Unidad 15 – Integrales definidas. Aplicaciones

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se considera la función $f(x) = 16 - x^2$ en el intervalo $I = [-1, 4]$ y la partición de dicho intervalo dada por $P = \{-1, 0, 2, 4\}$.

   Encuentra de forma razonada el valor de las sumas superior e inferior correspondientes a f y a dicha partición P.

2. Una partición creciente verifica que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ y $f(13) = 10$. Halla de forma razonada la suma superior y la inferior correspondientes a la función f en el intervalo $[1, 3]$ respecto a la partición $P = \{1, 2, 3\}$.

3. Haciendo uso del teorema del valor medio, resuelve las siguientes cuestiones:

   a) Halla el valor medio de $f(x) = x^2 + 3$ en el intervalo $(0, 3)$ y halla el punto en el que se alcanza.

   b) Halla el valor medio de $f(x) = -x^2 + 2x$ en el intervalo $(0, 2)$. Halla los puntos en que se alcanza este valor. El existir dos puntos donde se alcanza el valor medio, ¿contradice el teorema del valor medio?

   c) ¿Es aplicable el teorema citado a la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$?

   d) Calcula $\int_{2}^{4} f(x)\,dx$ siendo $f(x) = 2x^2 - 3x$, y determina el valor medio de f en el intervalo $(2, 4)$, así como el valor de c correspondiente.

4. Obtén la derivada de las siguientes funciones:

   $F(x) = \int_0^x e^{\cos t}\,dt$ $\quad H(x) = \int_0^x t^2\,dt$ $\quad J(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3+t}\,dt$

   $G(x) = \int_{-3}^x |t+2|\,dt$ $\quad I(x) = \int_x^{x^3} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$ $\quad K(x) = \int_x^{x^2} \ln(t^2+4)\,dt$

5. Haciendo uso del teorema fundamental del cálculo integral, resuelve las cuestiones siguientes:

   a) Para la función $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt$, calcula $F'(0)$.

   b) Encuentra los extremos de la función $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$ en el intervalo $[2, 10]$.

   c) Halla el punto de $[0, 2]$ en el que la función $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}\,dt$ alcanza su mínimo.

   d) Para $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\,dt$, calcula $F'(x)$.

   e) Para $G(x) = \int_1^x e^{-t^2}(1+t^2)\,dt$, halla $G'(x)$.

   f) La función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿tiene puntos de inflexión? En caso afirmativo halla las abscisas de estos puntos.

   g) Calcula $\int_x^{x^2} e^{t^2/2}\,dt$.

SOLUCIONES

1. La suma superior es:

$$s(P) = (0-(-1)) \cdot 16 + (2-0) \cdot 16 + (4-2) \cdot 12 =$$
$$= 16 + 32 + 24 = 72.$$

La suma inferior es:

$$s(P) = (0-(-11) \cdot 15 + (2-0) \cdot 12 + (4-2) \cdot 0 =$$
$$= 15 + 24 + 0 = 39$$

2. La suma superior es:

$$s(P) = (2-1) \cdot 3 + (3-2) \cdot 10 = 3 + 10 = 13$$

La suma inferior es:

$$s(P) = (2-1) \cdot 1 + (3-2) \cdot 3 = 1 + 3 = 4$$

3. La solución es:

a) $$\int_0^3 (x^2+3)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^3 = 18$$

El teorema del valor medio dice que $\exists c \in (0,3)$ tal que:

$$\int_0^3 (x^2+3)dx = (c^2+3) \cdot (3-0) \Rightarrow 3c^2 + 9 = 18 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

Por tanto, como $c \in (0,3)$, el valor pedido es $c = \sqrt{3}$

b) $$\int_0^2 (-x^2+2x)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

El teorema del valor medio dice que $\exists c \in (0,2)$ tal que

$$\int_0^2 (-x^2+2x)dx = (-c^2+2c) \cdot (2-0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2c^2 + 4c = \frac{4}{3} \Rightarrow 6c^2 - 12c + 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = 0 \Rightarrow c = 1{,}58;\ c = 0{,}42$$

Obtenemos dos valores de C, pero esto no contradice el teorema, ya que este teorema garantiza que exista un valor cero no dice que este valor sea único.

c) no es aplicable el teorema del valor medio ya que la función $y=f(x)$ no es continua en el intervalo [- 1, 1], al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

d) $$\int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 (2x^2 - 3x)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= 18,\widehat{6} - (-0,\widehat{6}) = 19,\widehat{3} = \frac{58}{3}$$

Por el teorema de la media:

$$\int_2^4 f(x)dx = f(c)(4-2) \text{ con } c \in (2, 4) \Rightarrow f(c) = \frac{29}{3}$$

$$y\ \frac{58}{3} = (2c^2 - 3c) \cdot 2 \Rightarrow 12c^2 - 18c - 58 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 2\,784}}{24} = \frac{18 \pm 55,75}{24} = \begin{cases} 3,07 \\ -1,57 \end{cases}$$

Por tanto, $c = 3,07 \in (2, 4)$.

4. La solución es:

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t}\,dt \Rightarrow F'(x) = e^{\cos x}$$

$$G(x) = \int_0^x t^2\,dt \Rightarrow G'(x) = x^2$$

$$H(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3+t}\,dt \Rightarrow H'(x) = \frac{1}{3+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{3+x^2}$$

$$I(x) = \int_{-3}^x |t+2|\,dt \Rightarrow I'(x) = (x+2)$$

$$J(x) = \int_2^{x^2} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt \Rightarrow J'(x) = \frac{e^{x^3}}{x^6+1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2 \cdot e^{x^3}}{x^6+1}$$

$$K(x) = \int_x^{x^2} \ln(t^2+4)\,dt = \int_x^a \ln(t^2+4)dt +$$

$$+ \int_a^{x^2} \ln(t^2+4)\,dt = -\int_a^x \ln(t^2+4)dt + \int_a^{x^2} \ln(t^2+4)\,dt =$$

$$= \int_a^x -\ln(t^2+4)dt + \int_a^{x^2} \ln(t^2+4)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(x) = -\ln(x^2+4) + \ln(x^4+4) \cdot 2x$$

$$K'(x) = 2x \cdot \ln(x^4+4) - \ln(x^2+4)$$

5. La solución queda:

a) la derivada es: $F'(x)=2e^{4x^2}$

El valor buscado es $F'(0)=2\cdot e^{4\cdot 0}\;=2.$

b) la derivada de la función $F(x)$ es $F'(x)=\ln x$. Esta no se anula en el intervalo [2, 10]. La derivada es positiva en intervalo citado.

Teniendo en cuenta los hechos anteriores la función $F(x)$ no tiene extremos relativos y si extremos absolutos que se alcanzan en los extremos del intervalo.

Para $F(2)=0,39$ se obtiene el numero de la función y en $F(10)=14,04$ tiene máximo absoluto.

c) En este caso:

$$F'(x)=\frac{x-1}{1+x^2}\quad ;\quad F''(x)=\frac{1-x^2+2x}{(1+x^2)^2}$$

$F'(x)=0 \Rightarrow x=1$ y como $F''(1)>0$ en $x=1\in(0,2)$

$F(x)$ alcanza un mínimo relativo.

d) $F'(x)=x\cdot\cos x$

e) $G'(x)=e^{-x^2}\,(1+x^2)$

f) $F'(x)=e^{-x^2}$; $F''(x)=-2\cdot e^{-x^2}$; $F'''(x)=(4x^2-2)\cdot e^{-x^2}$

Por tanto como $F''(0)=0$ y $F'''(0)\neq 0$ la función F(x) tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa 0.

g) $F'(x)=\; e^{\frac{x^4}{2}}\cdot 2x-e^{\frac{x^2}{2}}$

PÁGINA 387

6. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^6 \frac{4\,dx}{\sqrt{x+3}}$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx$

c) $\int_0^8 \frac{3\,dx}{\sqrt{1+x}}$

d) $\int_2^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

e) $\int_0^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx$

f) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

g) $\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$

h) $\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$

i) $\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}}dx$

j) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$

k) $\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2+2)^4}dx$

l) $\int_0^4 \sqrt{9+4x}\,dx$

m) $\int_0^2 4x^2(1+x^3)^5\,dx$

n) $\int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{2x}\,dx$

ñ) $\int_0^1 (x - e^x \cos x)\,dx$

o) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

p) $\int_3^6 x\sqrt{x-2}\,dx$

q) $\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}dx$

r) $\int_3^5 \frac{\ln x}{x}dx$

s) $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x\,dx$

t) $\int_0^b \frac{dx}{x+b}$ con $b > 0$

u) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

v) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$

w) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

x) $\int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1}dx$

y) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

z) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \ln x\,dx$

7. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$

b) $\int_0^2 x\big[|x-1|+1\big]\,dx$

c) $\int_{-2}^2 |x^2-1|\,dx$

d) $\int_{-2}^2 \big||x|-1\big|\,dx$

e) $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x\,dx$

f) $\int_0^2 |2x-1|\,dx$

8. Calcula las siguientes integrales mediante la interpretación geométrica:

$I = \int_{-50}^{50} (x^{33}+x^{21})\,dx$ $\qquad J = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^5(8x^3+x)\,dx$

9. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = 3x + 2$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Comprueba el resultado por métodos geométricos.

10. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y el eje OX.

6. La solución queda:

a) $\int_1^6 \frac{4\,dx}{\sqrt{x+3}}$

Calculamos la integral indefinida por integrales inmediatas:

$$\int \frac{4\,dx}{\sqrt{x+3}} = 4\int (x+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 8\sqrt{x+3} + C$$

Haciendo C = 0 y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_1^6 \frac{4\,dx}{\sqrt{x+3}} = \left[8\sqrt{x+3}\right]_1^6 = 8\sqrt{9} - 8\sqrt{4} = 24 - 16 = 8$$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = \left[ln\,(e^x+2)\right]_0^1 = ln\,(e+2) - ln\,3 =$$

$$= ln\frac{e+2}{3} = 0{,}45$$

c) $\int_0^8 \frac{3}{\sqrt{1+x}}\,dx$ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^8 \frac{3}{\sqrt{1+x}}\,dx = 3\int_0^8 (1+x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[6\sqrt{1+x}\right]_0^8 =$$

$$= 6\sqrt{9} - 6\sqrt{1} = 12$$

d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}\,dx$ operando de forma análoga, obtenemos:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}\,dx = \left[arc\ tg\ x\right]_1^{\sqrt{3}} = arc\ tg\ \sqrt{3} - arc\ tg\ 1 =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

e) $\int_0^{\pi^2} \frac{sen\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\pi^2} sen\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx =$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cdot cos\,\sqrt{x}\right]_0^{\pi^2} = \left(-\frac{2}{3}cos\,\pi\right) - \left(-\frac{2}{3}cos\,0\right) =$$

$$= \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$$

f) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ queda:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^2 \frac{\frac{1}{3}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \left[arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + C\right]_0^2 =$$

$$= \left[arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^2 = arc\ sen\ \frac{2}{3} - arc\ sen\ 0 = 0{,}73$$

g) $\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$ determinamos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3x - 2}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \int (x+2)\,dx + \int \frac{3x}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \frac{(x+2)^2}{2} +$$

$$+ 3\int \frac{x-1+1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \frac{(x+2)^2}{2} +$$

$$+ 3\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{(x+2)^2}{2} + 3\ ln|x-1| -$$

$$- \frac{1}{x-1} + C$$

Determinamos la integral definida haciendo C = 0 y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx = \left[\frac{(x+2)^2}{2} + 3\ ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\right]_2^3 =$$

$$= \left(\frac{25}{2} + 3\ ln\ 2 - \frac{1}{2}\right) - (8 + 0 - 1) = 5 + 3\ ln\ 2 = 7{,}08$$

h) $\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$ calculamos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx +$$

$$+\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx = -ln\,|x| + ln\,|x-1| + ln|x+1| =$$

$$= ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + C$$

Haciendo C = 0 y aplicando Barrow, obtenemos la integral definida:

$$\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx = \left[ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|\right]_2^5 = ln\,\frac{24}{5} - ln\frac{3}{2} =$$

$$= ln\frac{16}{5} = 1{,}16$$

i) $\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}}dx$ resolvemos la integral indefinida por cambio de variable, haciendo:

$x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$.

$$\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t^2}{t^2+t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2t^2}{t+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{(2t-2)(t+1)+2}{t+1}\,dt = \int (2t-2)\,dt + \int \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$= t^2 - 2t + 2\,ln\,|t+1| = x - 2\sqrt{x} + 2\,ln\,|\sqrt{x}+1| + C$$

Haciendo C = 0 y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx = [x - 2\sqrt{x} + 2\,ln\,|\sqrt{x}+1|]_4^9 = 3{,}58$$

j) $\int_{0}^{\pi/2} sen\, 2x \cdot dx$ calculemos la integral indefinida:

$$\int sen\ 2x \cdot dx = \frac{1}{2}\int sen\ 2x \cdot 2dx = \frac{1}{2}\ (-\cos 2x) + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_{0}^{\pi/2} sen\ 2x \cdot dx \left[\frac{1}{2}\ (-\cos 2x)\right]_{0}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ (-\cos \pi) - \frac{1}{2}(-\cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

k) $\int_{-1}^{1} \frac{4x}{(x^2+2)^4}\, dx$ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{4x}{(x^2+2)^4}\ dx = 2\int_{-1}^{1} (x^2+2)^{-4} \cdot 2x\ dx =$$

$$= \left[\frac{-2}{3(x^2+2)^3}\right]_{-1}^{1} = \frac{-2}{81} - \frac{-2}{81} = 0$$

l) $\int_{0}^{4} \sqrt{9+4x}\ dx$ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_{0}^{4} \sqrt{9+4x}\ dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{4} (9+4x)^{\frac{1}{2}} \cdot 4\ dx = \left[\frac{\sqrt{(9+4x)^3}}{6}\right]_{0}^{4} =$$

$$= \frac{125}{6} - \frac{27}{6} = \frac{49}{3}$$

m) $\int_{0}^{2} 4x^2\,(1+x^3)^5\ dx$ operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_{0}^{2} 4x^2\ (1+x^3)^5\ dx = \frac{4}{3}\int_{0}^{2} (1+x^3)^5 \cdot 3x^2\ dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\ (1+x^3)^6\right]_{0}^{2} = \left[\frac{2(1+x^3)^6}{9}\right]_{0}^{2} = 118\ 098 - \frac{2}{9} =$$

$$= 118\ 097{,}8$$

n) $\int_{-1}^{0} x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx$

Determinamos la integral indefinida por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = I$$

$$\left.\begin{array}{r} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{2x} \cdot dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\,e^{2x} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{x^2\,e^{2x}}{2} - \int x\,e^{2x} \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método a esta última integral:

$$\left.\begin{array}{r} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} \cdot dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\,e^{2x} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{x^2\,e^{2x}}{2} - \left[\frac{x\,e^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2}\,e^{2x}\,dx\right] =$$

$$= \frac{x^2\,e^{2x}}{2} - \frac{x\,e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Calculamos la integral definida haciendo C = 0 y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^{0} x^2 e^{2x}\,dx = \left[\frac{x^2\,e^{2x}}{2} - \frac{x\,e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^{0} = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{5}{4\,e^2}\right) = 0{,}08$$

ñ) $\int_0^1 (x - e^x \cos x)\,dx = \int x\,dx - \int e^x \cos x\,dx = \dfrac{x^2}{2} - I$

$$\int (x - e^x \cos x)\,dx = \int x\,dx - \int e^x \cos x\,dx = \frac{x^2}{2} - I$$

La integral $I = \int e^x \cos x\,dx$ la calculamos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

Aplicando el mismo método a esta última integral, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right\}$$

$$I=\int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x - \int -e^x \cos x\,dx\right] =$$

$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - I \Rightarrow I = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2}$$

Por tanto:

$$\int (x - e^x \cos x)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow, obtenemos:

$$\int_0^1 (x - e^x \cos x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{e \operatorname{sen} 1 + e \cos 1}{2}\right) - \left(0 - \frac{0+1}{2}\right) =$$

$$= 1 - 1{,}88 = -0{,}88$$

o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^3+1)}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{1/3}{x+1}\,dx + \int \frac{-1/3\,x + 2/3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2-x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx +$$

$$+ \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln$$

$$|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Calculamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicado la regla de Barrow y obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1} = \left[\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = 0{,}84$$

p) $\int_3^6 x\sqrt{x-2}\,dx$ resolvemos la integral indefinida por el método de cambio de variable, haciendo $x-2=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt$.

$$\int x\sqrt{x-2}\,dx = \int (t^2+2)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int (2t^4+4t^2)\,dt =$$
$$= \frac{2t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} = \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_3^6 x\sqrt{x-2}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3}\right]_3^6 =$$
$$=\left(\frac{64}{5}+\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{3}\right)=\frac{62}{5}+\frac{28}{3}=\frac{326}{15}=21{,}7$$

q) $\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$ resolvemos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int \frac{(x^3+x^2-2x)(x-1)+3x^2-6}{x^3+x^2-2x}\,dx=$$
$$=\int (x-1)\,dx+\int \frac{3x^2-6}{x(x-1)(x+2)}\,dx=\frac{(x-1)^2}{2}+\int \frac{3}{x}\,dx+$$
$$+\int \frac{-1}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{x+2}\,dx=\frac{(x-1)^2}{2}+3\,ln\,|x|-ln\,|x-1|+$$
$$+\,ln\,|x+2| = \frac{(x-1)^2}{2} + ln\left|\frac{x^3(x+2)}{x-1}\right| + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos la integral definida:

$$\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2} + ln\left|\frac{x^3(x+2)}{x-1}\right|\right]_2^3 =$$
$$=\left(2+ln\frac{135}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+ln\,32\right)=\frac{3}{2}+ln\,\frac{135}{64}=2{,}25$$

r) $\int_3^5 \frac{\ln x}{x} dx$ calculamos la integral indefinida:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow

$$\int_3^5 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_3^5 = \frac{(\ln 5)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} [(\ln 5 - \ln 3)(\ln 5 + \ln 3)] = \frac{1}{2} \ln 15 \cdot \ln \frac{5}{3} = 0{,}69$$

s) $\int_0^{\pi/2} sen\, 2x \cdot dx$ calculamos la integral indefinida:

$$\int sen\ 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \int sen\ 2x \cdot 2dx = \frac{1}{2} (-\cos 2x) + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi/2} sen\ 2x \cdot dx \left[\frac{1}{2} (-\cos 2x) \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos \pi) - \frac{1}{2} (-\cos 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

t) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+b}\ con\ b > 0$ operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^b \frac{dx}{x+b} = [\ln |x+b|]_0^b = \ln |2b| - \ln |b| = \ln \frac{2b}{b} = \ln 2 = 0{,}69$$

u) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$ obtenemos la integral haciendo el cambio: $x - 1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\, dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 2t\, dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2} = dt =$$

$$= \int \frac{2(1+t^2) - 2}{1+t^2} dt = \int 2\, dt - \int \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= 2t - 2\ arc\ tg\ t = 2\sqrt{x-1} - 2 \cdot arc\ tg\ \sqrt{x-1} + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow para determinar la integral definida:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = [2\sqrt{x-1} - 2 \cdot arc\ tg\ \sqrt{x-1}]_1^4 =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\pi}{3} \right) - (0 - 0) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 1{,}37$$

v) $\int_{-1}^{\pi/4} tg\, x\, dx$ calculamos la integral indefinida por el método de integrales inmediatas y después calculamos la definida haciendo C = 0 y aplicando Barrow.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} tg\, x\, dx = -\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{-sen\, x}{cos\, x}\, dx = [-ln\,|cos\, x| + C]_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \left(-ln\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-ln\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

w) $\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2-1}\, dx$ determinamos la integral indefinida por el método de integrales inmediatas y después la integral definida haciendo C = 0 y aplicando Barrow:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\, dx = \left[\frac{1}{2}\, ln\,|x^2-1| + C\right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\, ln\, 8 - \frac{1}{2}\, ln\, 3 = ln\sqrt{\frac{8}{3}} = 0{,}49$$

x) $\int_{3}^{6} \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3-1}}\, dx$ resolvemos la integral mediante el cambio: $2x-3 = t^2 \Rightarrow dx = t\, dt$.

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1}\, dx = \int \frac{t}{t-1}\cdot t\, dt = \int \frac{t^2}{t-1}\, dt =$$

$$= \int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}\, dt = \int (t+1)\, dt + \int \frac{1}{t-1}\, dt =$$

$$= \frac{(t+1)^2}{2} + ln\,|t-1| =$$

$$= \frac{(\sqrt{2x-3}+1)^2}{2} + ln\,|\sqrt{2x-3}-1| + C$$

Dando a C el valor 0 y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1}\, dx = \left[\frac{(\sqrt{2x-3}+1)^2}{2} + ln|\sqrt{2x-3}-1|\right]_3^6 =$$

$$= (8 + ln\, 2) - \left[\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} + ln(\sqrt{3}-1)\right] = 5{,}27$$

y) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ esta integral no está definida en [0, 1].

Resolvemos la integral indefinida en el campo complejo por el método de cambio de variable, haciendo $x^2-1=t^2 \Rightarrow dx=\frac{t\,dt}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int \frac{t}{x} \cdot \frac{t\,dt}{x} = \int \frac{t^2}{x^2}\,dt = \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\,dt = \int dt \int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= t - arc\ tg\ t = \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\ \sqrt{x^2-1} + C.$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \left[\sqrt{x^2-1} - arc\ tg\ \sqrt{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{-\pi \cdot i}{4}$$

z) $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \ln x\,dx$ esta integral no está definida en el intervalo [-1,1].

7. Las integrales quedan:

a) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |sen\ x|\ dx = \int_{-\pi/2}^{0} -sen\ x\ dx + \int_{0}^{\pi/2} sen\ x\ dx =$$

$$= [\cos x]_{-\pi/2}^{0} + [-\cos x]_{0}^{\pi/2} = (1-0) + (-0+1) = 2$$

b)

$$\int_{0}^{2} x[|x-1|+1]\ dx = \int_{0}^{1} (-x^2+2x)\ dx + \int_{1}^{2} x^2\ dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3.$$

c)

$$\int_{-2}^{2} |x^2-1|\ dx = 2\int_{0}^{1} (-x^2+1)\ dx + 2\int_{1}^{2} (x^2-1)\ dx =$$

$$= 2[-x^2+2x]_0^1 + 2[x^2-2x]_1^2 = 2+2 = 4$$

d)

$$\int_{-2}^{2} \big||x|-1\big|\ dx = 2\int_{0}^{1} (-x+1)\ dx + 2\int_{1}^{2} (x-1)\ dx =$$

$$= [-x^2+2x]_0^1 + [x^2-2x]_1^2 = 1+1 = 2$$

e)

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x|\ sen\ x\ dx = \int_{-\pi}^{0} -x\ sen\ x\ dx + \int_{0}^{2\pi} x\ sen\ x\ dx =$$

$$= [x\cos x - sen\ x]_{-\pi}^{0} + [-x\cos x + sen\ x]_{0}^{2\pi} =$$

$$= -\pi - 2\pi = -3\pi.$$

f)

$$\int_{0}^{2} |2x-1|\ dx = \int_{0}^{1/2} (-2x+1)\ dx + \int_{1/2}^{2} (2x-1)\ dx =$$

$$= [-x^2+2x]_0^{1/2} + [x^2-x]_{1/2}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}$$

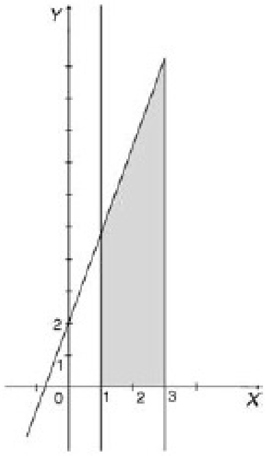
8. Las integrales quedan:

$$I = \int_{-50}^{50} (x^{33} + x^{21})\, dx = 0$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} sen^5\, (8x^3 + x)\, dx = 0$$

Ambas integrales son iguales a cero, pues al ser las funciones impares y simetricas respecto al origen se anulan entre si las areas de las regiones que se obtienen.

9. El área viene dada por:



El área del recinto sombreado viene dada por:

$$\int_1^3 (3x + 2)\, dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^3 = \left(\frac{27}{2} + 6 \right) - \left(\frac{3}{2} + 2 \right) = 16 \text{ u}^2$$

Directamente este recinto es un trapecio y su area vale:

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{11 + 5}{2} \cdot 2 = 16 \text{ u}^2$$

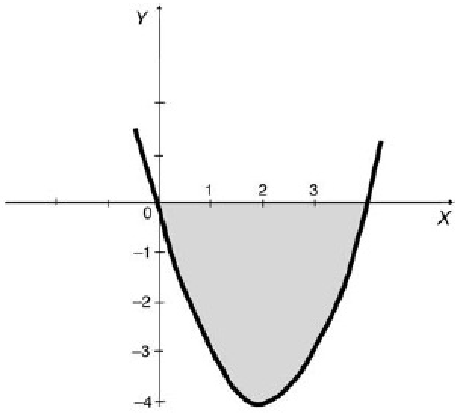
Con lo que queda comprobado el resultado anterior.

10. Queda:

Recinto sombreado:

$$\text{Área} = -\int_0^4 (x^2 - 4x)\, dx = -\left[\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \right]_0^4 =$$

$$= -\left[\frac{64}{3} - 32 \right] = \frac{32}{3} \text{ u}^2 = 10{,}7 \text{ u}^2$$



PÁGINA 388

ACTIVIDADES FINALES

11. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = -\frac{1}{2}x^2$.

12. Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 8x^2 + 7x$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 7$.

13. Halla el área del recinto limitado por la curva $y = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

14. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y^2 = 6x$, $x^2 = 6y$

b) $y^2 = 9x$, $y^2 = 4(x + 1)$

c) $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$

15. Determina el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x\,e^{-x}$ y $g(x) = x^2\,e^{-x}$.

16. Calcula el área de la región limitada por la hipérbola $xy = 36$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 6$ y $x = 12$.

17. Halla, utilizando la integral definida, el área del círculo limitado por la curva de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ y el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

18. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX los recintos siguientes:

a) $f(x) = 2x + 1$; $x = 0$, $x = 4$

b) $f(x) = \text{sen}\, x$; $x = 0$, $x = \pi$

c) $f(x) = x - x^2$; $x = 0$, $x = 1$

d) $f(x) = e^x$; $x = 0$, $x = 1$

19. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor de OX los recintos limitados por las gráficas que se indican:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 1 - x^2$

c) $f(x) = \sqrt{2x}$; $g(x) = \frac{2x + 3}{4}$

d) $f(x) = x^2$; $g(x) = -3x - 2$

20. Halla el volumen de la región determinada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 3$, al girar alrededor de OX.

21. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX el recinto plano determinado por dicho eje y la curva $y = x - x^3$.

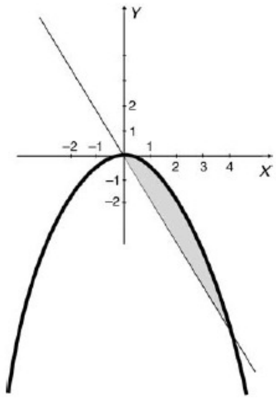
22. A partir de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, obtén el volumen de una esfera.

23. Calcula el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa al eje OX.

11. Queda:

Queremos calcular el area del recinto sombreado:

$$\left.\begin{array}{l} y=-2x \\ y=-\frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x^2=-2x \\ x^2=4x \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \end{array}$$

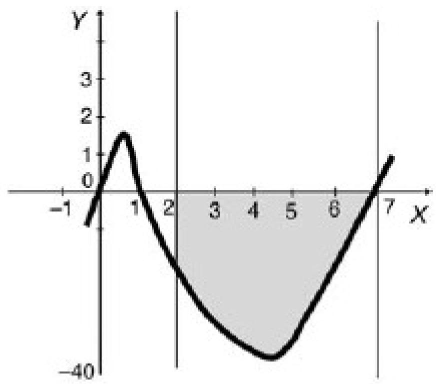


$$\text{Área} = \int_0^4 \left[\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - (-2x)\right] dx = \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 = 16 - \frac{64}{6} = 5,3 \text{ u}^2$$

12. La solución es:

El área pedida es la del recinto sombreado.

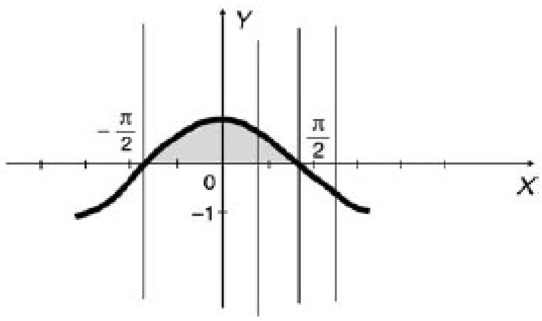


$$\text{Área} = -\int_2^7 (x^3 - 8x^2 + 7x)\, dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{7x^2}{2}\right]_2^7 =$$

$$= -\left[\left(\frac{2401}{4} - \frac{2744}{3} + \frac{343}{2}\right) - \left(4 - \frac{64}{3} + 14\right)\right] =$$

$$= 139,58 \text{ u}^2$$

13. Queda:

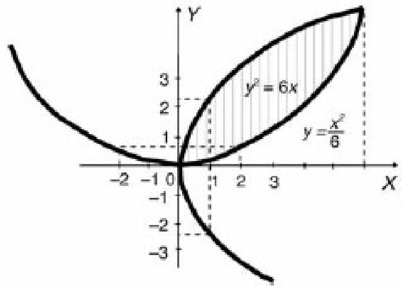


El área del recinto limitado por la curva, el eje *OX* y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$ vale:

$$\text{Área} = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\,[\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} = 2 \text{ u}^2$$

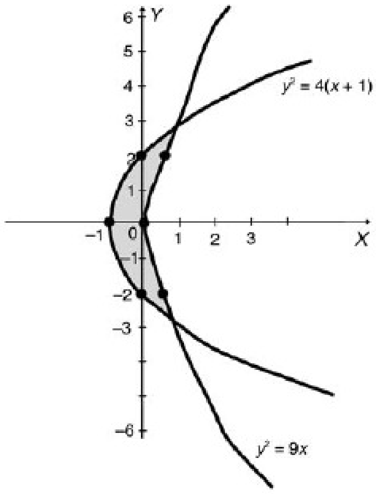
14. La solución queda:

a)



$$\text{Área} = \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left[\frac{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{18} \right]_0^6 = 12 \text{ u}^2$$

b)



Las curvas $y^2 = 9x; y^2 = 4(x+1)$ se cortan en los puntos de abscisa $x = 0,8$ pues:

$$9x = 4(x+1) \Rightarrow x = \frac{4}{5} = 0,8$$

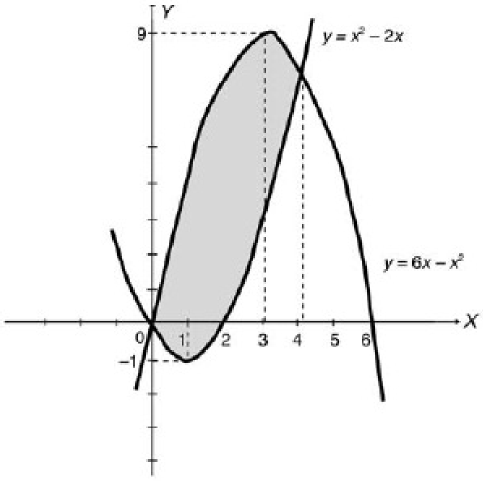
El área pedida es la de la zona sombreada y vale:

$$\text{Área} = 2\left[\int_{-1}^{0,8} 2\sqrt{x+1}\, dx - \int_0^{0,8} 3\sqrt{x}\, dx\right] =$$

$$= 2\left[\frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right]_{-1}^{0,8} - 2\left[2\sqrt{x^3}\right]_0^{0,8} =$$

$$= \frac{8\sqrt{1,8^3}}{3} - 4\sqrt{0,8^3} = 3,58 \text{ u}^2$$

c)



Estas curvas se cortan en los puntos solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \quad y = 0 \quad P(0,0) \\ x = 4 \quad y = 8 \quad Q(4,\ 8) \end{array}\right.$$

$$\text{Área} \int_2^0 (x^2 - 2x)\, dx + \int_0^4 (6x - x^2) dx - \int_2^4 (x^2 - 2x)\, dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^0 + \left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{-8}{3} + 4\right) + \left(48 - \frac{64}{3}\right) - \left[\left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right] =$$

$$= \frac{-8}{3} + 4 + 48 - \frac{64}{3} - \frac{64}{3} + 16 + \frac{8}{3} - 4 =$$

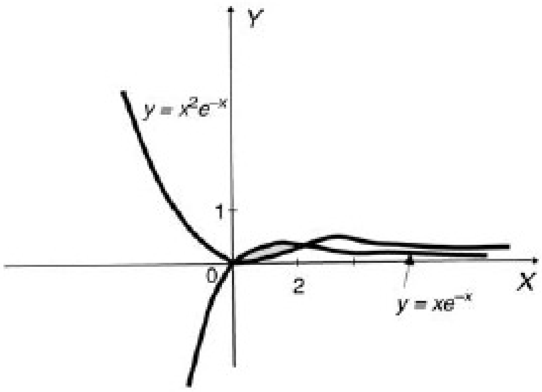
$$= 64 - \frac{128}{3} = 21{,}3 \text{ u}^2$$

Otra forma de hallar el area del recinto buscado:

$$\text{Área} = \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]\, dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)\, dx =$$

$$= \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = 21{,}3 \text{ u}^2$$

15. La solución es:



Las curvas se cortan en x = 0 y x = 1. Calculamos el area de la zona sombreada.

$$\text{Área} = \int_0^1 (x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x})\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,e^{-x}\,dx$$

Resolvemos por el método de integración por partes la integral indefinida:

$$\int (x - x^2)\,e^{-x}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = x - x^2 \Rightarrow du = (1 - 2x)\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\}$$

$$I = \int (x - x^2)\,e^{-x}\,dx = -\,(x - x^2)\,e^{-x} - \int -(1 - 2x)e^{-x}\,dx =$$

$$= (x^2 - x)\,e^{-x} + \int (1 - 2x)\,e^{-x}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = 1 - 2x \Rightarrow du = -2\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\}$$

$$I = \int (x - x^2)\,e^{-x}\,dx = (x - x^2)\,e^{-x} - (1 - 2x)\,e^{-x} -$$

$$- \int 2\,e^{-x}\,dx = (x^2 - x)\,e^{-x} - (1 - 2x)\,e^{-x} + 2\,e^{-x} + C$$

Haciendo C = 0 y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos permite calcular el area pedida:

$$\text{Área} = \left[(x^2 - x)\,e^{-x} - (1 - 2x)\,e^{-x} + 2\,e^{-x}\right]_0^1 =$$

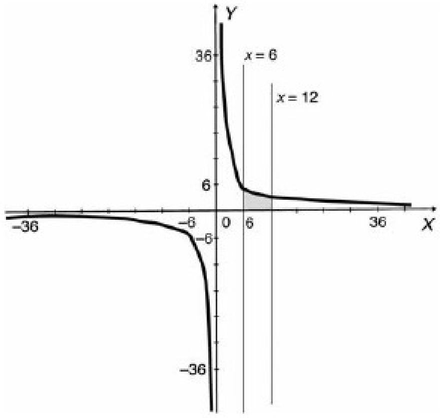
$$= \frac{3}{e} - 1 = 0{,}1036\ \text{u}^2$$

16. La solución es:

El área del recinto sombreado buscado vale:

$$\text{Área} = \int_6^{12} \frac{36}{x}\, dx = \left[36\ ln\ x\right]_6^{12} = 36\ ln\ \frac{12}{6} =$$

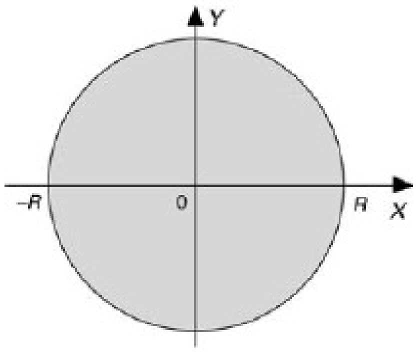
$$= 36\ ln\ 2 = 24{,}95\ u^2$$



17. La solución:

El circulo de radio R queda limitado por la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = R^2$

$$\text{Área} = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$



Calculamos la integral indefinida $\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$ mediante el cambio de variable:

$$x = R \cdot sen\ t \Rightarrow dx = R \cdot cos\ t \cdot dt$$

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{R^2 - R^2\, sen^2\, t} \cdot R \cdot cos\ t \cdot dt =$$

$$\int R^2 \cdot cos^2\ t \cdot dt = R^2 \int \frac{1 + cos\ 2\ t}{2}\ dt =$$

$$= R^2\left(\frac{t}{2} + \frac{sen\ 2t}{4}\right) + C =$$

$$= R^2\left(\frac{arc\ sen\ \frac{x}{R}}{2} + \frac{2 \cdot \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}{4}\right) + C$$

Haciendo C = 0 y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos da el area del circulo buscado:

$$\text{Área} = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx =$$

$$= \left[4R^2 \left(\frac{\text{arc sen}\, \frac{x}{R}}{2} + \frac{2 \cdot \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}{4} \right) \right]_0^R =$$

$$= 4R^2 \left[\left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - (0 + 0) \right] = (\pi R^2)\ \text{u}^2$$

- La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ encierra un recinto cuya área vale:

$$\text{Área} = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}\, dx$$

Calculamos la integral indefinida

$$\int \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}\, dx$$

Por el método de cambio de variable, para ello hacemos $x = a\,\text{sen}\,t \Rightarrow dx = a\cos dt$

$$\int \frac{1}{a} \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2}\, dx = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - a^2\, \text{sen}^2\, t} \cdot a \cos t\, dt =$$

$$= \frac{b}{a} \int a^2 \cos^2 t\, dt = ab \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \left(t + \frac{\text{sen}\, 2t}{2} \right) + C$$

$$= \frac{ab}{2} \left(\text{arc sen}\, \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C$$

Haciendo C = 0 y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos da el área encerrada por la elipse dada:

$$\text{Área} = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{4\,ab}{2} \left(\text{arc sen}\, \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \right]_0^a =$$

$$= 2\,ab \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - 2\,ab\,(0 - 0) = (ab \cdot \pi)\ \text{u}^2$$

18. Los volúmenes son:

a) $V = \pi \int_0^4 (2x + 1)^2\, dx = \pi \int_0^4 (4x^2 + 4x + 1)\, dx =$

$= \pi \left[\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right]_0^4 = \frac{364\pi}{3}$ u^3

b) $V = \pi \int_0^{\pi} sen^2\, x\, dx = \pi \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \text{ sen } 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$ u^3

c) $V = \pi \int_0^1 (x - x^2)^2\, dx = \pi \left[\left(\frac{6x^5 - 15x^4 + 10x^3}{30} \right) \right]_0^1 =$

$= \frac{\pi}{30}$ u^3

19. Los volúmenes quedan:

a) $V = \pi \int_0^1 x\, dx - \pi \int_0^1 x^4\, dx = \left[\frac{\pi x^2}{2} \right]_0^1 - \left[\frac{\pi x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$

b) $V = 2\pi \int_0^1 (x^2 - 1)^2\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx =$

$= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{16\pi}{15}$

c) $V = \pi \int_{0,5}^{4,5} 2x\, dx - \pi \int_{0,5}^{4,5} \left(\frac{2x + 3}{4} \right)^2 dx = [\pi x^2]_{0,5}^{4,5} -$

$- \pi \left[\frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{8} + \frac{9x}{16} \right]_{0,5}^{4,5} = 20\pi - 17{,}33\ \pi = 2{,}67\ \pi$

d) $V = \pi \int_{-2}^{-1} (-3x - 2)^2\, dx - \pi \int_{-2}^{-1} x^4\, dx =$

$= \pi \int_{-2}^{-1} (9x^2 + 12x + 4)\, dx - \pi \int_{-2}^{-1} x^4\, dx =$

$= \pi\, [3x^3 + 6x^2 + 4x]_{-2}^{-1} - \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{-1} =$

$= 7\pi - \frac{\pi \cdot 31}{5} = \frac{4\pi}{5}$

20. El volumen es:

$$V = \pi \int_0^3 e^{-2x}\, dx = \pi \left[\frac{-e^{-2x}}{2} \right]_0^3 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-6}}{2} \right) \simeq \frac{\pi}{2}$$

21. El volumen es:

$$V = 2\pi \int_0^1 (x - x^3)^2\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - 2x^4 + x^6)\, dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{16\,\pi}{105}$$

22. el volumen de la esfera es:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = 2\pi\, \frac{2R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

23. el volumen del elipsoide es:

$$V = 2\pi \int_0^5 \left(1 - \frac{x^2}{25} \right) dx = 2\pi \left[x - \frac{x^3}{75} \right]_0^5 = 2\pi \cdot \frac{10}{3} =$$

$$= \frac{20\pi}{3}$$

PÁGINA 389

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

24. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos $P = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$, calcula razonadamente cuánto valen la suma superior y la suma inferior correspondientes a dicha partición.

25. Haciendo uso del teorema del valor medio del cálculo integral, calcula el valor de c para la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

26. Dada la función $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$, determina $F'(x)$ y $F''(x)$.

27. Para la función $F(x) = \int_0^x \cos t^2\, dt$, determina:

a) $F'(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \cos t^2\, dt$

28. Sea $F(x) = \int_1^{x^2} (t^2 - 1)\, dt$. Halla los posibles puntos extremos de dicha función.

29. Calcula la siguiente integral definida: $\int_{-1}^1 |x|\, dx$.

30. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 2} dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1 + x^2}\, dx$

31. Determina, en función de $b > 1$, el valor de la integral $\int_0^b |x - 1| \cos x\, dx$.

32. Dibuja la región del plano limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$. Calcula su área.

33. Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje OX y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x = e$.

34. Una varilla se desliza por el interior de la parábola $y = x^2$ paralelamente al eje OX hasta determinar una superficie de 36 m². Encuentra a qué distancia del eje OX se detiene la varilla.

35. Calcula el valor de a sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$, es 36.

36. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 3x + 2$ y la función $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$.

37. Calcula el área comprendida entre la curva $y = \frac{1}{1 + x^2}$, el eje OX y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

24. La suma superior es:

$$S(P) = [-2-(-3)]\cdot 8 + [-1-(-2)]\cdot 3 + [1-(-1)]\cdot 0 + $$
$$+ (2-1)\cdot 3 = 8+3+0+3 = 14.$$

La suma inferior es:

$$s(P) = [-2-(-3)]\cdot 3 + [-1-(-2)]\cdot 0 + [-1-(-1)]\cdot 0 + $$
$$+ (2-1)\cdot 0 = 3+0+0+0 = 3.$$

25. Aplicando este teorema obtenemos :

$$\int_0^1 x^2\,dx = c^2\cdot(1-0) \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $c \in (0, 1) \Rightarrow$ el valor buscado es $c = +\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

26. La solución en cada caso es:

La primera derivada es:

$$F'(x) = e^{-x^4}\cdot 2x = 2xe^{-x^4}$$

La segunda derivada es:

$$F''(x) = (2-8x^4)e^{-x^4}$$

27. La solución es:

a) La derivada es:

$$F'(x) = \cos x^2$$

b) El límite produce una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Aplicando la regla de L´Hopital obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = \cos 0 = 1$$

28. Las derivadas de la función son:

$$F'(x) = (x^4 - 1) \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad F'(x) = 2x^5 - 2x$$

$$F''(x) = 10\,x^4 - 2$$

La primera derivada se anula y obtenemos:

$$F'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x^5 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\; x = 0,\; x = 1$$

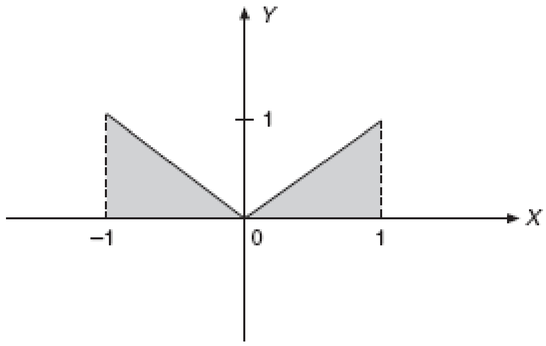
En el punto $(-1{,}0)$, al ser $F''(-1)=8>0$ existe un minimo relativo.

En el punto (1, 0), al ser $F''(1)=8>0$ existe un mínimo relativo.

En el punto (0, 2/3), al ser $F''(0)=-2<0$, existe un máximo relativo.

29. Tenemos que:

$$\int_{-1}^{1} |x| = 2\int_{0}^{1} x\,dx = [x]_0^1 = 1.$$



30. En cada caso queda:

a) haciendo el cambio $e^x = t$, obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 2}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t^2 + t + 2}\,dt =$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \int_1^e \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{7}}t + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}\,\frac{2}{\sqrt{7}}\,dt =$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{7}\left[arc\,tg \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{7}}t + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right]_1^e = \frac{2\sqrt{7}}{7}(1{,}18 - 0{,}85) = 0{,}249$$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx = [x^2\, sen\, x + 2x \cos x - 2\; sen\; x]_0^{\pi} = -2\pi$

c) Haciendo el cambio de variable $1 + x^2 = t^2$, obtenemos:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1 + x^2}\,dx = \int_1^2 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

31. La solución es:

$$\int_1^b |x-1| \cos x \, dx = \int_0^1 -(x-1) \cdot \cos x \cdot dx +$$

$$+ \int_1^b (x-1) \cdot \cos x \cdot dx = \int_0^1 -(x-1) \cdot \cos x \cdot dx +$$

$$+ \int_1^b (x-1) \cdot \cos x \cdot dx$$

Calculamos la integral indefinida por el método de interacion por partes:

$$\mathrm{I} = \int (x-1) \cdot \cos x \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = x - 1 \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$$

$$I = \int (x-1) \cdot \cos x \cdot dx = (x-1) \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot dx =$$

$$= (x-1) \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

$$\int_0^b |x-1| \cos x \cdot dx = -[(x-1) \operatorname{sen} x + \cos x]_0^1 +$$

$$+ [(x-1) \operatorname{sen} x + \cos x]_1^b = -\cos 1 + 1 +$$

$$+ [(b-1) \operatorname{sen} b + \cos b - \cos 1] = 1 + (b-1) \operatorname{sen} b +$$

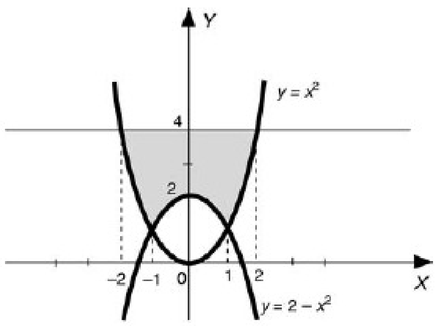
$$+ \cos b - 2 \cos 1$$

32. El área es:

La zona sombreada es la región de plano limitada por las curvas dadas.

$$\text{Área} = 2\left[\int_0^1 4 - (2 - x^2)\, dx + \int_1^2 (4 - x^2)\, dx\right] =$$

$$= 2\left[2x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{14}{3} + \frac{10}{3} = 8 \text{ u}^2$$

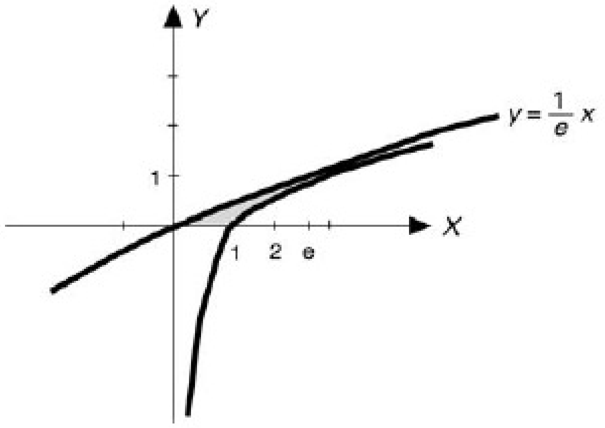


33. Ecuacion de la recta tangente a f(x) = ln x, en el punto (e, 1):

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m = \frac{1}{e}$$

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x \Rightarrow$$

la recta tangente tiene por ecuación $y = \frac{1}{e}x$



$$\text{Área} = \int_0^e \left(\frac{1}{e}x - \ln x\right)dx = \left[\frac{x^2}{2e} - (x\ln x - x)\right]_0^e =$$

$$= \frac{3e}{2} - \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \frac{3e}{2} - \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{3e}{2} - \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \frac{3e}{2}$$

34. La solución es:

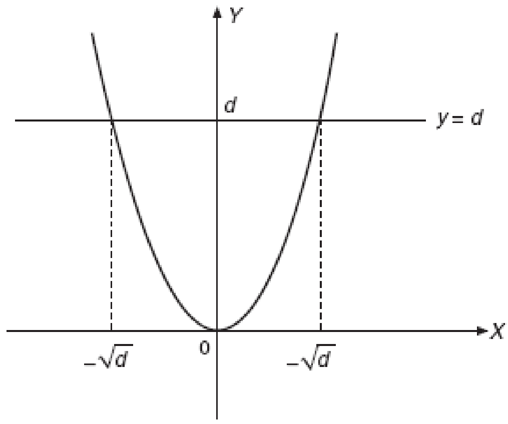
Llamando *d* a la distancia buscada, se cumple:

$$36 = 2\left\{d\sqrt{d} - \int_0^{\sqrt{d}} x^2\,dx\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = d\sqrt{d} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{d}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = d\sqrt{d} - \frac{d\sqrt{d}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = \frac{2d\sqrt{d}}{3} \Leftrightarrow d = 3$$



A una distancia de 3 unidades.

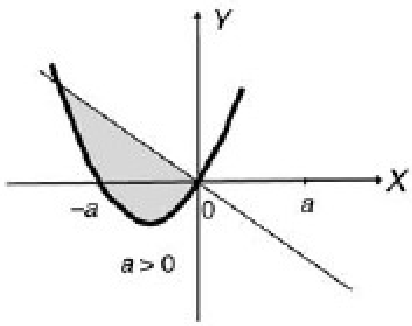
35. La parábola y la recta se cortan en los puntos:

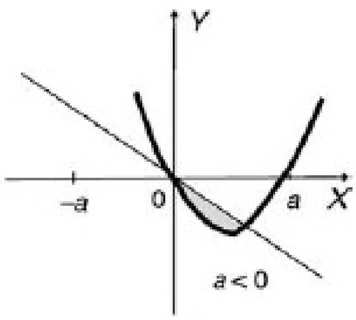
$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 + ax \\ y + x = 0 \end{array}\right\} x^2 + ax = -x \Rightarrow x^2 + x\,(a+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0;\ y = 0 \\ x = -a - 1;\ \ y = a + 1 \end{cases}$$

$$\text{Área pedida} = \left|\int_0^{-a-1} [-x - (x^2 + ax)]\,dx\right|$$

Ponemos el valor absoluto, pues el área puede ser diferente según sea a > 0 o a < 0.





La integral se resuelve del siguiente modo:

$$A = \left|\int_0^{-a-1} [-x - (x^2 + ax)]\, dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right]_0^{-a-1}\right| =$$

$$= \left|-\frac{(-a-1)^2}{2} - \frac{(-a-1)^3}{3} - \frac{a(-a-1)^2}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{-a^3 - 3a^2 - 3a - 1}{6}\right| = \left|-\frac{(a+1)^3}{6}\right|$$

Como el área es 36, entonces:

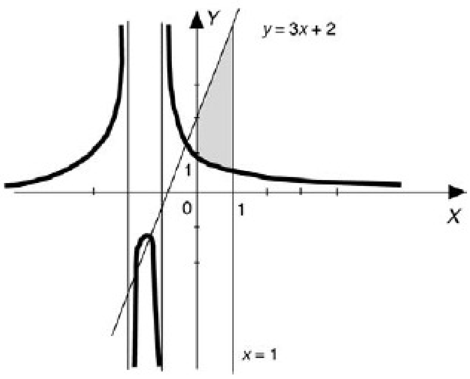
$$\left|-\frac{(a+1)^3}{6}\right| = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-(a+1)^3}{6} = 36 \Rightarrow a + 1 = -6 \Rightarrow a = -7 \\ \dfrac{-(a+1)^3}{6} = -36 \Rightarrow a + 1 = 6 \Rightarrow a = \ \ 5 \end{cases}$$

Las soluciones son: $\boxed{a = -7}$ o $\boxed{a = 5}$

36. La superficie viene dada del siguiente modo:

El área de la zona sombreada viene dada por:



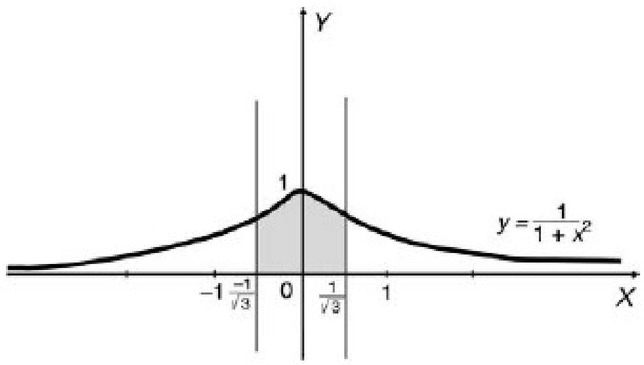
$$\text{Área} = \int_0^1 (3x + 2) - \left(\frac{2}{x^2 + 3x + 2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x + 2 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - 2\ ln\,|x + 1| + 2\ ln\,|x + 2|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} + 2 - 4\ ln\,2 + 2\ ln\,3 = \frac{7}{2} + ln\,\frac{9}{16} = 2{,}92$$

37. La superficie viene dada del siguiente modo:



Hallamos los puntos de inflexión:

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{6} \Rightarrow x = \pm\,\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Los puntos de inflexión son:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\text{Área} = 2\int_0^{1\backslash\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 2\left[arc\ tg\ x\right]_0^{1\backslash\sqrt{3}} = 2\left[\frac{\pi}{6} - 0\right] = \frac{\pi}{3} = 1{,}046\ u^2$$

PÁGINA 390

ACTIVIDADES FINALES

38. Calcula el valor de la integral $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

39. Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Determina:

a) El área encerrada entre su gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

b) El área encerrada entre la tangente en $x = \pi$ y los ejes coordenados.

40. Encuentra un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que:

a) Tiene un máximo relativo en $x = 1$.

b) Tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$.

c) Se verifica $\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{5}{4}$.

41. Halla todos los valores de a para los cuales $\int_0^a \frac{16}{15 + 2x - x^2}\,dx = \ln 25$.

42. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

a) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$.

b) Halla la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumple $F(1) = 1$.

43. Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza la gráfica de $f(x)$ y calcula $\int_1^3 x\, f(x)\,dx$.

44. Sea la función $f(x)$ definida y continua en $[-2, 2]$ tal que:

$$\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt$$

Utilizando el teorema del valor medio, ¿se puede asegurar que existen b y c en $[-2, 2]$ de modo que $f(b) = f(c)$ con $b \leq -1$ y $c \geq 1$?

45. Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda de la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

46. Dada la función $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ definida para $x \geq 1$, halla los valores de x en los cuales alcanza sus extremos relativos.

47. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$ tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2x\, f'(x)\,dx = 1$. Mediante la integración por partes calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$.

48. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c de modo que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 0$, la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 1$ sea paralela a la recta $y = 4x$, y el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ sea igual a 1.

49. Estudia la monotonía y la curvatura de la función: $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1) \cdot e^{-t^2}\,dt$.

38. Haciendo la integral definida por partes obtenemos:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right)_1^e = 1 - \frac{2}{e} = 0,2642$$

39. La solución es:

a) El área = $\int_0^\pi x\cdot\text{sen}x\cdot dx = (-x\cos x + \text{sen}\, x)_0^\pi = \pi$ unidades cuadradas.

b) la recta tangente en el punto dado tiene por ecuación $y = \pi(x-\pi)$

El área buscada es: Área = $\int_\pi^0 \pi(x-\pi)\,dx = \frac{\pi^3}{2} = 15,50314$ unidades cuadradas.

40. Imponiendo las condiciones del enunciado al polinomio tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ b = 0 \\ d = 1 \\ \frac{a}{4} + \frac{c}{2} + 1 = \frac{5}{4} \end{cases}$$ de donde obtenemos que $a = -{}^1\!/_5$; $b = 0$; $c = {}^3\!/_5$; $d = 1$

Por tanto el polinomio es $P(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{5}x + 1$

41. Resolvemos esta integral por descomposición en fracciones simples y obtenemos:

$$\int_0^a \frac{16}{15+2x-x^2}dx = \left[\ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2\right]_0^a = \ln\left(\frac{5(a+3)}{-3(a-5)}\right)^2$$

Igualando esta expresión a la que nos da el enunciado obtenemos que a puede tomar valores 3 y 9.

42. La solución es:

a) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}dx = \left[\frac{\sqrt{5x^2-4}}{5}\right]_0^2 = \frac{4-2i}{5}$ no tiene soluciones reales.

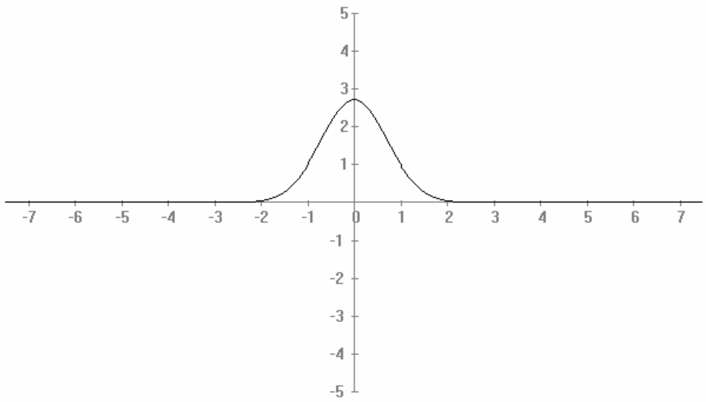
b) todas las primitivas son de la forma $\frac{\sqrt{5x^2-4}}{5} + C$ imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos que la primitiva buscada es $F(x) = \frac{\sqrt{5x^2-4}}{5} + \frac{4}{5}$

43. La función dad es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo en el punto (0,e) y dos puntos de inflexión en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{\frac{1}{2}}\right)$.

Tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 0.

Su grafica es:



Calculamos a integral pedida: $\int_1^3 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_1^3 x \cdot e^{1-x^2} \cdot dx = \left[\frac{e^{1-x^2}}{-2}\right]_1^3 = \frac{e-1}{2e^8} = 0{,}5$

44. En cada caso diremos:

- f(x) es continua en [-2,-1] , por lo que aplicando el teorema del valor medio tenemos que $\exists b \in [-2,-1]$ tal que: $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = f(b)(-1+2) = f(b)$

- f(x) es continua en [1,2] , por lo que aplicando el teorema del valor medio tenemos que $\exists c \in [1,2]$ tal que: $\int_1^2 f(t)dt = f(c)(2-1) = f(c)$

De ambas igualdades concluimos que $f(b) = f(c)$ con b $\leq$ -1 y c $\geq$ 1

45. La solución queda:

La cuerda tiene por ecuación $y - e = \frac{e^2-1}{2e}(x-1)$

Calculamos el area: $\int_{-1}^{e} \left[e + \frac{e^2-1}{2e}(x-1) - e^x \right] dx = \frac{2}{e} = 0{,}74$

46. La solución es:

Aplicando el teorema fundamental del calculo integral obtenemos: $F'(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Por lo que las abscisas de sus extremos relativos en un periodo son:

Máximo relativo en $x=\frac{\pi}{2}$ y mínimo relativo en $x=\frac{3\pi}{2}$.

47. La solución es:

Aplicando la integración por partes obtenemos: $\int_0^1 f(x)dx=\left[x\cdot f(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=f(1)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

48. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$\begin{cases} b=0 \\ 3+2a+b=4 \\ \frac{1}{4}+\frac{1}{6}+c=1 \end{cases}$ de donde $a=\frac{1}{2}$; $b=0$; $c=\frac{7}{12}$

49. La solución queda:

Aplicando el teorema fundamental del calculo integral obtenemos:

$F'(x)=\left(x^2-1\right)\cdot e^{-x^2}$ y $F''(x)=\left(4x-2x^3\right)\cdot e^{-x^2}$

La función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decreciente en (-1 , 1)

La función es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$

La función es cóncava hacia las y negativas en $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$