# Unidad 1 – Matrices

## ACTIVIDADES FINALES

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula $a$, $b$, $c$ y $d$ para que se cumpla $2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

   a) $A + B$ b) $A - B - C$ c) $3A + 5B - 6C$ d) $AB - BC$ e) $2AB + 3AC - 5BC$

3. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $AB$ y $BA$.

4. Calcula los productos posibles entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Si $A$ y $B$ son dos matrices cuadradas de orden $n$, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?:

   a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

6. Obtén las matrices $X$ e $Y$ que verifiquen los siguientes sistemas matriciales:

   a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

7. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices siguientes:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, efectúa las siguientes operaciones:

   a) $C \cdot A^t$ b) $A^t \cdot B^t$ c) $2 \cdot C^t \cdot C$ d) $B \cdot A \cdot C^t$

9. Descompón en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica las matrices siguientes:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^{97}$ y $B^{59}$.

11. Calcula $A^n$, para $n \in N$, siendo $A$ las siguientes matrices:

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## PÁGINA 29

**12.** Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**13.** Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

**14.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

**15.** Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

**16.** Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

**17.** Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro $a$:

a) $\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

**18.** a) Escribe tres matrices de dimensión $3 \times 4$, que tengan, respectivamente, rango 2, 1 y 4. Razona la respuesta.

b) Escribe cuatro matrices de orden 4, que tengan, respectivamente, rango 1, 2, 3 y 4. Razona tu respuesta.

**19.** Si $A$ es una matriz cuadrada de orden $n$, tal que $A^2 = A$, e $I$ es la matriz unidad de orden $n$, ¿qué matriz es $B^2$, si $B = 2A - I$?

**20.** Responde a las siguientes cuestiones:

a) Demuestra que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A^{-1} = B$ entonces $A^2 = A$.

b) Si $A$ es una matriz que conmuta con $B$ y $C$, ¿es cierto que $(B \cdot C) \cdot A = A \cdot (B \cdot C)$?

**21.** Contesta las siguientes preguntas:

a) Dada una matriz $A$, ¿existe otra matriz $B$ tal que el producto $AB$ sea una matriz de una sola fila?

b) Sea $A$ una matriz cuadrada, demuestra que $A + A^t$ es simétrica.

c) Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica.

**22.** Sean $X$, $Y$, $Z$ tres matrices tales que es posible efectuar $Z^t - XY$. ¿Es posible efectuar $(Y \cdot Z)^t + X^t$?

## PÁGINA 30

# ACTIVIDADES FINALES

## ACCESO A LA UNIVERSIDAD

23. Halla las matrices simétricas de orden 2 tales que $A^2 = A$.

24. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina, si es posible, un valor de $k$ para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

25. Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, construye la matriz $Y = 3A^tA - 2I$, y resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula $A^{-1}$ utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

28. Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $M$ es una matriz de la forma $M = aI + bJ$, siendo $a$ y $b$ números reales, se pide:

    a) Calcula $M^2$ y $M^3$.

    b) Calcula $M^n$, siendo $n$ un número natural.

29. La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla $M^{-1}$.

30. Si $A$ y $B$ son dos matrices diagonales de orden 2, demuestra que $A \cdot B = B \cdot A$. Halla todas las matrices diagonales $A$ tales que $A \cdot A = I$.

31. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    a) Comprueba que $A^{-1} = A^t$.

    b) Utilizando el resultado anterior calcula $(A^t \cdot A)^{1999}$.

32. Estudia según los valores de $m$ el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 3 & 1 \\ 2 & m+1 & 5 & m+1 \end{pmatrix}$.

33. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    a) ¿Para qué valores de $x$ la matriz $A$ posee inversa?

    b) Encuentra la matriz inversa de $A$ para $x = -1$.

    c) ¿Qué dimensiones debe tener una matriz $X$ para que la ecuación $A \cdot X = B \cdot C$ tenga sentido? Halla esta matriz para $x = 1$.