Unidad 15 – Integrales definidas. Aplicaciones

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se considera la función $f(x) = 16 - x^2$ en el intervalo $I = [-1, 4]$ y la partición de dicho intervalo dada por $P = \{-1, 0, 2, 4\}$.
   Encuentra de forma razonada el valor de las sumas superior e inferior correspondientes a f y a dicha partición P.

2. Una partición creciente verifica que $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ y $f(13) = 10$. Halla de forma razonada la suma superior y la inferior correspondientes a la función f en el intervalo $[1, 3]$ respecto a la partición $P = \{1, 2, 3\}$.

3. Haciendo uso del teorema del valor medio, resuelve las siguientes cuestiones:
   a) Halla el valor medio de $f(x) = x^2 + 3$ en el intervalo $(0, 3)$ y halla el punto en el que se alcanza.
   b) Halla el valor medio de $f(x) = -x^2 + 2x$ en el intervalo $(0, 2)$. Halla los puntos en que se alcanza este valor. El existir dos puntos donde se alcanza el valor medio, ¿contradice el teorema del valor medio?
   c) ¿Es aplicable el teorema citado a la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$?
   d) Calcula $\int_2^4 f(x)\,dx$ siendo $f(x) = 2x^2 - 3x$, y determina el valor medio de f en el intervalo $(2, 4)$, así como el valor de c correspondiente.

4. Obtén la derivada de las siguientes funciones:

   $F(x) = \int_0^x e^{\cos t}\,dt$ $\quad H(x) = \int_0^x t^2\,dt$ $\quad J(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3+t}\,dt$

   $G(x) = \int_{-3}^x |t+2|\,dt$ $\quad I(x) = \int_x^{x^3} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$ $\quad K(x) = \int_x^{x^2} \ln(t^2+4)\,dt$

5. Haciendo uso del teorema fundamental del cálculo integral, resuelve las cuestiones siguientes:
   a) Para la función $F(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt$, calcula $F'(0)$.
   b) Encuentra los extremos de la función $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$ en el intervalo $[2, 10]$.
   c) Halla el punto de $[0, 2]$ en el que la función $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}\,dt$ alcanza su mínimo.
   d) Para $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\,dt$, calcula $F'(x)$.
   e) Para $G(x) = \int_1^x e^{-t^2}(1+t^2)\,dt$, halla $G'(x)$.
   f) La función $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, ¿tiene puntos de inflexión? En caso afirmativo halla las abscisas de estos puntos.
   g) Calcula $\int_x^{x^2} e^{t^2/2}\,dt$.

PÁGINA 387

6. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^6 \frac{4\,dx}{\sqrt{x+3}}$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx$

c) $\int_0^8 \frac{3\,dx}{\sqrt{1+x}}$

d) $\int_2^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

e) $\int_0^{\pi^2} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx$

f) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

g) $\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$

h) $\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$

i) $\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}}dx$

j) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx$

k) $\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2+2)^4}dx$

l) $\int_0^4 \sqrt{9+4x}\,dx$

m) $\int_0^2 4x^2\,(1+x^3)^5\,dx$

n) $\int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{2x}\,dx$

ñ) $\int_0^1 (x - e^x \cos x)\,dx$

o) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

p) $\int_3^6 x\sqrt{x-2}\,dx$

q) $\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}dx$

r) $\int_3^5 \frac{\ln x}{x}dx$

s) $\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x\,dx$

t) $\int_0^b \frac{dx}{x+b}$ con $b > 0$

u) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$

v) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$

w) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

x) $\int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1}dx$

y) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

z) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \ln x\,dx$

7. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$

b) $\int_0^2 x\left[|x-1|+1\right]dx$

c) $\int_{-2}^2 |x^2-1|\,dx$

d) $\int_{-2}^2 \big||x|-1\big|\,dx$

e) $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x\,dx$

f) $\int_0^2 |2x-1|\,dx$

8. Calcula las siguientes integrales mediante la interpretación geométrica:

$I = \int_{-50}^{50} (x^{33} + x^{21})\,dx$ $\qquad$ $J = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^5 (8x^3 + x)\,dx$

9. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = 3x + 2$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Comprueba el resultado por métodos geométricos.

10. Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y el eje OX.

PÁGINA 388

ACTIVIDADES FINALES

11. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = -\frac{1}{2}x^2$.

12. Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 8x^2 + 7x$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 7$.

13. Halla el área del recinto limitado por la curva $y = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

14. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y^2 = 6x$, $x^2 = 6y$

b) $y^2 = 9x$, $y^2 = 4(x + 1)$

c) $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$

15. Determina el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x\,e^{-x}$ y $g(x) = x^2\,e^{-x}$.

16. Calcula el área de la región limitada por la hipérbola $xy = 36$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 6$ y $x = 12$.

17. Halla, utilizando la integral definida, el área del círculo limitado por la curva de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ y el área encerrada por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

18. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje OX los recintos siguientes:

a) $f(x) = 2x + 1$; $x = 0$, $x = 4$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $x = 0$, $x = \pi$

c) $f(x) = x - x^2$; $x = 0$, $x = 1$

d) $f(x) = e^x$; $x = 0$, $x = 1$

19. Calcula el volumen engendrado al girar alrededor de OX los recintos limitados por las gráficas que se indican:

a) $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = 1 - x^2$

c) $f(x) = \sqrt{2x}$; $g(x) = \frac{2x + 3}{4}$

d) $f(x) = x^2$; $g(x) = -3x - 2$

20. Halla el volumen de la región determinada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 3$, al girar alrededor de OX.

21. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX el recinto plano determinado por dicho eje y la curva $y = x - x^3$.

22. A partir de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, obtén el volumen de una esfera.

23. Calcula el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa al eje OX.

PÁGINA 389

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

24. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos $P = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$, calcula razonadamente cuánto valen la suma superior y la suma inferior correspondientes a dicha partición.

25. Haciendo uso del teorema del valor medio del cálculo integral, calcula el valor de c para la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

26. Dada la función $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$, determina $F'(x)$ y $F''(x)$.

27. Para la función $F(x) = \int_0^{x} \cos t^2\,dt$, determina:

a) $F'(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt$

28. Sea $F(x) = \int_1^{x^2} (t^2 - 1)\,dt$. Halla los posibles puntos extremos de dicha función.

29. Calcula la siguiente integral definida: $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$.

30. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 2}dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1 + x^2}\,dx$

31. Determina, en función de $b > 1$, el valor de la integral $\int_0^b |x - 1| \cos x\,dx$.

32. Dibuja la región del plano limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$. Calcula su área.

33. Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje OX y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x = e$.

34. Una varilla se desliza por el interior de la parábola $y = x^2$ paralelamente al eje OX hasta determinar una superficie de 36 m². Encuentra a qué distancia del eje OX se detiene la varilla.

35. Calcula el valor de a sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$, es 36.

36. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 3x + 2$ y la función $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$.

37. Calcula el área comprendida entre la curva $y = \frac{1}{1 + x^2}$, el eje OX y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

PÁGINA 390

ACTIVIDADES FINALES

38. Calcula el valor de la integral $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

39. Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Determina:

    a) El área encerrada entre su gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

    b) El área encerrada entre la tangente en $x = \pi$ y los ejes coordenados.

40. Encuentra un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que:

    a) Tiene un máximo relativo en $x = 1$.

    b) Tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$.

    c) Se verifica $\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{5}{4}$.

41. Halla todos los valores de a para los cuales $\int_0^a \frac{16}{15 + 2x - x^2}\,dx = \ln 25$.

42. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

    a) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$.

    b) Halla la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumple $F(1) = 1$.

43. Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza la gráfica de $f(x)$ y calcula $\int_1^3 x\, f(x)\,dx$.

44. Sea la función $f(x)$ definida y continua en $[-2, 2]$ tal que:

$$\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt$$

Utilizando el teorema del valor medio, ¿se puede asegurar que existen b y c en $[-2, 2]$ de modo que $f(b) = f(c)$ con $b \leq -1$ y $c \geq 1$?

45. Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda de la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.

46. Dada la función $F(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ definida para $x \geq 1$, halla los valores de x en los cuales alcanza sus extremos relativos.

47. Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$ tal que $f(1) = 0$ y $\int_0^1 2x\, f'(x)\,dx = 1$. Mediante la integración por partes calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$.

48. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c de modo que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 0$, la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 1$ sea paralela a la recta $y = 4x$, y el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ sea igual a 1.

49. Estudia la monotonía y la curvatura de la función: $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1) \cdot e^{-t^2}\,dt$.