TEMA 10 – DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA. LA BINOMIAL

10.1 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES

10.1.1 - SUCESOS ALEATORIOS

Suceso aleatorio es el que depende del azar.

Frecuencia relativa de un suceso, **S,** es la proporción de veces que ocurre.

$$f_r(S) = \frac{\text{nº de veces que ocurre S}}{\text{nº de observaciones realizadas}} = \frac{f(S)}{N}$$

10.1.2 - PROBABILIDAD

Se llama **probabilidad** de un suceso S al límite de fr(S) cuando el número N de observaciones tiende a infinito.

$$P(S) = \lim_{N \to \infty} fr(S)$$

Esta es una definición teórica que no permite obtener el valor de P(S). En la práctica se procede de una de estas dos formas:

- Si la experiencia es irregular: Experimentando un número de veces suficientemente grande, N, y tomando como valor aproximado de P(S) el de fr(S). La asignación será tanto más fiable cuando mayor sea N.
- Si la experiencia es regular: Podemos suponer que todos los “sucesos elementales” tienen la misma probabilidad (son equiprobables). En tal caso, la probabilidad de un suceso S se halla mediante la llamada Ley de Laplace:

$$P(S) = \frac{\text{Número de casos favorables a S}}{\text{Número de casos posibles}}$$

- Existen experiencias regulares que, para que sean correctamente interpretadas, es necesario considerarlas compuestas de otras. (Hacer la tabla y después aplicar la Ley de Laplace)

10.1.3 - EXPERIENCIAS COMPUESTAS

En las experiencias compuestas por sucesivas extracciones pueden darse dos modalidades:

- **Extracciones con reemplazamiento**: son aquellas en las que, después de cada extracción, el elemento extraído se repone. De este modo, *cada extracción se realiza en las mismas condiciones que la anterior.*
- **Extracciones sin reemplazamiento**: las sucesivas extracciones se realizan sin devolver el elemento anteriormente extraído. *Las condiciones de cada extracción son distintas y dependen de cuál o cuáles sean los elementos anteriormente extraídos.*

10.1.4 - EXPERIENCIAS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

Dos o más **experiencias** se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás. (Experiencias con reemplazamiento)

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Dos o más **experiencias** se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes (Experiencias sin reemplazamiento)

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

(P(B|A) = Probabilidad condicionada = Probabilidad de que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A)

10.3 – PARÁMETROS EN DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA

Puesto que las distribuciones de probabilidad son idealizaciones de las distribuciones estadísticas, empezaremos recordando cómo son los parámetros en estas para que nos sirva de referencia. Puesto que la probabilidad es una idealización de la frecuencia relativa, expresaremos los parámetros en función de ellas.

PARÁMETROS EN UNA DISTRIBUCIÓN ESTADÍSTICA

$$\text{Media}: \ \bar{x} = \frac{\sum x_i.f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x_i.f_i}{N} = \sum \frac{f_i}{N}.x_i$$

$$\text{Varianza}: \ s^2 = \frac{\sum x_i^2.f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2.f_i}{N} - \bar{x}^2 = \sum \frac{f_i}{N}.x_i^2 - \bar{x}^2$$

$$\text{Desviación típica}: \ s = \sqrt{\text{Varianza}}$$

PARÁMETROS DE UNA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Las probabilidades, p_i, son idealizaciones de las frecuencias relativas, $\frac{f_i}{N}$.

Por tanto, los parámetros se definen del siguiente modo:

- Media : $\mu = \sum p_i.x_i$
- Varianza : $\sigma^2 = \sum p_i.x_i^2 - \mu^2$
- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{Varianza}}$

Nota: Cuando se utilizan distribuciones estadísticas (empíricas) y distribuciones de probabilidad (teóricas), los parámetros de las primeras se designan mediante letras latinas ($\bar{x}$ o *m*, *s*) mientras que los parámetros de las segundas se designan mediante letras griegas (μ, σ)

Nota: La suma de todas las probabilidades debe dar 1 $\Rightarrow \sum p_i = 1$

GRÁFICOS: Diagramas de barras

10.4 – LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL. DESCRIPCIÓN

Experiencia dicotómica: Si en una experiencia aleatoria destacamos un suceso A y prestamos atención, exclusivamente, a si ocurre A o su contrario A’ se trata de una experiencia dicotómica. Al suceso A se le llama **éxito** y a su probabilidad P(A) = p. La probabilidad de su contrario es P(A’) = 1 – p = q

Distribución binomial: Se repite n veces una experiencia dicotómica. Nos preguntamos por el número , x, de éxitos. La variable x es discreta, pues puede tomar los valores 0, 1, 2, ..., n. La distribución de probabilidad de la variable x se llama distribución binominal B(n,p) donde p = P(A) es la probabilidad de éxito en cada una de las experiencias y n es el número de veces que se repite la experiencia.

Probabilidad : Si x es una variable que sigue una distribución B(n,p), la probabilidad P(x=k) de obtener k éxitos es : $P(x = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$

Los parámetros de esta distribución son: Media : $\mu = np$

Desviación típica : $\sigma = \sqrt{npq}$

10.5 – AJUSTE DE UN CONJUNTO DE DATOS A UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Disponemos de una serie de observaciones relativas a n individuos. En cada observación contamos el número, k, de ellos que cumplen una determinada condición. En definitiva, tenemos una tabla de frecuencias cuya variable toma los valores 0, 1, ..., n

Para estudiar si esa serie de datos obtenidos experimentalmente puede provenir de una distribución binomial B(n,p), procedemos del siguiente modo:

- Calculamos la media $\bar{x}$ de los datos y la igualamos a la media $\mu = np$ de la teórica binomial. Así obtenemos el valor de p.
- Comparamos la distribución empírica con la teórica. Para ello:
  - Hallamos las probabilidades P[x = k] para k = 0, 1, ..., n en la B(n,p) y las multiplicamos por n para averiguar cómo se repartirían los n individuos en la distribución teórica.
  - Para cada valor de k, hallamos la diferencia entre el valor empírico y el teórico.
  - Según que la mayor de las diferencias sea suficientemente pequeña o no, aceptamos o rechazamos la hipótesis de que los datos provienen de una binomial.