Unidad 4 – Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Demuestra que el conjunto de matrices 2 × 2 es un espacio vectorial real respecto a las operaciones suma de matrices y producto de un número real por una matriz, dadas por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c+c_1 & d+d_1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cdot a & t\cdot b \\ t\cdot c & t\cdot d \end{pmatrix}$$

2. Sea $(V, +, \bullet_{\mathbb{R}})$ un espacio vectorial real. Demuestra que son ciertas las siguientes propiedades:

   a) $(t - s)\cdot \vec{v} = t\cdot \vec{v} - s\cdot \vec{v}$ $\quad \forall t, s \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{v} \in V$

   b) $t\cdot(\vec{v} - \vec{w}) = t\cdot \vec{v} - t\cdot \vec{w}$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

   c) Si $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ $\quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

   d) $t\cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$ o $\vec{v} = \vec{0}$

3. Estudia cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

   a) $A = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

   b) $B = \{(x, y, -x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

   c) $C = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

   d) $D = \{(x, y, z) \mid x + y = 3;\ \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

4. Estudia si el conjunto de matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices 2 × 2.

5. En el espacio vectorial real de los polinomios $\{\mathbb{P}_2(x), +, \bullet_{\mathbb{R}}\}$ de grado menor o igual que 2, estudia si el subconjunto $\{P'(x), P''(x)\}$, siendo $P'(x)$ y $P''(x)$ los polinomios derivados de $P(x)$ y $P'(x)$, respectivamente, es un subespacio vectorial.

6. En el espacio vectorial real $(\mathbb{R}^3, +, \bullet_{\mathbb{R}})$ consideramos los vectores $\vec{v} = (1, 2, 0)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$. Encuentra un vector $\vec{u}$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) De forma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente dependientes.

   b) De forma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente independientes.

7. Halla el valor o valores de a de modo que el vector $(1, -6, a)$ sea linealmente independiente de los vectores $(2, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$. ¿Cuánto ha de valer a para que el vector dado sea linealmente dependiente de los vectores $(2, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$?

8. Halla el valor de x para que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente dependientes:

$$(x, 2, 0),\ (x, 3x, 5) \text{ y } (1, x, 5)$$

9. Estudia si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ $\{(1, 2, 3), (0, 2, 4), (0, 2, 0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En caso afirmativo halla las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ respecto de ella.

PÁGINA 103

10. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2 $\{\mathbb{P}_2(x), +, \bullet_{\mathbb{R}}\}$, estudia si los siguientes polinomios forman o no una base: $A(x) = x^2 + 1$; $B(x) = x^2 + x$; $C(x) = x + 1$. En caso afirmativo halla las coordenadas del polinomio $M(x) = x^2 - x + 2$ respecto a dicha base.

11. Halla una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \mid x - 2z = 0;\quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$T = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$E = \{(x, y, z) \mid x + y = 0; y + z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

12. Sea la aplicación:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\rightsquigarrow (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2) \end{aligned}$$

Demuestra que es una aplicación lineal, halla sus ecuaciones y su matriz asociada.

13. Halla las ecuaciones de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(-1, 1, 0) = (-1, 0) \qquad f(0, 0, 1) = (1, -1) \qquad f(1, 3, -1) = (0, 1)$$

14. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de matriz asociada $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Halla $f(3, 5, -7)$ y $f^{-1}(1, 1)$.

15. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(e_1) = (2, 5, 0)$, $f(e_2) = (1, 1, 1)$ y $(3, 2, 1) \in Ker\, f$, siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Halla $f(e_3)$, la matriz asociada a esta aplicación lineal, su núcleo y su imagen.

16. Halla el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(0, 1) = (1, 1, -2)$ y $f(-1, 1) = (2, -2, -4)$.

17. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$. Halla el núcleo, la imagen y una base y la dimensión de estos.

18. Dadas las aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\rightsquigarrow (2x_1, x_1 - x_2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\rightsquigarrow (x_1 + x_2, -x_1) \end{aligned}$$

Halla la aplicación compuesta $g \circ f$. ¿Esta aplicación es lineal? En caso afirmativo estudia qué relación existe entre su matriz asociada y las matrices asociadas a las aplicaciones lineales g y f.

19. Estudia si es lineal la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En caso afirmativo halla su núcleo.

PÁGINA 104

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

20. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, siendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Halla:

    a) La matriz de esta aplicación lineal.

    b) El núcleo y su dimensión.

    c) La imagen y una base de la misma.

    d) La imagen del vector $\vec{v} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$.

21. Prueba que el subconjunto T de $\mathbb{R}^3$ dado por $T = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Halla una base y su dimensión.

22. Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(1, 2) = (-2, 1, 0)$; $f(1,0) = (6, -1, 2)$. Halla $f^{-1}(2, 7, -7)$.

23. Prueba que si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, y $\vec{w}$ son linealmente independientes también lo son los vectores $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

24. Razona para qué valor o valores de a los vectores $(1, 1, 0)$, $(a, 1, 1)$ y $(1, a, 0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

25. En $\mathbb{R}^3$ tomamos el subconjunto de vectores $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. ¿Es este subconjunto un subespacio de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo halla una base y su dimensión.

26. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que 3. Sean los polinomios:

    $$P_1(x) = 1 - x \quad ; \quad P_2(x) = x^2 + x \quad ; \quad P_3(x) = 1 - x^2 \quad ; \quad P_4(x) = x + x^3$$

    Prueba que estos polinomios constituyen una base de V. Determina las coordenadas del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en dicha base.

27. Sea W el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Sea f la aplicación:

    $$\begin{aligned} f: W &\longrightarrow W \\ P &\rightsquigarrow P' \end{aligned}$$

    siendo P' el polinomio derivado del polinomio P. Demuestra que f es lineal y halla su núcleo.

28. Una aplicación g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ viene dada por $g(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$, $g(0, 1, 0) = (3, 0, -1)$, y su núcleo está engendrado por el vector $(1, 2, -1)$. ¿Qué vectores de $\mathbb{R}^3$ coinciden con su imagen en esta aplicación?

29. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos de la siguiente forma:

    $$A = \{(x, y, z) \mid x \cdot z = 3; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

    $$B = \{(x, y, z) \mid x = y^2; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

    Estudia si son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.