángulo opuesto a "a" obtuso. Debemos ver $a > b$ y $a > c$.

Por el teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$. Como el ángulo α es obtuso entonces $\cos(\alpha) < 0$ y $2ab\cos(\alpha) > 0$. Eso significa $c^2 + 2ab\cos(\alpha) > 0$ y por tanto $a^2 > b^2$. Como los dos son positivos, tomando raíces se deduce $a > b$. Del mismo modo se demuestra que $a > c$.

4.3. Resolución general de triángulos

Con las herramientas de que disponemos, ya podemos solucionar el problema general de la trigonometría, es decir, resolver triángulos cualesquiera.

Un triángulo tiene seis datos. Para resolverlo necesitamos tres de ellos y al menos uno de ello debe ser un lado.

Herramientas fundamentales

- ✓ Teorema del seno
- ✓ Teorema del coseno
- ✓ La suma de los ángulos del triángulo es 180º

Para evitar que los errores se propaguen es recomendable utilizar los datos que nos dan inicialmente, y no los que hemos ido calculando.

No siempre un triángulo se puede resolver pues con los datos dados nos pueden aparecer soluciones imposibles. También a veces con los datos dados tendremos dos soluciones. El caso más problemático es cuando se conocen dos lados y uno de los ángulos que no formen los dos lados.

Vamos a continuación a describir la situación con todo el detalle en todos los casos.

Conocidos tres lados

Puede ocurrir:

- Una única solución
- Ninguna solución: esto ocurre cuando un lado es mayor o igual que la suma de los otros dos, o menor o igual que la resta de los otros dos.

Método recomendado para tres lados

- ✓ Si a es el lado mayor, calcular α (el ángulo opuesto) planteando el teorema del coseno en la forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$. Si sale $\cos\alpha \geq 1$ o $\cos\alpha \leq 1$ es que no hay solución.
- ✓ Calcular cualquiera de los otros dos ángulos con el teorema del seno.
- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º.

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo si sus lados son a = 2 cm, b = 4 cm, c = 5 cm.*

Solución:

El lado más grande es c de modo que lo ponemos a la izquierda en el planteamiento del teorema del coseno. Así pues $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Sustituyendo tenemos. $5^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos\gamma \Rightarrow 25-4-16 = -16\cos\gamma$

Queda $\cos\gamma = \frac{5}{-16} \Rightarrow \gamma = arc\cos\left(-\frac{5}{16}\right) = 108'21^{o}$

Fíjate que no hemos tenido ningún problema porque el ángulo fuera obtuso. Con el seno habríamos tenido que distinguir casos.

Podemos ahora calcular cualquiera de los otros ángulos con el teorema del seno. Como ya sabemos que son agudos (porque ya hemos calculado el único que podía ser obtuso) no hay problema. Por ejemplo, vamos a calcular β. Podríamos haber calculado α igualmente.

$\frac{sen(\gamma)}{c} = \frac{sen(\beta)}{b}$. Sustituyendo $\frac{sen(108'21)}{5} = \frac{sen(\beta)}{4} \Rightarrow sen(\beta) = \frac{4sen(108'21)}{5} = 0'76$

De ahí obtenemos $\beta = arc\,sen(0'76) = 49'46^{o}$.

Finalmente $\alpha+\beta+\gamma = 180 \Rightarrow \alpha = 180-108'21-49'46 = 22'33^{o}$

Con este método no estamos utilizando los datos iniciales en cada momento y por eso podemos tener errores de redondeo. Recomendamos tomar al menos dos decimales.

De una manera un poco más lenta, podemos usar sólo los datos iniciales.

Método para tres lados sólo con datos iniciales

Calcular TODOS los ángulos despejando con el teorema del coseno.

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo si sus lados son a = 2 cm, b = 4 cm, c = 5 cm.*

Solución:

Ahora podemos hacerlo en el orden que queramos, porque cada uno de ellos no afecta a los de antes. Lo único, que si empezamos por el más grande sabemos antes si no hay solución. Pero como ya hemos visto antes que sí la hay, empezamos calculando α para ver que sale lo mismo.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Rightarrow 2^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos\alpha \Rightarrow 4-16-25 = -40\cos(\alpha)$ o, lo que es lo mismo

$\cos\alpha = \frac{-37}{-40} \Rightarrow \alpha = arc\cos\left(\frac{37}{40}\right) = 22'33$

De la misma manera $\cos(\beta) = arc\cos\left(\frac{4^2-2^2-5^2}{-2\cdot 5\cdot 2}\right) = arc\cos\left(\frac{-13}{-20}\right) = 49'46$.

Finalmente $\cos(\gamma) = arc\cos\left(\frac{5^2-2^2-4^2}{-2\cdot 2\cdot 4}\right) = arc\cos\left(\frac{5}{-16}\right) = 108'21^{o}$.

Observa que APARENTEMENTE no hay ninguna diferencia con la solución anterior. Sin embargo, sí que la hay si mostramos todas las cifras. En este ejercicio, por ejemplo hemos calculado $\beta = \arccos\left(\frac{-13}{-20}\right) = 49'458$ pero en el anterior hemos hecho $\beta = \arccos(0'76) = 49'464$.

El error, en cualquier caso, es pequeño.

Conocidos dos lados y el ángulo entre ellos

En este caso SIEMPRE hay una única solución. El método es simple.

Método recomendado para dos lados y el ángulo que forman

- ✓ Calcular el otro lado con el teorema del coseno.
- ✓ Usar el teorema del seno para calcular un ángulo. Hay dos posibilidades, tenemos que escoger siempre la que corresponda al lado MENOR. De este modo evitamos la solución obtusa.
- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º.

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo con lados a = 20 cm, b = 10 cm y ángulo* $\gamma = 60^o$

Solución:

Lo primero, observa que el ángulo γ corresponde al vértice c y por tanto es el ángulo entre a y b.

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot cos\ \gamma \rightarrow c^2 = 400 + 100 - 400\cdot cos(60) \rightarrow c = \sqrt{300} = 17'32 \text{ cm}$$

Podemos aplicar el teorema del seno al ángulo α, correspondiente al lado a = 20 cm o al ángulo β, correspondiente al lado b = 10 cm. Para evitar la solución obtusa escogemos β pues es agudo (recuerda, si hay un ángulo obtuso debe corresponder al lado más grande).

$$\frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c} \Rightarrow \frac{sen(\beta)}{10} = \frac{sen(60)}{\sqrt{300}} \Rightarrow sen(\beta) = 0'5 \Rightarrow \beta = 30^o$$

Finalmente, restando tenemos $\alpha = 180 - \beta - \gamma = 180 - 30 - 60 = 90^o$. No habríamos tenido problemas si hubiéramos aplicado el teorema del seno a α pero "más vale prevenir"

Conocidos dos lados y un ángulo que no esté entre ellos

En este caso pueden ocurrir tres cosas:

- Una única solución (es un triángulo rectángulo).
- Dos soluciones.
- Ninguna solución.

Es muy parecido al otro caso, pero hay que discutir todas las posibilidades.

Método recomendado para dos lados y un ángulo que no esté entre ellos

- ✓ Plantear el teorema del coseno. Nos aparecerá una ecuación de segundo grado.
  - a) Si no tiene solución hemos terminado. No hay tal triángulo.
  - b) Si tiene solución única procedemos con los siguientes pasos.
  - c) Si tiene dos soluciones procedemos con los siguientes pasos para cada una de ellas. Son dos triángulos.
- ✓ Usar el teorema del seno para calcular un ángulo. Hay dos posibilidades, tenemos que escoger siempre la que corresponda al lado MENOR. De este modo evitamos la solución obtusa.

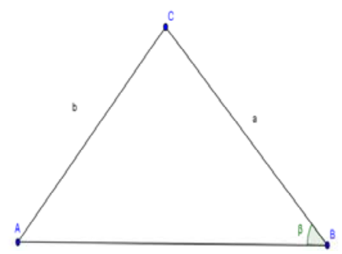
Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo con lados a = 20 cm, b = 10 cm y ángulo* $\beta = 20^{\circ}$

Solución:

Observa que, aunque el problema es muy similar, en este caso el ángulo está en otro lugar. Y esa diferencia, que parece mínima, nos cambia todo el problema.



Sabemos que el triángulo tiene que ser de la forma que aparece a la derecha. El triángulo no está a escala, es simplemente un esquema.

Puesto que sólo conocemos un ángulo, debemos aplicar el teorema del coseno a ese ángulo. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

Sustituyendo obtenemos $10^2 = 20^2 + c^2 - 2 \cdot 20 \cdot c \cdot \cos(50)$, es decir $100 = 400 + c^2 - 40 \cdot c \cdot 0'94$ o, expresado como ecuación de segundo grado $c^2 - 37'60c + 300 = 0$.

Resolviendo $c = \dfrac{37'6 \pm \sqrt{37'6^2 - 4 \cdot 300}}{2}$ nos da dos soluciones, $c = 26'11$ y $c = 11'49$.

Hay por tanto dos triángulos. Uno con *a* = 20, *b* = 10, *c* = 26'11 y otro con *a* = 20, *b* = 10, *c* = 11'49. Vamos a resolver el primero.

El único ángulo que puede ser obtuso es el γ. Por tanto vamos a calcular el α. Con el teorema del seno

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} \Rightarrow \frac{sen(\alpha)}{20} = \frac{sen(20)}{10} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{20}{10} sen(20) = 0'68 \Rightarrow \alpha = arc\,sen(0'68) = 42'84^{\circ}$$

Finalmente, $\gamma = 180 - 42'84 - 20 = 117'16^{\circ}$

El segundo es diferente puesto que ahora α puede ser obtuso. Así pues tenemos que calcular γ.

$$\frac{sen(\gamma)}{c} = \frac{sen(\beta)}{10} \Rightarrow \frac{sen(\alpha)}{11'49} = \frac{sen(20)}{10} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{11'49}{10} sen(20) = 0'39 \Rightarrow \alpha = arc\,sen(0'39) = 22'95^{\circ}$$

Finalmente, $\alpha = 180 - 22'95 - 20 = 137'05^{o}$

En resumen dos triángulos solución:

a = 20 cm, *b* = 10 cm, *c* = 26’11 cm, α = 42’84º, β = 20 º, γ = 117’16º.

a = 20 cm, *b* = 10 cm, *c* = 11’49 cm, α = 137’05º, β = 20 º, γ = 22’95º.

Conocido un lados y dos ángulos

En este caso pueden ocurrir son cosas:

1. Ninguna solución (si los dos ángulos suman 180 grados o más).
2. Una única solución.

Este caso es especialmente sencillo.

Método recomendado para dos ángulos y un lado

- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º. Si los dos ángulos que nos dan suman 180 grados o más no hay solución.
- ✓ Usar el teorema del seno para calcular los otros lados.

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo con lado a = 10 cm y ángulos* $\gamma = 60^{o}$ *y* $\alpha = 80^{o}$

Solución:

El ángulo β se calcula sin dificultad como $\beta = 180 - 60 - 80 = 40^{o}$.

Podemos ahora usar el teorema del seno:

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\gamma)}{c} \Rightarrow \frac{sen(80)}{10} = \frac{sen(60)}{c} \Rightarrow c = \frac{sen(60)}{sen(80)} \cdot 10 = 8'79\ cm$$

Es conveniente, al calcular el ángulo, poner las proporciones el revés. Desde luego, no es obligatorio, ya ves que el anterior lo hemos hecho sin cambiar. Lo dejamos a tu elección cómo quieras hacerlo.

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} \Rightarrow \frac{10}{sen(80)} = \frac{b}{sen(40)} \Rightarrow b = \frac{sen(40)}{sen(80)} \cdot 10 = 6'53\ cm$$

Observa que con los tres ángulos no se pueden calcular los lados. Dos triángulos con los ángulos iguales son semejantes, pero los lados no se pueden calcular sin tener algún otro lado.

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

4.4. Problemas de trigonometría con medidas simples y dobles.

Ahora que ya sabemos resolver cualquier tipo de triángulo, podemos también resolver problemas con varias medidas y no estamos restringidos a triángulos rectángulos. Por eso tenemos mucha libertad para resolverlos.

El problema típico de doble medida es tener dos ángulos [de ahí la doble medida] y una distancia y buscar calcular otra. Algunos ejemplos son:

- Desde un punto vemos el punto más alto de una torre con un ángulo de 30 grados y al acercarnos 5 metros se ve con un ángulo de 40 grados. Calcular la altura de la torre.
- Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?
- En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen 30 metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divisa el punto más alto de la Abadía con ángulo de 60º, y el Big Ben con un ángulo de 45º. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de 50 metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio? (***Nota:*** Los datos son totalmente ficticios y este problema está sacado de un libro de cuarto de la ESO también de Marea Verde).

Usualmente hay dos maneras de resolver un problema:

- Dividiendo el problema en varios triángulos rectángulos y planteando un sistema.
- Ir calculando una a una las medidas mediante dos triángulos no necesariamente rectángulos.

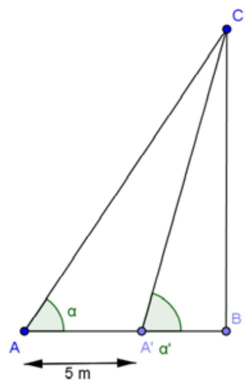
Vamos a resolver el primero. Los demás los dejaremos como ejercicio al final de esta misma sección.

Actividad resuelta

- *Desde un punto vemos el punto más alto de una torre con un ángulo de 30 grados y al acercarnos 5 metros se ve con un ángulo de 40 grados. Calcular la altura de la torre de dos maneras distintas.*

Solución:

En primer lugar vamos a resolverlo con un sistema. Antes de nada, dibujaremos la figura y pondremos nombre a las cosas.



El punto alejado lo llamamos A y a su ángulo α. El punto más cercano lo llamamos A' y a su ángulo α'. B es el pie de la torre y C su punto más alto.

Planteando un sistema tenemos:

$$tg(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{5 + A'B} \qquad tg(\alpha') = \frac{BC}{A'B},$$

Pero las tangentes las tenemos. $tg(\alpha) = tg(30) = 0'58$ y $tg(\alpha') = tg(40) = 0'84$. Por comodidad llamamos $y = BC$, $x = A'B$.

Así pues tenemos el sistema:
$$\begin{cases} 0'58 = \dfrac{y}{5+x} \\ 0'84 = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Para resolverlo, lo más fácil es dividir miembro a miembro las dos ecuaciones.

$$\frac{0'84}{0'58}=\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{5+x}}\Rightarrow 1'45=\left(\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{y}{x+5}\right)=\frac{y(x+5)}{yx}=\frac{x+5}{x}.$$

$$1'45x=x+5\Rightarrow 0'45x=5\Rightarrow x=\frac{5}{0'45}=11'11.$$

Pero lo que nos interesa es y. Así pues $0'84=\frac{y}{11'11}\Rightarrow y=11'11\cdot 0'84=9'33m$.

Vamos ahora a resolverlo directamente. En el triángulo $A'BC$ tenemos sólo dos ángulos ($\alpha'=40^{o}$ y el otro de 90º). Necesitamos un lado para resolverlo. Y nos vale cualquier lado.

Así pues, vamos a calcular el lado común con otro triángulo. Del triángulo $AA'C$ tenemos un lado (AA') y el ángulo $\alpha=30^{o}$. Necesitamos algo más. Pero tenemos $\alpha'=40^{o}$ así que también tenemos su complementario, al que llamaremos α'' y que obviamente vale 140 = 180 – 40. Por tanto en $AA'C$ tenemos dos lados y un ángulo. Podemos resolverlo.

No nos interesa el triángulo entero, solamente el lado común con $A'BC$. Aplicamos el método recomendado.

En primer lugar, el ángulo que queda, γ, vale 10º pues es 10 = 180 – 140 – 30.

Plantemos el teorema del seno. $\frac{A'C}{sen(\alpha)}=\frac{AA'}{sen(\gamma)}$

Sustituyendo $\frac{A'C}{sen(30)}=\frac{5}{sen(10)}\Rightarrow AC=\frac{sen(30)}{sen(10)}5=14'38m$

Por tanto, ya tenemos dos lados y dos ángulos. Podemos aplicar el teorema del seno a $A'BC$:

$$\frac{BC}{sen(\alpha')}=\frac{A'C}{sen(90)}\Rightarrow\frac{BC}{sen(40)}=\frac{14'38}{1}\Rightarrow BC=14'38\,sen(40)=9'24\ m$$

Hay una pequeña diferencia debido al redondeo. Si haces los cálculos usando todos los decimales de la calculadora puedes comprobar que sale 9’25416578 en los dos casos.

Actividades propuestas

45. Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?

46. En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen 30 metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divisa el punto más alto de la Abadía con ángulo de 60º, y el Big Ben con un ángulo de 45º. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de 50 metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio?

CURIOSIDADES. REVISTA

Sobre la redondez de la Tierra

¿Desde cuándo sabemos que la Tierra es redonda y no plana? (más bien habría que decir esférica pero todo el mundo dice redonda). Un error relativamente común es, pensar que todo el mundo opinaba que la Tierra era plana hasta el siglo XV. Entonces Colón descubrió América en el siglo XV y convenció a casi todo el mundo. Y luego Fernando de Magallanes y Juan Sebastián Elcano dieron la primera vuelta al mundo y disiparon todas las dudas.

Bien, pues ¡¡no es cierto!! Se sabe que la Tierra es redonda desde la Antigüedad. No sólo eso. Desde el siglo III a.C. se conoce su radio y por tanto su circunferencia. Así que ya antes de Cristo se sabía cuánto tenía que navegar Colón para dar la vuelta al mundo.

Entonces, ¿de qué tuvo que convencer Colón a sus patrocinadores? Ciertamente no de la redondez de la Tierra. Colón pensaba que la circunferencia de la Tierra era más pequeña y que Japón estaba más cerca de los datos más precisos que tenían los científicos de la época. De hecho afirmaba que sólo había unos 3.700 km de las islas Canarias a Japón (la cifra real son 12.500 Km).

Hay cierto debate sobre si realmente Colón pensaba eso o si simplemente sabía que había tierra a esa distancia y se limitó a coger las estimaciones que más se ajustaban a su idea. Pero todo eso nos aleja de la pregunta fundamental que queríamos responder, ¿cómo sabían los antiguos que la Tierra era redonda?

Retrato de Colón.

Fuente: Imagen en wikipedia

Mapa de Toscanelli

Posible mapa en que se basó Colón para planear su viaje.

Fuente: Imagen en wikipedia

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

Erastóstenes y el radio de la Tierra

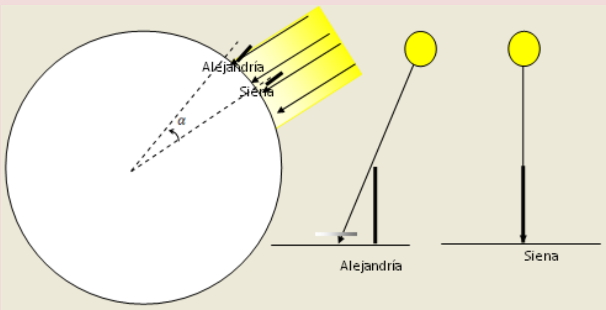
No está claro desde cuándo se sabe que la Tierra es redonda. Algunos dicen que fue *Pitágoras* (siglo VI a.C.) el primero en afirmarlo. También se afirma de otros griegos más o menos de la misma época como *Parménides*, *Zenón* o *Hesiodo*. Lo que sí se sabe es que a partir del siglo V a.C. la idea generalizada era que la Tierra era redonda.

La evidencia venía, entre otros factores, del hecho de que algunas estrellas que se ven desde *Egipto* no se veían desde *Grecia*. Eso sólo puede ocurrir si la Tierra es curva. También en los eclipses, la sombra de la Tierra sobre la Luna es siempre circular independientemente de cómo sea el eclipse. La única figura que siempre da sombras circulares es la esfera.

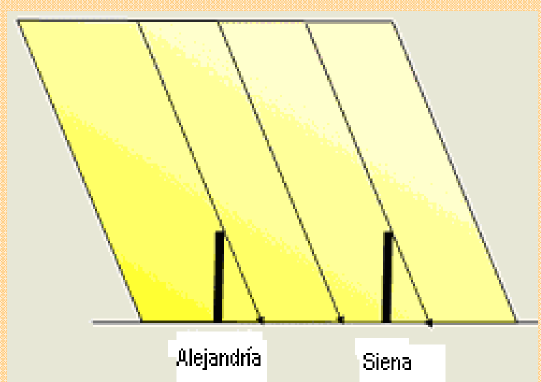
Sin embargo, hasta el siglo III a.C. sólo era una cuestión filosófica. El primero que midió realmente el radio de la Tierra y por tanto calculó su tamaño fue *Erastótenes de Cirene*.

El griego *Eratóstenes* vivió en Alejandría entre los años 276 a. C. y 194 a.C. Era un conocido matemático, astrónomo y geógrafo de la época. Entre otros trabajos uno de los más conocidos y aplicados en la actualidad es la denominada "Criba de *Eratóstenes*" para el cálculo de números primos.

El experimento realizado por *Eratóstenes* era genial en su sencillez: se sabía que en *Siena* (hoy *Asuán* en Egipto) los días próximos al solsticio de verano el Sol al mediodía no proyectaba sombras, es decir estaba en el perpendicular con la horizontal terrestre. En cambio el mismo día a la misma hora en *Alejandría* esto no ocurría y los palos tenían sombra. Mediante esta observación *Eratóstenes* no sólo le valió para darse cuenta de que la Tierra no era plana sino para ¡¡¡calcular el radio de la Tierra!!! Vamos a ver gráficamente el experimento a fin de entenderlo mejor. En la siguiente sección te proponemos realizar con tu clase otra práctica similar.



Situación si la Tierra es redonda



Situación si la Tierra fuese plana

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

REPLICA EL EXPERIMENTO

Replicando los cálculos originales

Simplemente observando que lo que ocurre es que dos palos separados dan sombras distintas, ya puedes deducir que la Tierra tiene curvatura. Pero el experimento nos da mucho más que eso. Podemos calcular también el radio de la esfera.

Si te fijas bien en el esquema primero (donde la Tierra es esférica) podemos observar que los ángulos que marcan la diferencia de latitud entre las dos ciudades ( ) y el ángulo de los rayos solares con el palo en *Alejandría* son iguales, pues los lados que forman ambos ángulos son paralelos. De esta forma calculando el ángulo que forma el palo de *Alejandría* con los rayos solares (con el arco tangente del cociente del tamaño de la sobra y el del palo) hemos calculado la diferencia de latitud.

Así lo hizo *Eratóstenes* y calculó este ángulo cuyo resultado fue 1/50 parte de la circunferencia, es decir, 7^{o} 12'. Posteriormente, tomó la distancia estimada por las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades, aunque bien pudo obtener el dato en la propia *Biblioteca de Alejandría*, fijándola en 5000 estadios, un estadio 174'25 m. Con estos resultado con una simple regla de tres llegó a la siguiente conclusión, que te pedimos que compruebes con calculadora:

Diferencia Latitud $\longrightarrow$	**Distancia**
1/50 partes circunferencia	174'25*5000/1000 = 871'25 km
1 circunferencia	x = longitud circunferencia

x = 871'25 · 50 = 43562'5 km.

Radio Tierra = longitud(x)/(2) = 6933 m (radio real 6370 m, error inferior al 10%)

Algunas consideraciones: Para hacer la medición de las sombras es necesario que la medición se haga a la misma "hora solar", esta sólo ocurre en el mismo instante sólo si nos encontramos en ciudades con la misma longitud (en el mismo meridiano). La diferencia entre las dos ciudades elegidas por *Eratóstenes* se diferencia en casi 3^{o}.

Realizando con tu clase un experimento similar

Vamos a realizar la experiencia con tus compañeros de clase. Para realizar la experiencia necesitas buscar la colaboración de otro instituto, cuanto más diferencia de latitud con el tuyo mejor saldrá la experiencia.

Dos son las dudas que se plantean a la hora de repetir el experimento:

1) ¿Necesitamos que los dos institutos estén en el mismo meridiano?
2) ¿Es necesario que el sol en uno de los institutos no proyecte sombra?

Vamos a resolver estas dos dudas:

1) Para hacer las medidas es necesario que el instante cuando miremos la sombra sea la misma "hora solar", es decir el sol estar en la "misma posición" en los dos centros. Si los dos centros no están en la misma longitud entonces tendremos que buscar el instante en cada centro en el que la hora solar sea la misma. Elegiremos la hora solar más reconocible, el mediodía solar. Es fácil reconocer este momento, por las siguientes

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

características:

a. El sol ocupa la posición más alta del día (menor sombra)
b. El sol está en el Sur del horizonte (la sombra cae al Norte)

- La hora de reloj del mediodía varía según la época del año y la longitud del centro. Para calcularlo tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:
- En España estamos una hora adelantados respecto a la hora Europea. Así hay que sumar una hora a la hora del mediodía (12 h)

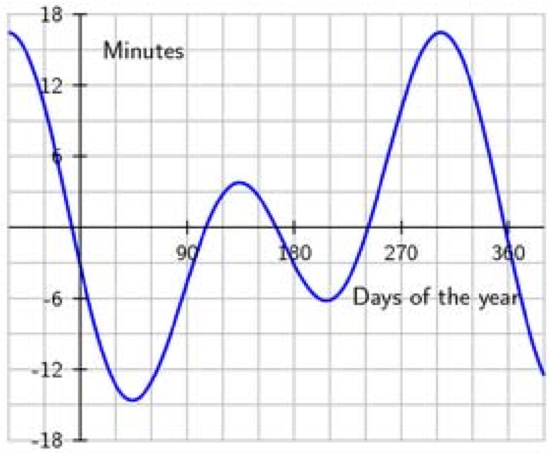
Meridiano de Greenwich

- En invierno con el cambio de hora tendremos que sumar otra hora.
- La hora de nuestros relojes está referida al centro del uso horario, en España el meridiano de *Greenwich*. Así al Oeste de este meridiano (que marca longitud 0^o) tendremos que sumar el "tiempo que tarda el sol" en llegar a la latitud del local. Si el centro se encuentra al Este del Meridiano hay que restar el "tiempo que tardó en Sol" en llegar al meridiano de *Greenwich* desde el lugar. Este valor se calcula con una sencilla regla de tres (24 horas → 360^o). Veamos dos ejemplos:

León: Longitud – $5'57^o$, tendremos que sumar a la hora $5'57^o \cdot$—— = 22 min

Girona: Longitud – $2'8^o$ tendremos que restar $2'8^o \cdot$—— = 11min

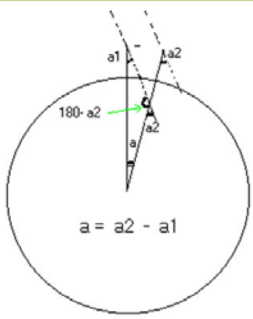
- Ecuación del tiempo: es la diferencia entre el tiempo solar medio (medido generalmente por un reloj) y el tiempo solar aparente (tiempo medido por un reloj de sol). Genera una gráfica de esta forma



Ecuación del tiempo

Para asentar conceptos veamos la hora real del mediodía solar en León el día 90 del año (comienzo de marzo).

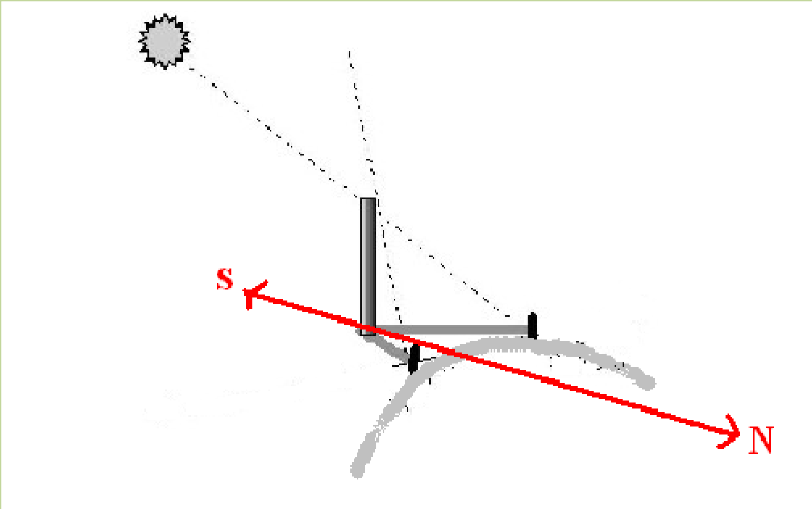
Hora mediodía = 12h + 1h invierno) + 1h (horario de España) + 22 min + -6 (ecuación del tiempo) = 14:16 minutos



2) El Sol sólo se sitúa en la vertical en días de verano de latitudes más próximas al ecuador. Pero esto no limita realizar la experiencia, pues la diferencia de latitud de los dos centros se calcula restando los ángulos que forma es Sol en los institutos.

Toma de medidas y cálculo del radio

Elegimos un día (y esperamos que sea soleado…). Nuestro objetivo es calcular la altura solar (ángulo



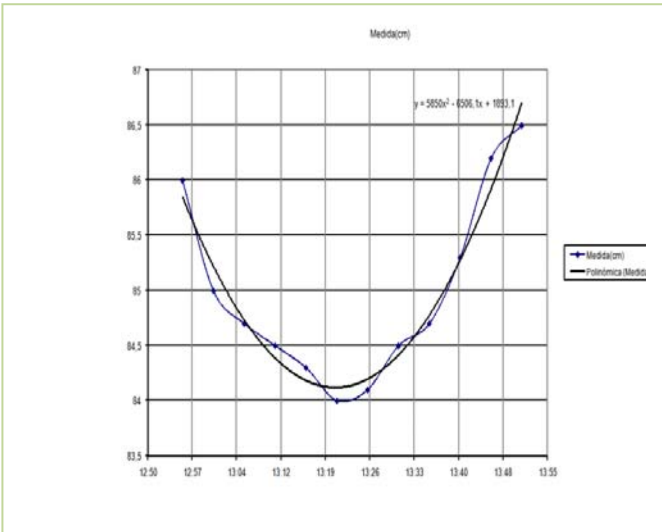
que forma el sol con un gnomo o palo perpendicular al suelo) en el mediodía. Para calcular este ángulo vamos a hacer varias medidas una hora antes y otra después del mediodía (recuerda como se calcula).

Situamos un palo perpendicular al suelo, podemos usar un recogedor y una plomada para asegurar la perpendicularidad con el suelo. Marcamos la posición en el suelo de la vertical del palo que nos da la sombra y situamos papel de *kraf* en el suelo para poder situar sobre él la sombra del palo. Cada cinco minutos marcamos la posición del extremo de la sombra, así como la hora. La sombra se mueve del Oeste a Este (al revés del sol), además hasta el mediodía la sombra disminuye de tamaño y a partir de mediodía aumenta.

Cuando tengamos las marcas y las horas analizamos las mismas con el fin de determinar la hora del mediodía y el tamaño de la sombra en este momento (sombra más pequeña en el mediodía). Podemos hacer esto de observando el tamaño de la sombra y cogiendo el valor menor o usar una herramienta informática (como Excel) para representar el tiempo frente al tamaño cuya gráfica es una parábola, siendo el vértice de la misma el punto que nos marca la hora del mediodía y la sombra al mediodía.

Veamos un ejemplo para asentar ideas:

Hora	Sombra(cm)	Altura solar
12:56	86	49,6
13:01	85	49,9
13:06	84,7	50,0
13:11	84,5	50,1
13:16	84,3	50,1
13:21	84	50,3
13:26	84,1	50,2
13:31	84,5	50,1
13:36	84,7	50,0
13:41	85,3	49,8
13:46	86,2	49,5
13:51	86,5	49,4

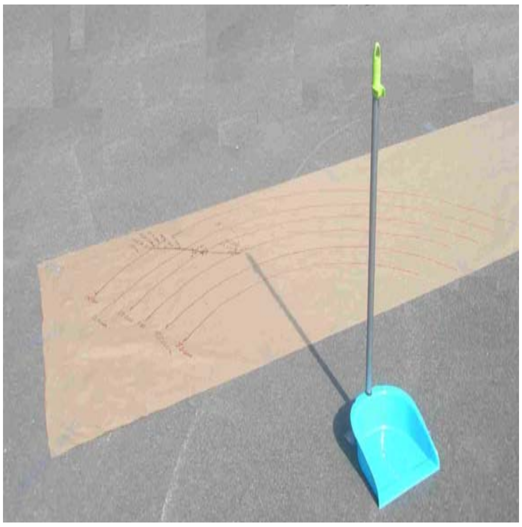


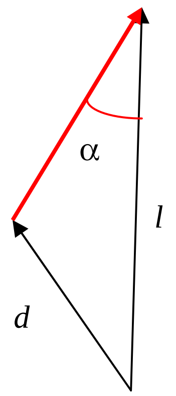
Recuerda que el vértice se calcula a partir de la expresión analítica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ siendo $V(x_0, y_o)$ con x_o=-— (hora del mediodía solar) e $y_o = f(x_0)$ (sombra del palo en el mediodía solar).

Sólo nos falta calcular el tamaño del palo (gnomon) y con el tamaño de la sombra calcular el ángulo que

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

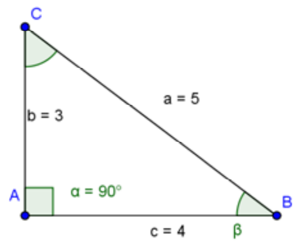
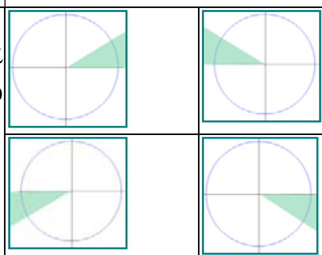
forma el sol con el palo (altura solar) a partir de la tangente.





Ya tienes el valor de tu ángulo, ahora a esperar que tus compañeros del otro instituto hayan hecho lo mismo. La diferencia entre estos dos ángulos debería ser la diferencia de latitud entre ambos centros. Utiliza algún programa informático como *sigpac* para ver la distancia (sólo en latitud) entre los dos centros y mediante una regla de tres y ¡ya tienes calculado la longitud de la circunferencia terrestre!

RESUMEN

		Ejemplos
Radián	Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por *rad*. Nº de radianes de un ángulo completo = 2π rad	90^o son $\pi/2$ rad
Razones trigonométricas de un ángulo agudo	$sen\ \alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$ $\cos \alpha = \frac{cateto \quad adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$ $tan \alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente} = \frac{b}{c}$	 $sen(\beta) = \frac{3}{5},\ \cos(\beta) = \frac{4}{5}$
Relaciones fundamentales	$(sen\ \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ $\tan \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$	$(sen\ 30^o)^2 + (\cos 30^o)^2 =$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
Otras razones trigonométricas	$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ $\sec \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$ $cotan\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha}$	*cosec* 90^o =1 sec 90^o No existe cotan 45^o=1
Reducción al primer cuadrante	Las razones trigonométricas de cualquier ángulo α pueden expresarse en función de las de un ángulo agudo β	
Reducción al primer cuadrante	2º CUADRANTE: $sen\ \alpha = sen\ \beta$ y $\cos \alpha = -\cos \beta$	$sen\ 135^o = sen\ 45^o$
	3er CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ y $\cos \alpha = -\cos \beta$	$sen\ 200^o = -sen\ 20^o$
	4º CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ y $\cos \alpha = \cos \beta$	$\cos(-60^o) = \cos 60^o$

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

Fórmulas de la suma	$sen(a+b)=sen(a)\cdot\cos(b)+\cos(a)\cdot sen(b)$ $\cos(a+b)=\cos(a)\cdot\cos(b)-sen(a)\cdot sen(b)$	sen(75) = sen(45) cos(30)+ cos(45)sen(30) = $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$
Fórmulas de la resta	$sen(a-b)=sen(a)\cdot\cos(b)-\cos(a)\cdot sen(b)$ $\cos(a-b)=\cos(a)\cdot\cos(b)+sen(a)\cdot sen(b)$	cos(15) = cos(45) cos(30)+ sen(45)sen(30) = $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$
Ángulo doble	$\begin{cases} sen(2a)=2\cdot sen(a)\cdot\cos(a) \\ \cos(2a)=\cos^2(a)-sen^2(a)\end{cases}$	cos(60) = $\cos^2(30)-sen^2(30)$ $=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
Ángulo mitad	$\begin{cases} sen\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}} \\ \cos\left(\frac{a}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}\end{cases}$	$sen(30)=\sqrt{\frac{1-\cos(60)}{2}}$ $=\sqrt{(1-0'5)/2}=\sqrt{0'25}=0'5$
Teorema del coseno	En un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ cualquiera: $a^2=b^2+c^2-2ab\cos\alpha$	Si b = 5, c = 6 y el ángulo entre ellos es 30 grados, el lado *a* es $a^2=5^2+6^2-60\cos 30$, es decir *a* = 3'01
Teorema del seno	En un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ cualquiera: $\frac{sen(\alpha)}{a}=\frac{sen(\beta)}{b}=\frac{sen(\gamma)}{b}$	Si b = 5 y a = 3,01 el ángulo α cumple $\frac{sen(\alpha)}{3'01}=\frac{sen(30)}{5}$ y da $\alpha=17'52^{o}$
Resolución general de triángulos	En general cualquier triángulo se puede resolver si conocemos tres de los seis datos (hay tres lados y tres ángulos). Se aplican los teoremas del seno y del coseno y que la suma de sus ángulos son 180 grados.	Si los datos originales son b=5, c = 6 y $\alpha=30$ el teorema del coseno nos da *a* = 3'01, el teorema del seno $\alpha=17'52^{o}$ y la suma da $\beta=132'48^{o}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ángulos y razones trigonométricas

1. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, halla las restantes razones trigonométricas del ángulo α. [Hay dos soluciones].

2. Calcula sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas

a) $sen(\alpha)$ = 0'2 (cuadrante II)

b) $cos(\alpha)$ = –0'3 (cuadrante III)

c) $tg(\alpha)$ = 2 (cuadrante I)

3. Sabiendo que $sen\alpha = -\frac{4}{5}$, y que α es un ángulo del tercer cuadrante, halla el coseno y la tangente de dicho ángulo.

4. Si $tgx = 1/3$, y x es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $tg(180º - x)$ b) $sen(180º + x)$ c) $cos(360º - x)$

5. Sabiendo que $sen\alpha = 0.5$, y que α es un ángulo del SEGUNDO cuadrante, halla las otras cinco razones de dicho ángulo.

Identidades y ecuaciones trigonométricas

6. Resuelve:

a) $3sen^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$ b. $tgx = \sqrt{2}\cos x$

7. Demuestra las siguientes identidades:

a) $(tg\ x)(\cos x) = sen(x)$

b) $\cot g^2 x - 1 = \frac{\cos(2x)}{sen^2 x}$

c) $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$

d) $1 + \cos(2x) = \frac{2}{1 + tg^2 x}$

e) $\cos ec^2 x = 1 + \cot g^2 x$

f) $\frac{\cos x + senx}{\cos x - senx} \cdot \cos 2x = 1 + sen2x$

8. Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $sena \cdot sen(a-b) + \cos a \cdot \cos(a-b) = \cos b$

b) $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos 2\alpha - 3sen\,\alpha + 1 = 0$

b) $sen\alpha + \cos\alpha = 0$

10. Di si son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{1+tg^2 x}{1+\cot g^2 x}=tg^2 x$ b) $\dfrac{sen(2x)}{1+\cos(2x)}=tg(x)$

11. Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{2senx}{tg2x}=\cos x-\dfrac{sen^2 x}{\cos x}$ b) $\dfrac{1-sen^4 x}{\cos^2 x}=2-\cos^2 x$

12. Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{1+tg^2(\alpha)}{1+\cot g^2(\alpha)}=tg^2(\alpha)$ c) $\dfrac{\cos^2(\alpha)}{1+sen(\alpha)}=1-sen(\alpha)$

b) $sec^2(x) + cosec^2(x) = sec^2(x)\cdot cosec^2(x)$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos x\cdot\cos 2x+2\cos^2 x=0$ b) $tgx-sen2x=0$

14. Demuestra que son ciertas las igualdades:

a) $\cos(\alpha-\beta)-(sen\beta)(tg\alpha)(\cos\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{\sec\beta}$ b) $sen(270-\alpha)+\cos(\alpha)=0$

15. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos(2\alpha)+1=4\cos\alpha$ (dando TODAS las soluciones posibles).

16. Resuelve la ecuación trigonométrica $\dfrac{sen(2x)}{tgx}+\cos^2 x=1$ dando TODAS las soluciones posibles.

17. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos(2x)+\cos(x)=0'2$ dando TODAS las soluciones posibles.

18. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $sen^2(x) - sen(x) = 0$

b) $cos(x) + sen^2(x) = 1$

c) $3tg^2(x) = sec^2(x)$

d) $sen(2x) = 0'5$

19. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x+sen^2 y=2 \\ x+\cos^2 y=1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} sen(x)\cdot\cos(y)=\dfrac{3}{4} \\ \cos(x)\cdot sen(y)=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \cos(x)+\cos(y)=1 \\ \cos(x+y)=1 \end{array}\right\}$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $sen\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $sen(3x)-sen(30^{o})=0$

c) $sen(2x)=2\cdot\cos(x)$

21. Simplifica las siguientes expresiones

a) $(sen(x)+cos(x))^2+(sen(x)-cos(x))^2$

b) $\frac{sen^3(x)+sen(x)\cdot\cos^2(x)}{sen(x)}$

c) $\frac{sen(x-y)-sen(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}$

d) $\frac{sen(2a)\cdot\cos(a)}{sen(a)\cdot(1+\cos 2a)}$

e) $\frac{tg(a)}{tg(2a)-tg(a)}$

Problemas de resolución de triángulos

22. Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables, que forman con la antena ángulos de 36º y 48º. Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 98 metros. Calcula la altura de la antena.

23. Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC, rectángulo en A, del que conocemos el cateto AC=15cm. y la altura relativa a la hipotenusa AD = 12cm.

24. Calcular el área de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de 35 cm de perímetro. Calcular el radio de la circunferencia inscrita.

25. En un tramo de carretera la inclinación es del 5 % (sube 5 m en 100 m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100 m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?

26. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?

27. En un triángulo conocemos dos de sus ángulos y un lado: A = 55º, B = 98º, a = 7'5 cm. Resuélvelo.

28. En un triángulo conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos A = 35º, b = 20 cm, c = 14 cm. Resuélvelo.

29. Halla los ángulos de un triángulo del que se conocen los tres lados: a = 37 cm, b = 42 cm, c = 68 cm.

30. Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127º. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km. ¿Podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde? (nudo=milla/hora; milla=1850 m).

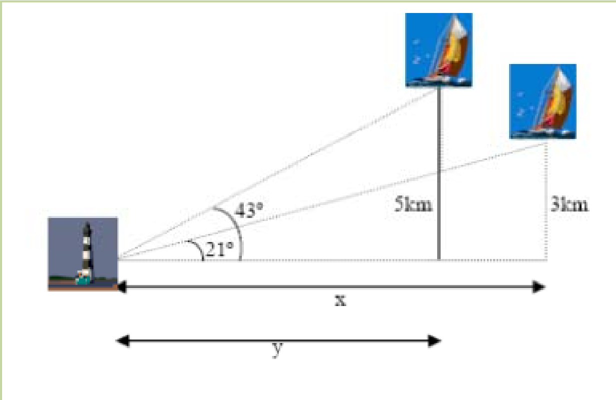
31. Dos amigos están en una playa a 150 m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50º y el otro con un ángulo de 38º. ¿Qué distancia hay desde cada uno de ellos a la cometa?

32. Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 70 metros. El cable más corto mide 90 metros y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 42º. Calcula:

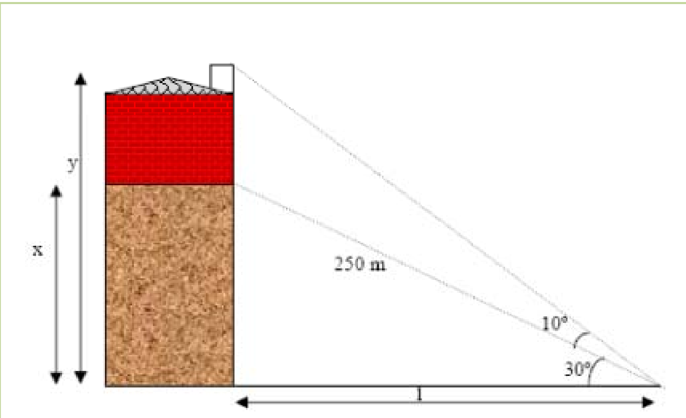
a) La medida del otro cable.

b) La distancia del globo al suelo.

33. Desde un faro F se ve un barco A con ángulo de 43º con la costa, y el barco B con 21º. El barco B está a 3km de la costa y el A a 5km. Calcula distancia entre los barcos.



34. Una finca tiene forma triangular. Dos de sus lados miden 140 m y 200 m respectivamente, y el ángulo comprendido entre ambos es de 35º. Calcula el perímetro y la superficie de la finca.



35. Calcula el área y el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.

36. Calcula la altura del edificio:

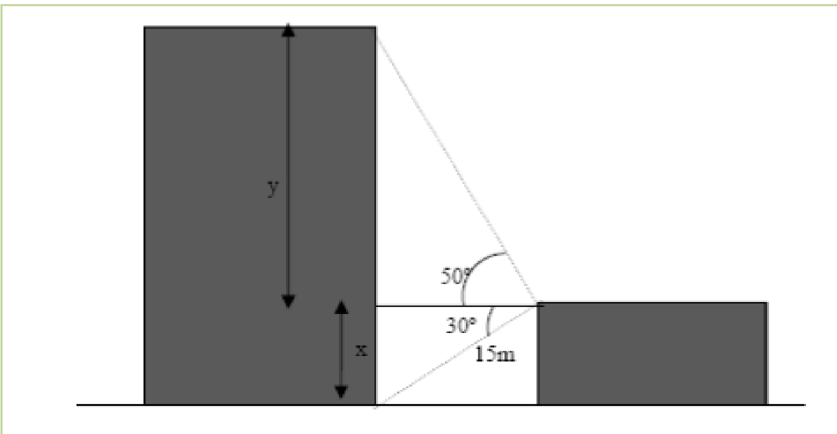
37. Dos personas A y B distan entre sí 200m y ven un globo que está situado entre ambas. La primera persona lo ve con un ángulo de 30º y la segunda con un ángulo de 60º.

a) ¿A qué distancia está B del globo?

b) ¿A qué altura está el globo?

c) Una persona que esté situada dentro del globo ¿Con qué ángulo ve a A y B?

38. Calcula la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo.



39. Deseamos medir la altura de un edificio. Si lo observamos desde un punto A lo vemos con un ángulo de 50º. Ahora bien, si lo contemplamos desde 20m más lejos el ángulo es de 40º. ¿Cuál es la altura del edificio? ¿A qué distancia está el punto B de dicho edificio?

40. Calcula todos los ángulos de un triángulo de lados 4,5 y 6. ¿Hay más de una solución? Si hay más de una, calcúlalas todas, si hay una sola, explica por qué.

41. Justifica que hay EXACTAMENTE DOS triángulos con lados a = 4, b=5 y ángulo α (el opuesto al lado a) igual a 45º.

42. Resuelve los siguientes triángulos

a) α =45º, b=50m, a=40m

b) β =30º, a=5cm, b=3cm

c) α =45º, γ =60º, b=20m

d) γ =45º , b=10m, c=6m

e) a=5cm, b=4cm, c=4cm

43. Comenzamos en una ciudad A y observamos un cartel. La ciudad B está a 50 Km y la ciudad C a 40 Km. Medimos el ángulo que forman las dos carreteras y resulta ser de 60º.

a) ¿A qué distancia está B de C?

b) Desde la ciudad B ¿Con qué ángulo se ven las otras dos ciudades? [En otras palabras: si consideramos el triángulo ABC ¿cuánto vale el ángulo β que corresponde al vértice B?]

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula las siguientes razones trigonométricas sin hacer uso de la calculadora.

a. $sen(-750^{o})$

b. $tg(570^{o})$

c. $cos(20\pi/3)$

2. A partir de las razones trigonométricas de la suma calcula las siguientes razones trigonométricas:

a. $sen(105^{o})$

b. $cos(75^{o})$

3. Sea un triángulo del que conocemos los siguientes datos a = 10cm, b = 20cm, $\hat{A}$ = 30º**.** Calcula los demás datos del triángulo. Calcula el área del triángulo

4. Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60^{o} En la misma dirección pero formando un ángulo de 30^{o} vuela una perdiz a 100 m de altura. Si el buitre quiere comerse la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150 m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están?

5. Calcula sin utilizar la calculadora el resto de razones trigonométricas (seno, coseno) de α, sabiendo que $tg(\alpha) = 1/2$ y $\alpha \in 3^{er}$ cuadrante.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones

a. $6\cdot cos^{2}(x/2) + cos(x) = 1$ b. $sen(x) + cos(x) = \sqrt{2}$

7. Resuelve los siguientes sistemas:

a. $$\begin{cases} sen(x) + sen(y) = 1 \\ x + y = \pi \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} sen(x) + sen(y) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen(x) - sen(y) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ sen(x) + sen(y) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

8. Demuestra las siguientes igualdades:

a) $cos(x+y+z) = cos(x)\cdot cos(y)\cdot cos(z) - cos(x)\cdot sen(y)\cdot sen(z) - sen(x)\cdot cos(y)\cdot sen(z) - sen(x)\cdot sen(y)\cdot cos(z)$

b) $\dfrac{sen^{2}(2a)}{(1-\cos^{2} a)\cdot \cos(a)} = 4\cdot \cos(a)$

9. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de radio. Calcula su área

10. En las señales de tráfico que indican la pendiente de la carretera la información que nos dan es el porcentaje de subida en función del avance del coche. Calcula el ángulo para una pendiente del 15 %.

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF