Unidad 2 – Determinantes

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

3. Encuentra el número de inversiones que existen en las siguientes permutaciones de números naturales del orden que se indica:

a) orden 4: 1243, 3142 y 1324. b) orden 5: 13542, 53241 y 13254. c) orden 6: 213654, 341652 y 231645.

4. Halla el signo de los términos que siguen, pertenecientes al desarrollo de un determinante de orden 5:

a) $a_{25} \cdot a_{51} \cdot a_{44} \cdot a_{13} \cdot a_{32}$ b) $a_{51} \cdot a_{22} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{14}$

5. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6. Sea A una matriz cuyas filas son F_1, F_2, F_3, y su determinante vale 4. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz B cuyas filas son F_3, $F_1 - 2F_2$, $-F_1$?

7. Prueba, sin desarrollar, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} bc & \frac{2}{a} & a \\ ac & \frac{2}{b} & b \\ ab & \frac{2}{c} & c \end{pmatrix}$

8. Prueba, sin desarrollar, que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

9. Comprueba que el determinante A_1 vale 0 y que el determinante A_2 es divisible por 5, sin calcularlos, a partir de las propiedades de los determinantes, siendo:

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

PÁGINA 53

■ 10. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Halla los menores complementarios α_{11}, α_{23}, α_{32} y α_{21}, si existen.
b) Halla, si existen, los adjuntos de los elementos que ocupan los lugares 11, 23, 32 y 21.
c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

■ 11. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

■ 12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$

■ 13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

■ 14. Determina, según los valores de m, el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & m \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & m \end{pmatrix}$

■ 15. Si A es una matriz de orden 3 y tal que $\det(A) = 2$, calcula:

a) $\det(M\,A\,M^{-1})$ b) $\det(5A)$ c) $\det(2A^{-1})$ d) $\det(\mathrm{Adj}(A))$

■ 16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: a) Calcula A^{-1}. b) Resuelve la ecuación $\det(A^{-1} - xI) = 0$.

■ 17. ¿Para qué valores del parámetro no es invertible la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$?

■ 18. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.
b) La matriz A verifica $AA^t = I$. Halla $\det(A)$.
c) Dos matrices A y B son inversas la una de la otra. Si $\det(A) = 3$, ¿cuánto vale $\det(B)$?

PÁGINA 54

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

19. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

21. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

22. Halla el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro a. Halla, si existe, la matriz inversa de A en los casos en que $a = 0$ y $a = 1$.

23. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Si A es una matriz cuadrada de orden n, A^t su traspuesta y A^{-1} su inversa, ¿qué relaciones tienen los determinantes $|A|$, $|A^t|$ y $|A^{-1}|$? ¿Por qué?

b) Si el determinante de una matriz cuadrada de orden n vale D, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz que se obtiene multiplicando por 5 todos los elementos de la anterior?

c) Si X es una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la igualdad $X^2 = 2X$, ¿cuánto vale el determinante de X?

24. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$, averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m = 1$.

25. Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

26. Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que A admite inversa y obtén esta inversa en función de A.