Unidad 11 – Derivadas

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 5] para las funciones:

$$f(x) = 7 - 2x \qquad g(x) = 4x^2 - 3x + 5 \qquad k(x) = \frac{3x}{x^2+1} \qquad t(x) = \sqrt{x+4}$$

2. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = (2x-1)^2$; $D\,f(2)$ b) $f(x) = \sqrt{x+3}$; $f'(6)$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$; $D\,f(0)$

3. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en $x = 0$:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4. ¿Para qué valores de a y b cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 20x^2 + bx + a & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{x}{2\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

5. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 2x^3 + x$ en el origen de coordenadas.

6. Halla los puntos en los cuales la tangente a la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 30x - 6$ es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 5$.

7. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $xy^2 - 5y = 6$ en el punto (1, 6).

8. Dada la función $y = x^2 - 4x + 3$, encuentra un punto de su gráfica en el cual la recta tangente a ella sea paralela a la secante a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 4$.

9. Halla los valores de a y b para los cuales la recta tangente a la curva $y = x^2 + ax + b$ en el punto $P(3, 0)$ tenga de pendiente 2.

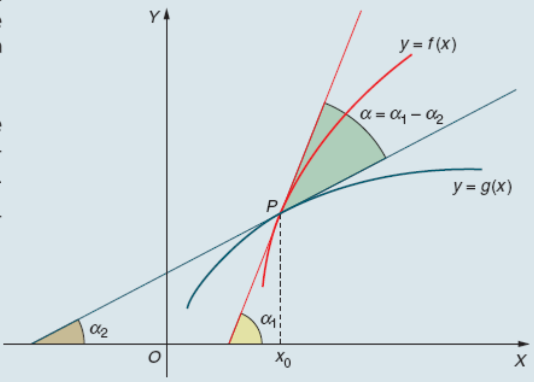
10. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = e^{3x}$ en un punto cualquiera $x = a$. Halla el valor de a para que dicha recta pase por el punto (exterior a la curva) $P(1, 0)$.

11. Llamamos ángulo de dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ que se cortan en un punto P de abscisa x_0 al menor de los ángulos α que forman sus respectivas tangentes en el punto P.

Halla el ángulo que forman los siguientes pares de curvas en todos sus puntos de corte:

a) $f(x) = x^2$
$g(x) = x + 2$

b) $f(x) = x^3 + x^2$
$g(x) = x + 1$



SOLUCIONES

1. La solución en cada caso es:

- $f(x) = 7 - 2x$

  $$tv_m[2,\ 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{-3 - 3}{3} = -2$$

- $g(x) = 4x^2 - 3x + 5$

  $$tv_m[2,\ 5] = \frac{g(5) - g(2)}{5 - 2} = \frac{90 - 15}{3} = 25$$

- $k(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

  $$tv_m[2,\ 5] = \frac{k(5) - k(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{15}{26} - \frac{6}{5}}{3} = -\frac{27}{130} \approx -0{,}21$$

- $t(x) = \sqrt{x + 4}$

  $$tv_m[2,\ 5] = \frac{t(5) - t(2)}{5 - 2} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{6}}{3} \approx 0{,}18$$

2. Las derivadas son:

a) $D[f(2)] = f'(2) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2(2 + h) - 1]^2 - 3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h^2 + 12h + 9 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4h + 12)}{h} = 12$$

b) $f'(6) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\sqrt{9+h} - 3}{h} = \frac{0}{0}$

$$\frac{0}{0} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{9 + h} - 3)(\sqrt{9 + h} + 3)}{h(\sqrt{9 + h} + 3)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{9 + h} + 3)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{9 + h} + 3} = \frac{1}{6}$$

c) $D[f(0)] = f'(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{2}{h^2+1} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h^2}{(h^2+1)h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h^2+1} = 0$$

3. En cada caso:

a)

- $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h-0}{h} = 1$

  $f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h-0}{h} = -1$

f(x) no es derivable en x = 0, pues las derivadas laterales son distintas.

b) $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1-1}{h} = 0$

$f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h^2+1-1}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\left(\frac{0}{0}\right) \lim\limits_{h\to 0^-} -h = 0$

$g(x)$ es derivable en $x = 0$.

c) $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} h - 0}{h} = 1$

$f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2-h^2}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h-1)}{h} = -1$$

4. El estudio queda:

a) Al ser la función continua en (0, 2) se cumple:

$$\lim_{h\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 1^-} (x^3 - 12x + 1) = \lim_{h\to 1^+} (20x^2 + bx + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10 = 20 + b + c \Leftrightarrow b + c = -30$$

La función es derivable en (0, 2), por tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3 - 12x + 1 - (-10)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{20x^2 + bx + c - (-10)}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9 = 40 + b \Leftrightarrow b = -49.$$

La solución del sistema: $b = -49$; $c = 19$

b) para que sea continua la función debe cumplirse:

$$\lim_{x\to 0^-} (x^2 + 2) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{ax + b} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{b} \Leftrightarrow b = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{ax + b} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2a + b} = \sqrt{2}$$

La solución del sistema: $a = -1$; $b = 4$

La función es derivable en cualquier punto salvo en x = 0.

En este punto las derivadas laterales no coinciden al ser: $f'(0^-) = 0; \quad f'(0^+) = -\frac{1}{4};$

En x = 2 la función es derivable puesto que

$$f'(2^-) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \quad \text{y} \quad f'(2^+) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{es decir } f'(2^-) = f'(2^+)$$

5. La solución es:

$f(x)=2x^3+x$

Recta tangente: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f'(x)=6x^2+1 \Rightarrow f'(0)=1$

$y-0=1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=x}$

Recta normal: $y-f(0)=\dfrac{-1}{f'(0)}\cdot(x-0)$

$y-0=-1\ (x-0) \Rightarrow \boxed{y=-x}$

6. La solución queda:

La pendiente de la recta $y=6x-5$ vale 6; por tanto, la pendiente de la recta tangente, al ser paralela a la anterior, también vale 6. Hemos de encontrar el punto $(x_0, f(x_0))$ en el cual $f'(x_0)=6$.

$$f'(x)=6x^2+6x-30 \Rightarrow f'(x_0)=6x_0^2+6x_0-30 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x_0^2+6x_0-30= 6 \Rightarrow 6x_0^2+6x_0-36=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0^2+x_0-6=0 \Rightarrow x_0=2;\ x_0=-3$$

Los puntos son: (2, - 38) y (- 3, 57).

7. La solución es:

Derivando obtenemos

$y^2+2xyy'-5y'=0$

$36+12m-5m=0$

$m=-\dfrac{36}{7}$

Recta tangente: $36x+7y-78=0$

8. La recta secante que pasa por los puntos (1, 0) y (4, 3) es $y = x+1$.

Su pendiente vale 1, luego la pendiente de la tangente vale 1 al ser rectas paralelas $\Rightarrow f'(x_0)=1$.

$$f'(x) = 2x-4 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0-4 \Rightarrow 2x_0-4 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2}$$

El punto pedido es $\left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}\right)$

9. La solución:

La grafica de la curva dada pasa por el punto $P(3,0) \Rightarrow 0 = 9+3a+b$.

Por otro lado, $f'(3) = 2 \Rightarrow$ como $f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(3) =$
$= 6 + a \Rightarrow 6 + a = 2 \Rightarrow a = -4$

Luego, $a = -4$ y $b = -9 - 3a = 3 \Rightarrow \boxed{a = -4 \text{ y } b = 3}$

10. Queda:

La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = e^{3x}$ en x = a es:

$$y - e^{3a} = 3e^{3a}(x-a)$$

Si esta recta pasa por el punto P(1, 0) se cumple:

$$-e^{3a} = 3e^{3a}(1-a) \Leftrightarrow -1 = 3(1-a) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = 1 - a \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

11. La solución en cada caso queda:

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = -1$

Los puntos de corte son (2, 4) y (–1, 1)

- Recta tangente a $f(x)$ en (2, 4).

  $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y-4 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x-4$

  Recta tangente a $g(x)$ en (2, 4)

$y - g(2) = g'(2)\,(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 1\,(x - 2) \Rightarrow y = x + 2$

$tg\ \alpha_1 = 4 \Rightarrow \alpha_1 = 75°\ 57'\ 50''$

$tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$

El ángulo que forman las curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el punto (2, 4) vale: $\alpha_1 - \alpha_2 = 30°\ 57'\ 50''$

- Recta tangente a $f(x)$ en (–1, 1)

$$y - f(-1) = f'(-1)\,(x + 1)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -2\,(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow tg\ \alpha_1 = -2$$

Recta tangente a $g(x)$ en (–1, 1)

$y - g(-1) = g'(-1)\,(x+1) \Rightarrow y - 1 = 1\,(x+1) \Rightarrow y = x + 2$

$\Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1$

$tg\ \alpha_1 = -2 \Rightarrow \alpha_1 = 116°\ 33'\ 54''$

$tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$

El ángulo que formen $f(x)$ y $g(x)$ en el punto (–1, 1) vale: $71°\ 33'\ 54''$

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Se cortan en (1, 2) y (–1, 0)

- La recta tangente a $f(x)$ en (1, 2) tiene de pendiente $5 \Rightarrow tg\ \alpha_1 = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 78°\ 41'\ 24''$

  La recta tangente a $g(x)$ en (–1, 0) tiene por pendiente $1 \Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$

  El ángulo que forman en el punto (1, 2) es: $33°\ 41'\ 24''$

- La recta tangente a $f(x)$ en (–1, 0) tiene de pendiente $1 \Rightarrow tg\ \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 45°$

  La recta tangente a $g(x)$ en (–1, 0) tiene de pendiente $1 \Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$

  El ángulo que forman en (–1, 0) vale 0°.

PÁGINA 283

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $D[x^2]$

b) $D[(3x)^{1/3}]$

c) $D[3^x \cdot \ln x]$

d) $D\left[\dfrac{2}{(x^3-3x^2)^6}\right]$

e) $D\left[\dfrac{e^x}{x}\right]$

f) $D[\operatorname{sen} 4x]$

g) $D[x^3 \cdot x^4]$

h) $D[x \cdot 4^x]$

i) $D[(e^{2x}+3)^4]$

j) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right]$

k) $D\left[\dfrac{x}{e^x}\right]$

l) $D[\operatorname{sen}^4 x]$

m) $D[(x^2-3)^5]$

n) $D[(x+1)^3 \cdot (x-1)^2]$

ñ) $D[\ln (2-3x^2)^4]$

o) $D\left[(4x+2)\cdot\sqrt{4x-2}\right]$

p) $D[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}]$

q) $D[\operatorname{sen} x^4]$

13. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

a) $D\left[\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^3\right]$

b) $D\left[\dfrac{\cos(x-1)}{\cos(x+1)}\right]$

c) $D[\ln \operatorname{tg}^2 x]$

d) $D\left[\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}\right]$

e) $D[\operatorname{sen}\{\cos(\operatorname{sen} x)\}]$

f) $D\left[\dfrac{x^3 \cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right]$

g) $D[\operatorname{sen}^3 2x \cdot \cos^2 3x]$

h) $D[x^x]$

i) $D[\operatorname{sen}^2 x^2]$

j) $D[x^2 + \operatorname{sen} x]$

k) $D[\ln^2 (\ln x)]$

l) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]$

m) $D\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$

n) $D\left[\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$

ñ) $D[\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)]$

o) $D[x^{\ln x}]$

p) $D\left[\operatorname{arcsen}\sqrt{x-1}\right]$

q) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+7x}{1-7x}}\right]$

r) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x^2}\right]$

s) $D\left[\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right]$

t) $D\left[\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+\dfrac{1}{1+x}\right]$

u) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right]$

v) $D[\operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)]$

w) $D[(\operatorname{sen} x)^{2\cos x}]$

14. Calcula las derivadas sucesivas que se indican:

a) $f(x) = 2^{3x}$ — $f'''(x)$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$ — $g^{(4)}(x)$

c) $h(x) = \ln(x+2)$ — $h^{(5)}(x)$

d) $j(x) = \operatorname{sen} 3x$ — $j^{(10)}(x)$

15. Obtén las derivadas *n*-ésimas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x-1)$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

c) $g(x) = e^x + e^{-x}$

d) $g(x) = 3^{-x}$

e) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$

f) $h(x) = \cos x$

SOLUCIONES

12. Las derivadas quedan:

a) $D[x^2]=2x$

b) $D[(3x)^{1/3}]=(3x)^{-2/3}$

c) $D[3^x\cdot\ln x]=3^x\cdot\ln 3\cdot\ln x+\dfrac{3^x}{x}$

d) $D\left[\dfrac{2}{(x^3-3x^2)^6}\right]=D[2\cdot(x^3-3x^2)^{-6}]=\dfrac{-12(3x^2-6x)}{(x^3-3x^2)^7}$

e) $D\left[\dfrac{e^x}{x}\right]=\dfrac{e^x\cdot x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

f) $D[\operatorname{sen}4x]=4\cos 4x$

g) $D[x^3\cdot x^4]=D[x^7]=7x^6$

h) $D[x\cdot 4^x]=4^x+4^x\cdot\ln 4\cdot x$

i) $D[(e^{2x}+3)^4]=8e^{2x}(e^{2x}+3)^3$

j) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right]=\dfrac{5x}{(4-5x^2)\sqrt{4-5x^2}}$

k) $D\left[\dfrac{x}{e^x}\right]=\dfrac{e^x-e^x\cdot x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x(1-x)}{x^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$

l) $D[\operatorname{sen}^4 x]=D[(\operatorname{sen}x)^4]=4\cdot\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x$

m) $D[(x^2-3)^5]=10x(x^2-3)^4$

n) $D[(x+1)^3\cdot(x-1)^2]=(x^2-1)[5x^2+4x-1]$

ñ) $D[\ln(2-3x^2)^4]=D[4\cdot\ln(2-3x^2)]=\dfrac{-24x}{2-3x^2}$

o) $D[(4x+2)\sqrt{4x-2}]=4\cdot\sqrt{4x-2}+\dfrac{4(4x+2)}{2\sqrt{4x-2}}=\dfrac{24x-4}{\sqrt{4x-2}}$

p) $D[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}] = 2x \cdot 2^x \cdot a^{2x} + 2^x \cdot \ln 2 \cdot x^2 \cdot a^{2x} + 2a^{2x} \ln a \cdot x^2 \cdot 2^x$

q) $D[\text{sen}\, x^4] = 4x^3 \cdot \cos x^4$

13. Las derivadas son:

a) $D\,[(x - \sqrt{1 - x^2})^3] = 3(x - \sqrt{1 - x^2})^2 \cdot$

$$\cdot \left(1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\right) = \frac{6x^2 - 3}{\sqrt{1 - x^2}}\,(x - \sqrt{1 - x^2})$$

b) $$D\left[\frac{\cos(x-1)}{\cos(x+1)}\right] =$$

$$= \frac{-\text{sen}(x-1)\cdot\cos(x+1) + \text{sen}(x+1)\cdot\cos(x-1)}{\cos^2(x+1)} =$$

$$= \frac{\text{sen}[(x+1)-(x-1)]}{\cos^2(x+1)} = \frac{\text{sen}\, 2}{\cos^2(x+1)}$$

c) $D\,[\ln tg^2\, x] = D\,[2 \cdot \ln(tg\, x)] = \dfrac{2\,(1 + tg^2\, x)}{tg\, x}$

d) $$D\left[\sqrt{\frac{1 - \text{sen}\, x}{1 + \text{sen}\, x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 - \text{sen}\, x}{1 + \text{sen}\, x}}}\,\cdot$$

$$\cdot\, \frac{-\cos x(1 + \text{sen}\, x) - \cos x(1 - \text{sen}\, x)}{(1 + \text{sen}\, x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x}{(1 + \text{sen}\, x)\sqrt{1 - \text{sen}^2\, x}} = \frac{-1}{1 + \text{sen}\, x}$$

e) $D\,[\text{sen}\,\{\cos(\text{sen}\, x)\}] = \cos\,\{\cos(\text{sen}\, x)\} \cdot [-\text{sen}(\text{sen}\, x)] \cdot \cos x$

f) $$D\left[\frac{x^3 \cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right] = D[x^3 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x}] =$$

$$= 3x^2 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x} + x^3 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot 2 \cdot e^{-2x} -$$

$$-2x^3 \cdot 3^{2x} \cdot e^{-2x} = 3^{2x} \cdot e^{-2x}(3x^2 + 2\ln 3 \cdot x^3 - 2x^3)$$

g) $D[sen^3 2x \cdot cos^2 3x] = 6\ sen^2 2x \cdot cos\ 2x \cdot cos^2 3x -$
$- 6\ sen^3 2x \cdot cos\ 3x \cdot sen\ 3x$

h) $D\ [x^x] = x^x\ [ln\ x + 1]$

i) $D\ [x^{lnx}] = x^{lnx}\left[\dfrac{2\,ln\ x}{x}\right]$

j) $D\ [x^{x^x}] = x^{x^x}\left[x^x\left(ln^2\ x + ln\ x + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

k) $D\ [x^{cos\ x}] = x^{cos\ x}\ [-sen\ x\ ln\ x + \dfrac{cos\ x}{x}]$

l) $D\left[ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right] =$

$= D\ [ln\ \sqrt{x^2+1} - x) - ln(\sqrt{x^2+1} + x)] =$

$$= \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1}{\sqrt{x^2+1}-x} - \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x} - \frac{2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

m) $D\left[arc\ tg\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right] =$

$$= \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{1(x+1) - 1\ (x-1)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{x^2+1}$$

n) $D\left[\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right] = \dfrac{1\cdot\sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} =$

$= \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

ñ) $D[arc\ tg(sen\ x)] = \dfrac{cos\ x}{1 + sen^2\ x}$

o) $D\ [x^{lnx}] = x^{lnx}\left[\dfrac{2\ln x}{x}\right]$

p) $D\ [(sen\ x)^{2cos\ x}] =$

$= (sen\ x)^{2cos\ x}\left[-2\ sen\ x\cdot ln\ sen\ x + \dfrac{2\ cos^2\ x}{sen\ x}\right]$

q) $D\ [x^{sen\ x}] = x^{sen\ x}\ [cos\ x\cdot ln\ x + \dfrac{sen\ x}{x}]$

r) $D\ [(ln\ x)^x] = (ln\ x)^x\left[ln(ln\ x) + \dfrac{1}{ln\ x}\right]$

s) $D\ [arctg\sqrt{x}] = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$

t) $D\left[ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right) + \dfrac{1}{1+x}\right] =$

$= D\left[-ln\ (1+x) + \dfrac{1}{1+x}\right] =$

$= -\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{-2-x}{(1+x)^2}$

u) $D\left[ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right] = D\ [ln(\sqrt{x}-1) - ln(\sqrt{x}+1)] =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}$

v) $D\,[\text{arc sen}\,(tg\,x)] = \dfrac{1 + tg^2\,x}{\sqrt{1 - tg^2\,x}}$

w) $D\,[(sen\,x)^{2\cos x}] =$

$= (sen\,x)^{2\cos x}\left[-2\,sen\,x \cdot \ln sen\,x + \dfrac{2\cos^2 x}{sen\,x}\right]$

14. Quedan:

a) $f(x) = 2^{3x};\ f'(x) = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3;$

$f''(x) = 2^{3x} \cdot (\ln 2 \cdot 3)^2;\quad f'''(x) = 2^{3x} \cdot (3 \cdot \ln 2)^3$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1};\ g'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2};\ g''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

$g'''(x) = \dfrac{-12}{(x-1)^4};\ g^{(4)}(x) = \dfrac{48}{(x-1)^5}$

c) $h(x) = \ln(x+2);\ h'(x) = \dfrac{1}{x+2};\ h''(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

$h'''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3};\ h^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{(x+2)^4};\ h^{(5)}(x) = \dfrac{24}{(x+2)^5}$

d) $j(x) = sen\,3x$

$j'(x) = 3\cos 3x$

$j''(x) = -9\,sen\,3x$

$j'''(x) = -27\cos 3x$

$j^{(4)}(x) = +81\,sen\,3x$

$j^{(5)}(x) = 243 \cdot \cos 3x$

...

$j^{(10)}(x) = -sen\,3x \cdot (3)^{10}$

Aparece un grupo de cuatro funciones derivadas diferentes, después se repiten.

15. En cada caso:

a) $f(x) = \ln(x-1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1};\ f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2};\ f'''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(x-1)^n}$$

b) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ $\quad f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$ $\quad f''(x)=\dfrac{4}{(x+1)^3}$ $\quad f'''(x)=\dfrac{-12}{(x+1)^4}$ $\quad f^n(x)=\dfrac{(-1)^n\cdot 2}{(x+1)^{n+1}}n!$

c) $g(x) = e^x + e^{-x}$; $g'(x) = e^x - e^{-x}$; $g''(x) = e^x + e^{-x}$

$g'''(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow g^{(n)}(x) = e^x + (-1)^n \cdot e^{-x}$

d) $g(x)=3^{-x}$; $g'(x)=-3^{-x}\cdot \ln 3$; $g''(x)=3^{-x}\cdot (\ln 3)^2$; $g'''(x)=-3^{-x}\cdot (\ln 3)^3$;

$g^n(x)=(-1)^n\cdot 3^{-3}\cdot (\ln x)^n$

e) $h(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^2$

$h'(x) = -2x^{-3}$; $h''(x) = 6x^{-4}$; $h'''(x) = -24x^{-5}$

$h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}$

f) $h(x)=\cos x$; $h'(x)=-sen\ x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; $h''(x)=-\cos\ x=\cos(x+\pi)$;

$h'''(x)=sen\ x=\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)$; $h^{iv}(x)=\cos\ x=\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{2}\right)$;

$h^n(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

PÁGINA 284

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

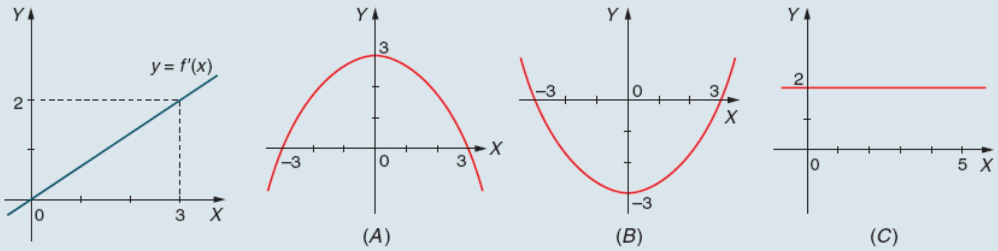
16. ¿En qué punto o puntos la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3x + 4$ tiene la menor pendiente?

17. Se considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

 a) Estudia su derivabilidad.

 b) Encuentra $f''(x)$.

18. La primera gráfica corresponde a la función derivada de $f(x)$.



 a) Obtén la expresión analítica de $y = f'(x)$.

 b) Indica cuál de las gráficas, (A), (B) o (C) corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

19. a) Estudia para qué valores de a las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le a \\ 2ax - 2a + 1 & \text{si } x > a \end{cases}$ son continuas.

 b) En estos casos dibuja las gráficas de las funciones obtenidas.

 c) ¿En algún caso f es derivable en a?

20. Considérese la hipérbola $x \cdot y = 1$. Halla la ecuación de la secante a dicha curva que pasa por los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 2$. Halla también las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola que son paralelas a dicha secante.

21. Halla el punto de la curva $y = \ln(1 + x^2)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x = 1$.

22. Determina los coeficientes a y b de la parábola $y = ax^2 + bx + 2$, sabiendo que la recta tangente en el punto en que $x = 1$ es la recta $y = -2x$.

23. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas $xy = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ en sus puntos de intersección.

24. Determina, de manera razonada, todas las funciones f que sean polinómicas de tercer grado y verifiquen $f'(-1) = f'(1) = 0$. ¿Puede existir alguna de las funciones determinadas anteriormente que verifique $f(0) = f(1) = 0$?

25. Si el lado de un cuadrado aumenta a una velocidad de 3 cm/s, halla la velocidad a la que aumenta su área cuando el lado vale 12 cm. Halla el valor del lado cuando el área crece a 60 cm²/s.

16. Las pendientes de las rectas tangentes a esta curva verifican la relación:

$$y' = 3x^2 + 3 \Rightarrow m = 3x^2 + 3$$

Está pendiente toma el menor valor posible en el vértice de esta función $y = 3x^2 + 3$ cuadrática, es decir en x = 0. Luego la menor pendiente de la recta tangente esta en (0, 4) y vale 3.

17. Las soluciones en cada caso son:

a)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiemos su derivabilidad en x = 0 y para ello buscamos las derivadas laterales.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\dfrac{h}{1+h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h(1+h)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{1+h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{h}{1-h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h(1-h)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{1-h} = 1$$

La función f(x) es derivable en x = 0.

Luego es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) hallamos $f''(x)$ a través de las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f''(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h - h^2}{h(1+h)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{-2-h}{(1+h)^2} = -2$$

$$f''(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{(1-h)^2} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2h - h^2}{h(1+h)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{2-h}{(1+h)^2} = 2$$

La función $f''(x)$ no existe en x = 0 para todos los demás valores.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(1+x)^3} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{2}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

18. La solución es:

a) expresión analítica de $y = f'(x)$. Es una recta que pasa por los puntos (0, 0) (3, 2), luego su ecuación es $y = \frac{2}{3}x$.

b) como $f'(x) = \frac{2}{3}x \Rightarrow f(x)$ ha de ser una función poli nómica de 2º grado, por lo cual la grafica (C) queda descartada. La grafica (A) corresponde a una función poli nómica de 2º grado, luego su función derivada seria negativa. Por tanto, la solución es la función (B).

19. Los casos quedan:

a) para que la función f(x) sea continua debe cumplirse:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \Leftrightarrow$$

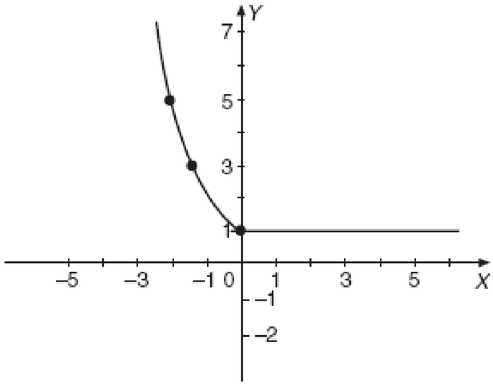
$$\lim_{x\to a^-} (x^2+1) = \lim_{x\to a^+} (2ax - 2a + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 = 2a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ y } a = 2$$

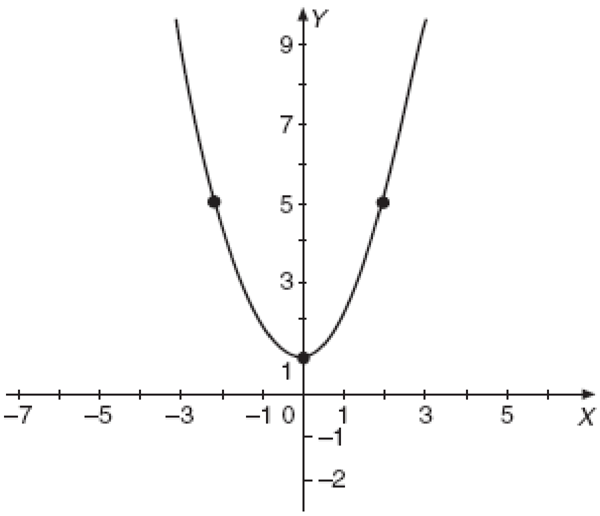
b) en el caso a = 0 la función es f(x) = $\begin{cases} x^2+1 & si\ x \le 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Y su grafica es:



En el caso a = 2 la función es f(x) = $\begin{cases} x^2+1 & si\ x \le 2 \\ 4x-3 & si\ x > 2 \end{cases}$

Y su grafica es:



c) en el caso a = 0 las derivadas laterales de la función en x = 0 son:

$f'(0^-) = 0 \quad y \quad f'(0^+) = 1$

Y, por tanto, la función no es derivable.

En el caso a = 2 las derivadas laterales de la función en x= 2 son:

$f'(2^-) = 4 \quad y \quad f'(2^+) = 4$

Y la función es derivable en x= 2. En este caso es derivable en cualquier punto de su dominio.

20. Queda:

La recta secante pasara por los puntos P(1, 1) , Q(2, 1/2) y su ecuación es:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1/2} \Rightarrow x + 2y - 3 = 0$$

La pendiente de esta recta es $m=-\frac{1}{2}$ luego las rectas tangentes paralelas a esta tendrán por pendiente $-\frac{1}{2} \Rightarrow$ $\quad y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Las rectas tangentes de pendiente $-\frac{1}{2}$ pasaran por los puntos

$$P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \; Q\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Y sus ecuaciones son:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2})$$

$$y + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{2})$$

21. Queda:

La recta tangente a la curva en el punto P(1, 0) tiene por pendiente:

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow m = 1$$

La recta perpendicular tendrá por pendiente (-1), por tanto:

$$\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow -1 \Rightarrow 1 + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$$

Por tanto, el punto buscado es $P(-1, \ln 2) \Rightarrow P(-1; 0{,}7)$

22. La solución es:

La recta tangente en el punto en el cual x = 1 pasa por el punto (1, -2) y su pendiente vale (- 2). Por tanto:

$$-2 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = -4$$

Por otro lado, $f'(1) = -2 \Rightarrow$ como $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a + b = -2$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -4 \\ 2a + b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases}$$

23. Queda:

Las curvas se cortan en los puntos que obtenemos al resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot y = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\right);$$

$$Q\left(-\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}\right)$$

Basta con hallar el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas en P, en Q es igual.

Hallamos α_1 que es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $x \cdot y = 1$ en el punto P con el eje de abscisas:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \text{tg } \alpha_1 = \frac{-1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} =$$

$$= \frac{-2}{1 + \sqrt{5}} \Rightarrow \alpha_1 = 148° \; 16' \; 57''$$

Hallamos α_2 que es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $x^2 - y^2 = 1$ en el punto P con el eje de abscisas.

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow tg \; \alpha_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = 58° \; 16' \; 57''$$

Luego, el ángulo que forman las rectas tangentes en P vale: $\alpha_1 - \alpha_2 = 90°$

24. Queda:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(-1) = 3a - 2b + c \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \\ f'(1) = 3a + 2b + c \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = -3a;\ b = 0$$

Las funciones polinómicas de tercer grado que verifican las hipótesis del enunciado son de la forma:

$$f(x) = ax^3 - 3ax + d$$

Para que verifique $f(0) = f(1) = 0$, deberán cumplir:

$$\left.\begin{array}{r} d = 0 \\ a - 3a + d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} d = 0 \\ a = 0 \end{array}\right.$$

Luego no existe ninguna función poli nómica de tercer grado que verifique estas condiciones, excepto el polinomio nulo.

25. El área de un cuadrado en función del lado l es $A = l^2$.

La variación del área puede venir expresada en la forma:

$$\frac{dA}{dt} = 2l\frac{dl}{dt}$$

Si $l = 12$ cm y $\frac{dl}{dt} = 3$ cm/s, obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 12 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm/s} = 72 \text{ cm}^2\text{/s}$$

Si $\frac{dl}{dt} = 3$ cm/s y $\frac{dA}{dt} = 60$ cm²/s, obtenemos:

$$60 \text{ cm}^2\text{/s} = 2 \cdot l \cdot 3 \text{ cm/s} \Rightarrow l = 10 \text{ cm.}$$