Unidad 1 – Matrices

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula a, b, c y d para que se cumpla $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3A + 5B - 6C$ d) $AB - BC$ e) $2AB + 3AC - 5BC$

3. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA.

4. Calcula los productos posibles entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?:

   a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

6. Obtén las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

   a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

7. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

   a) $C \cdot A^t$ b) $A^t \cdot B^t$ c) $2 \cdot C^t \cdot C$ d) $B \cdot A \cdot C^t$

9. Descompón en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica las matrices siguientes:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{97} y B^{59}.

11. Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

1. Realizando las operaciones indicadas y aplicando la igualdad de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & a+b+7 \\ c+d-2 & 3d+4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = a+5 \\ 2b = a+b+7 \\ 2c = c+d-2 \\ 2d = 3d+4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $a=5$, $b=12$, $c=-6$, $d=-4$.

2. La solución en cada caso queda:

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A - B - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} -6 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$

d) $AB - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & +2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

e) $2AB + 3AC - 5BC =$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & +2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} -$

$- 5\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -18 & 27 \end{pmatrix} -$

$- \begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 25 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -39 \\ -49 & 55 \end{pmatrix}$

3. Los productos quedan:

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$

4. Los productos posibles son:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

5. En general, las igualdades anteriores no son ciertas, ya que el producto de matrices no es conmutativo.

   a) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = AA + AB + BA + BB =$
   $= A^2 + AB + BA + B^2$

   b) $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = AA - AB - BA + BB =$
   $= A^2 - AB - BA + B^2$

   c) $(A + B)(A - B) = AA - AB + BA - BB =$
   $= A^2 - AB + BA - B^2$

6. Llamamos A y B a las matrices numéricas que aparecen en cada uno de los sistemas. Resolvemos éstos por el método de reducción y obtenemos:

a) $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X - 3Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ 7Y = A - 2B \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 3/7\,A + 1/7\,B \\ Y = 1/7\,A - 2/7\,B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1/2\,A + 1/2\,B \\ Y = 1/2\,A - 1/2\,B \end{cases} \Leftrightarrow$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X + 2Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ Y = 1/3\,A + 2/3\,B \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 2/3\,A - 1/3\,B \\ Y = -1/3A + 2/3B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$

7. En cada uno de los casos queda:

Operando en la igualdad

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases}$$

La solución del sistema es $c=0$, $a=d$ y b cualquiera.

Por tanto, las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con a y b números reales cualesquiera.

De una forma análoga obtenemos que las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} d-c & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$

8. Las operaciones quedan:

a) $C \cdot A^t = \begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 6 \\ 12 & 6 & 18 \end{pmatrix}$

d) $B \cdot A \cdot C^t = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

9. Toda matriz cuadrada A puede expresarse de la forma $A = \dfrac{A+A^t}{2} + \dfrac{A-A^t}{2}$.

En la suma anterior, el sumando $\dfrac{A+A^t}{2}$ es una matriz simétrica y el sumando $\dfrac{A-A^t}{2}$ es una matriz antisimétrica.

Las descomposiciones pedidas son:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 3/2 & 7/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -7/2 \\ 1/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 9/2 \\ 1/2 & 0 & 5 & 9/2 \\ 0 & 5 & 7 & 9/2 \\ 9/2 & 9/2 & 9/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & 5/2 \\ -3 & -1 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -5/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$

10. En cada uno de los dos casos queda del siguiente modo:

Calculamos las potencias sucesivas de A y B.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$

$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I;$ etcétera.

Observamos que las potencias de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:

$A^{97} = A^{4\cdot 24+1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Calculando las sucesivas potencias de $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos que:

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos continuar y observar que las potencias pares siguen una recurrencia y las impares otra. Es decir:

Si n es par $B^n = \begin{pmatrix} 2^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$ y si n es impar $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 2^{\frac{n+1}{2}} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto $B^{59} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{30} \\ 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$

11. Quedan del siguiente modo:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) Si $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$,

entonces $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\text{sen } n\alpha \\ \text{sen } n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2+n/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

PÁGINA 29

12. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

13. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

15. Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

16. Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

17. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

18. a) Escribe tres matrices de dimensión 3×4, que tengan, respectivamente, rango 2, 1 y 4. Razona la respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4, que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

19. Si A es una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?

20. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A^{-1} = B$ entonces $A^2 = A$.

b) Si A es una matriz que conmuta con B y C, ¿es cierto que $(B \cdot C) \cdot A = A \cdot (B \cdot C)$?

21. Contesta las siguientes preguntas:

a) Dada una matriz A, ¿existe otra matriz B tal que el producto AB sea una matriz de una sola fila?

b) Sea A una matriz cuadrada, demuestra que $A + A^t$ es simétrica.

c) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

22. Sean X, Y, Z tres matrices tales que es posible efectuar $Z^t - XY$. ¿Es posible efectuar $(Y \cdot Z)^t + X^t$?

12. Las triangulares equivalentes son:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_1 + F_3 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3}$

$\xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_1 - F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3}$

$\xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 + F_3 \to F_3 \\ 3F_1 - F_4 \to F_4}]{2F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_4 - F_2 \to F_4]{F_2 - F_3 \to F_3}$

13. Las inversas quedan del siguiente modo:

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 4 & 8 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 4 & -1 \end{pmatrix}$ No existe matriz inversa

d) $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & \vdots & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & \vdots & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

14. Queda:

La matriz (AB) es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz traspuesta de la anterior $(AB)^t$ es $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de la anterior $(AB)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -1/14 & 1/2 \\ 3/14 & -1/2 \end{pmatrix}$

15. Queda:

La matriz B^{-1} es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz A^2 es $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}A^2$ es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & -45 \\ -27 & 36 \end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}A^2 B$ es $\begin{pmatrix} 36 & -45 \\ -27 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

16. Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes.

a) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$

b) Rango de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

d) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix} =$

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 5 & 15 & 23 & 18 \end{pmatrix} =$

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix} = 3.$

17. Queda del siguiente modo:

a) Rango de $\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a-2 & a+2 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a-6 \end{pmatrix}$

Si $a = 6$ el rango es 1 y si $a \neq 6$ el rango es 2.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & a-4 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$

Si $a = 4$, el rango es 2 y si $a \neq 4$, el rango es 3.

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 2a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$

- Si $a = 1$, el rango es 1.
- Si $a = -2$, el rango es 2.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, el rango es 3.

18. Quedan:

a) La matrices de dimensión 3×4,

- con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

- con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- con rango 4 no es posible construirla.

b) Como en el apartado anterior, admite múltiples respuestas. Un ejemplo podría ser:

- con rango 1: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \\ 10 & -10 & 20 & -30 \end{pmatrix}$

- con rango 2: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$

- con rango 3: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

- con rango 4: $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

19. La solución queda:

Se tiene que:

$B^2 = B \cdot B = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A \cdot A - 2A \cdot I - 2A \cdot I +$
$+ I^2 = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A - 4A + I = I$

Por tanto la matriz B^2 es la matriz unidad. Las matrices como B se denominan idempotentes.

20. Quedan:

a) Se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$\underset{(1)}{A^2}=A\cdot A\underset{(2)}{=}(A\cdot B)\cdot A\underset{(3)}{=}A\cdot(B\cdot A^{-1})A\underset{(4)}{=}A\cdot B\cdot A^{-1}\cdot A\underset{(5)}{=}AB\underset{(6)}{=}A$$

ya que:

(1) Es la definición de potencia cuadrado de una matriz.

(2) Por la hipótesis $A \cdot B = A$.

(3) Por la hipótesis $BA^{-1} = B$.

(4) Por la propiedad asociativa del producto.

(5) Al ser $A \cdot A^{-1} = I$.

(6) Por la hipótesis $AB = A$.

b) Se cumple:

$$(B\cdot C)\cdot A\underset{(1)}{=}B\cdot(C\cdot A)\underset{(2)}{=}B\cdot(A\cdot C)\underset{(3)}{=}(B\cdot A)\cdot C\underset{(4)}{=}(A\cdot B)\cdot C\underset{(5)}{=}A\cdot(B\cdot C)$$

al ser:

(1); (3) y (5) Por la propiedad asociativa del producto de matrices.

(2) Las matrices A y C conmutan.

(3) Las matrices A y B conmutan.

21. Las respuestas quedan:

a) En el caso de que la matriz A tenga una dimensión $m\times n$, con $m\neq 1$, es imposible encontrar la matriz B cumpliendo las condiciones pedidas. En el caso de que la matriz A tenga dimensión $1\times n$, la matriz B tendrá dimensión $n\times m$ y la matriz resultante será la matriz fila $1\times m$.

b) $(A+A^t)^t=A^t+(A^t)^t=A^t+A$ por tanto la matriz $(A+A^t)$ es simétrica pues coincide con su traspuesta.

c) Una matriz A es antisimétrica si $A^t=-A$.

Veamos cómo son las potencias sucesivas:

$(A^2)^t=(A\cdot A)^t=A^t\cdot A^t=(-A)\cdot(-A)=A^2$, luego A^2 es simétrica.

$(A^3)^t=(A^2\cdot A)^t=A^t\cdot(A^2)^t=(-A)\cdot A^2=-A^3$, luego A^3 es antisimétrica.

Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

22. Sean *X*, *Z*, *Y* tres matrices de dimensiones $m\times n$, $p\times q$ y $r\times s$, respectivamente.

Si es posible calcular *XZ* tiene que cumplirse que $n=p$ y la dimensión del producto es $m\times q$.

La dimensión de Y^t, $s\times r$, debe coincidir con la de *XZ*, es decir, con $m\times q$; lo que implica que $s=m$ y $q=r$.

Con las condiciones anteriores, las dimensiones de las matrices anteriores son $m\times n$ para *X*, $q\times m$ para *Y* y $n\times q$ para *Z*.

Es posible calcular $ZY-X^t$ ya que se puede efectuar el producto *ZY* resultando de dimensión $n\times m$, dimensión que coincide con la de la matriz traspuesta de *X*.

PÁGINA 30

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

23. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

24. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

25. Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, construye la matriz $Y = 3A^tA - 2I$, y resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

28. Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si M es una matriz de la forma $M = aI + bJ$, siendo a y b números reales, se pide:

    a) Calcula M^2 y M^3.

    b) Calcula M^n, siendo n un número natural.

29. La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1}.

30. Si A y B son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que $A \cdot B = B \cdot A$. Halla todas las matrices diagonales A tales que $A \cdot A = I$.

31. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    a) Comprueba que $A^{-1} = A^t$.

    b) Utilizando el resultado anterior calcula $(A^t \cdot A)^{1999}$.

32. Estudia según los valores de m el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$.

33. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    a) ¿Para qué valores de x la matriz A posee inversa?

    b) Encuentra la matriz inversa de A para $x = -1$.

    c) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz X para que la ecuación $A \cdot X = B \cdot C$ tenga sentido? Halla esta matriz para $x = 1$.

23. La solución es:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b\,(a + d) \\ b\,(a + d) & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a + d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Los casos posibles son:

1. $b=0$, entonces $a=0$ ó $a=1$, y $d=0$ ó $d=1$. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $a=1-d$, entonces $b=\pm\sqrt{d-d^2}$ con $d\in[0,1]$. Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 1 - d & \pm\sqrt{d - d^2} \\ \pm\sqrt{d - d^2} & d \end{pmatrix} \text{ con } d \in [0, 1]$$

24. Queda del siguiente modo:

La matriz $A - kI$ es $A - kI = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$

La matriz $(A - kI)^2$ es

$$(A - kI)\,(A - kI) = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 - 1 & 2k - 2 & 4k - 4 \\ 2k - 2 & k^2 - 1 & 4k - 4 \\ -2k + 2 & -2k + 2 & 5 - 6k + k^2 \end{pmatrix}$$

El valor que hace que la última matriz sea la matriz nula es $k=1$.

25. Queda:

La matriz $A + A^t$ es

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz $(A + A^t)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

26. Queda del siguiente modo:

La matriz $Y = 3A^tA - 2I$ es

$$Y = 3\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 & 39 \\ 39 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}$$

Para resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, llamamos a $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, operamos y resolvemos el sistema correspondiente.

El sistema es $\begin{cases} 3a_{11} + a_{21} = 2 \\ 5a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 3a_{12} + a_{22} = 0 \\ 5a_{12} + 2a_{22} = 1 \end{cases}$

Las soluciones son: $a_{11} = 4$, $a_{21} = -10$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 3$

La matriz X es: $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$.

27. Queda:

Calculamos $A^2 - A - 2I$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - I = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$.

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

28. La solución es:

La matriz $M = aI + bJ$ adopta la expresión $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$,

a) La potencias cuadrada y cúbica de M son:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

b) Para encontrar la expresión de M^n con n natural, calculamos nuevas potencias.

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, M^n con n natural tiene la expresión siguiente:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

La demostración de esta última proposición puede efectuarse por el método de inducción.

29. Calculamos la posible matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, obteniendo:

$$a)\ \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & b & a \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} & \frac{-ab}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

La matriz *M* siempre es invertible, ya que *a* y *b* no pueden ser 0 simultáneamente entonces $a^2+b^2\neq 0$.

La matriz inversa de *M* es:

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{-b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

30. Queda:

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$. Los productos de ambas son:

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}=BA$$

Sea $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ una matriz diagonal cualquiera. La condición $A\cdot A=I$ nos conduce al sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a_1^2 = 1 \\ a_2^2 = 1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a_1 = \pm 1 \\ a_2 = \pm 1 \end{cases}$$

Las matrices diagonales buscadas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

31. La solución queda:

a) Calculamos A^{-1} mediante el procedimiento de Gauss-Jordan. Para ello intercambiamos las filas primera y segunda y, posteriormente la segunda y la tercera para obtener:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

b) Teniendo en cuenta que $A^t=A^{-1}$ siguiendo la definición de matriz inversa obtenemos la siguiente expresión $A^t\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A^t=I$ y $(A^t\cdot A)^{1999}=(A^{-1}\cdot A)^{1999}=I^{1999}=I$.

32. La solución queda:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Por tanto, si $m=0$ el rango es 2 y para todos los demás valores de m el rango es 3.

33. En cada uno de los casos queda:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 4x-2-x^2$

La matriz A tiene inversa para todos los valores de x excepto aquellos que anulen el determinante de A, es decir, $\exists\ A^{-1} \quad \forall x \neq -2 \pm \sqrt{2}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) La matriz X ha de ser de dimensión 3x2. Despejando obtenemos: $X = A^{-1} \cdot B \cdot C$

Calculando la matriz A^{-1} para $x=1$ y sustituyendo obtenemos: $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$