TEMA 10 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES

10.1 – EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS

EXPERIENCIAS DETERMINISTAS Y ALEATORIAS

Se llama **experiencia determinista** a aquella que conocemos el resultado antes de realizar el experimento: lanzamos una piedra y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc.

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella cuyo resultado depende del azar: lanzar un dado, extraer una carta de una baraja, sacar bolas de una urna,...

SUCESO ALEATORIO

Suceso aleatorio es un acontecimiento que ocurrirá o no dependiendo del azar.

ESPACIO MUESTRAL

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, y se designa con la letra **E**.

Por ejemplo: *En un dado* $\rightarrow E = \{1,2,3,4,5,6\}$
En una moneda $\rightarrow E = \{C,+\}$

SUCESOS

Se llama **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Los elementos de E se llaman **sucesos individuales** o **sucesos elementales**

También son sucesos el suceso vacío o **suceso imposible**, $\varnothing$, y el propio E, **suceso seguro.**

Al conjunto de todos los sucesos de una experiencia aleatoria lo llamaremos S.

Si E tiene un número finito, n, de elementos, el número de sucesos de E es 2^n.

OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B, se llama

Unión: $A \cup B$ (se lee "A unión B") es el suceso formado por todos los elementos de A y de B

El suceso $A \cup B$ se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos.

Intersección: $A \cap B$ (se lee "A intersección B") es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y de B.

El suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

Diferencia: $A - B$ (se lee "A menos B") es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

El suceso $A - B$ se verifica cuando lo hace A y no B

Complementario: El suceso $A' = A^c = \overline{A} = E - A$ se llama suceso contrario o complementario de A.

El suceso A' se verifica siempre cuando no se verifique A.

Sucesos incompatibles: Dos sucesos, A y B, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando $A \cap B = \varnothing$

Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS

Distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

De simplificación:

$$A \cup (B \cap A) = A$$
$$A \cap (B \cup A) = A$$

Con el complementario:

$$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$$
$$A - B = A \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

10.2 – FRECUENCIA Y PROBABILIDAD

FRECUENCIA ABSOLUTA Y FRECUENCIA RELATIVA

Realizamos N veces una experiencia aleatoria.

Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso S o, simplemente, frecuencia de S, al número de veces que ocurre S. Se designa por f(S).

Se llama **frecuencia relativa** de un suceso S a la proporción de veces que ocurre S. Se designa por fr(S): $fr(S) = \frac{f(S)}{N}$

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Al realizar reiteradamente una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de un cierto suceso, fr(S), va tomando distintos valores. Estos valores al principio sufren grandes oscilaciones pero, poco a poco, se van estabilizando (oscilan cada vez menos). Cuando N crece mucho, se aproximan a un cierto valor que es la probabilidad de S, P(S)

$$\lim_{N\to\infty} fr(S) = P(S) \quad \text{LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS}$$

PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES

Axiomáticas: Inspiradas en las propias de la frecuencia relativa

Las propiedades de cada suceso es un número. Se han de cumplir los siguientes axiomas:

Ax.1 : Cualquiera que sea el suceso S, $P(S) \geq 0$
Ax.2 : Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades. $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Ax.3 : La probabilidad total es 1: $P(E) = 1$

En esencia, estas tres propiedades indican que disponemos de una cantidad total de probabilidad igual a 1 que hemos de repartir aditivamente entre los distintos sucesos.

Teoremas: Se deducen de las propiedades axiomáticas

T.1 : $P(A') = 1 - P(A)$
T.2 : $P(\emptyset) = 0$
T.3 : Si $A \subset B$, entonces $P(B) = P(A) + P(B-A)$
T.4 : Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
T.5 : Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son incompatibles dos a dos, entonces:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$$
T.6 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
T.7 : Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, entonces:
$$P(S) = P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_k)$$

10.3 – LEY DE LAPLACE

La propiedades **T.7** permite calcular la probabilidad de un suceso S conociendo las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Pero si el espacio muestral consta de n sucesos elementales equiprobables (todos ellos con la misma probabilidad 1/n), entonces la probabilidad de S sólo depende del número de sucesos elementales que lo componen: $P(S) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}$

LEY DE LAPLACE

Si $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y $P(x_1) = P(x_2) = ... = P(x_n)$, entonces

$$P(s) = \frac{\text{número\_de\_elementos\_de\_S}}{n} = \frac{\text{Número\_de\_"casos\_favorables"\_a\_S}}{\text{número\_de\_"casos\_posibles"}}$$

Se dice que un suceso aleatorio es de Laplace cuando la probabilidad de todos sus sucesos elementales (casos) es la misma. Por ejemplo: un dado correcto, una moneda, una baraja,....

CASOS EN LOS QUE NO SE PUEDE APLICAR LA LEY DE LAPLACE

La ley de Laplace se puede aplicar **cuando todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad**.
Pero hay muchos casos en que esto no ocurre. Por ejemplo:

- **Instrumentos irregulares** : Dados trucados, una chincheta... Para evaluar la probabilidad de estos sucesos se recurre a la ley de los grandes números. P(S) = fr(S). Cuanto mayor sea la N más fiable será la estimación.
- **Instrumentos regulares, pero sucesos elementales no equiprobables :** Por ejemplo lanzamos dos dados correctos y sumamos sus resultados. Para calcular su probabilidad recurrimos a técnicas de recuento y modificamos la descripción de la experiencia de modo que los sucesos elementales sean equiprobables.

10.4 – PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos, A y B, se llama **probabilidad de B condicionada a A**, y se designa por P(B/A) a $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ y mide la proporción de veces que ocurre B de entre las que ocurre A.

De la expresión anterior se deduce que $P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$

SUCESOS INDEPENDIENTES

Dos sucesos, A y B, se dice que son independientes cuando:

$$P(A/B) = P(A) \text{ y } P(B/A) = P(B)$$

Cuando dos sucesos son independientes la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades: A y B independientes $\rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$

TABLAS DE CONTINGENCIA

Tablas que ayudan al estudio de probabilidades.

10.5 – PRUEBAS COMPUESTAS

Se llaman **pruebas compuestas** a aquellas experiencias en las que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas. En ellas, el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos se simplifica mucho calculando las probabilidades de sus componentes.

Dos pruebas compuestas son **independientes** cuando el resultado de una no influye en la otra. Si no es así, se llaman **dependientes.**

EXPERIENCIAS INDEPENDIENTES

Se dice que **dos o más pruebas son independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no influye en las probabilidades de los distintos resultados de las otras. Por tanto, los sucesos correspondientes a la primera son independientes de los sucesos correspondientes a la segunda.

Si n pruebas son independientes y los sucesos S_1, S_2, ..., S_n corresponden, respectivamente, a cada una de ellas se cumple que:
$P(S_1 \text{ en la } 1^a \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^a \text{ y ..... } S_n \text{ en la n-ésima}) = P(S_1).P(S_2).....P(S_n)$

EXPERIENCIAS DEPENDIENTES

Dos experiencias son **dependientes** cuando el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda. Las probabilidades de sucesos compuestos se obtienen así:
$P(S_1 \text{ en la } 1^a \text{ y } S_2 \text{ en la } 2^a) = P(S_1 \text{ en la } 1^a).P(S_2 \text{ en la } 2^a \text{ supuesto que ocurrió } S_1 \text{ en la } 1^a)$

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1).P(S_2/S_1)$$

Si se encadenan más de dos experiencias dependientes, las probabilidades de los sucesos compuestos se obtienen análogamente:

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1).P(S_2/S_1).P(S_3/S_1 \cap S_2)$$

10.6 – PROBABILIDAD TOTAL

Tenemos n sucesos A_1, A_2, ..., A_n, incompatibles dos a dos y tales que $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = E$. Entonces, para cualquier suceso S se cumple que:

$$P(S) = P(A_1).P(S/A_1) + P(A_2).P(S/A_2) + ... + P(A_n).P(S/A_n)$$

A la probabilidad P(S) descompuesta de este modo se la llama **probabilidad total.**

DIAGRAMAS DE ÁRBOL : Esquema para el cálculo de la probabilidad total.

10.7 – PROBABILIDADES “A POSTERIORI”. FÓRMULA DE BAYES

$$P(Ai/S) = \frac{P(A_i).P(S/A_i)}{P(A_n).P(S/A_n) + ... + P(A_n).P(S/A_n)}$$