Vectores en el espacio

2º Bachillerato

Ana Mª Zapatero


VECTORES EN EL ESPACIO. RECTAS Y PLANOS. PROPIEDADES MÉTRICAS
Espacio
Vectores en el espacio
Sistema de referencia
Propiedades métricas
Operaciones elementales
Productos
Vector definido por dos puntos
Elementos geométricos
Ángulos
Distancias
Proyecciones ortogonales
Perpendicular común
Áreas y volumenes
Combinaciones lineales
Dependencia e independencia
Escalar
Vectorial
Mixto
Propiedades
Módulo
Ángulos
Bases
Bases especiales
Coordenadas
Rectas
Planos
Posiciones relativas

El conjunto R³

Es un conjunto de ternas ordenadas de números reales

$$R^3 = \{ (\boxed{x}, \boxed{y}, \boxed{z}) \, / \, x \in R, y \in R, z \in R \}$$

Primera componente

Segunda componente

Tercera componente

Igualdad de ternas:

$$(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{array}}$$

Operaciones en R^3

Suma en R^3 (suma de ternas)

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

Es una operación interna en R^3. Con esta operación el conjunto verifica las propiedades: asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y opuesto

Producto de un número real por una terna de R^3

$$a(x, y, z) = (ax, ay, az)$$

Es una operación externa en R^3, sobre el cuerpo R
Cumple las dos propiedades distributivas, la asociativa y de la unidad

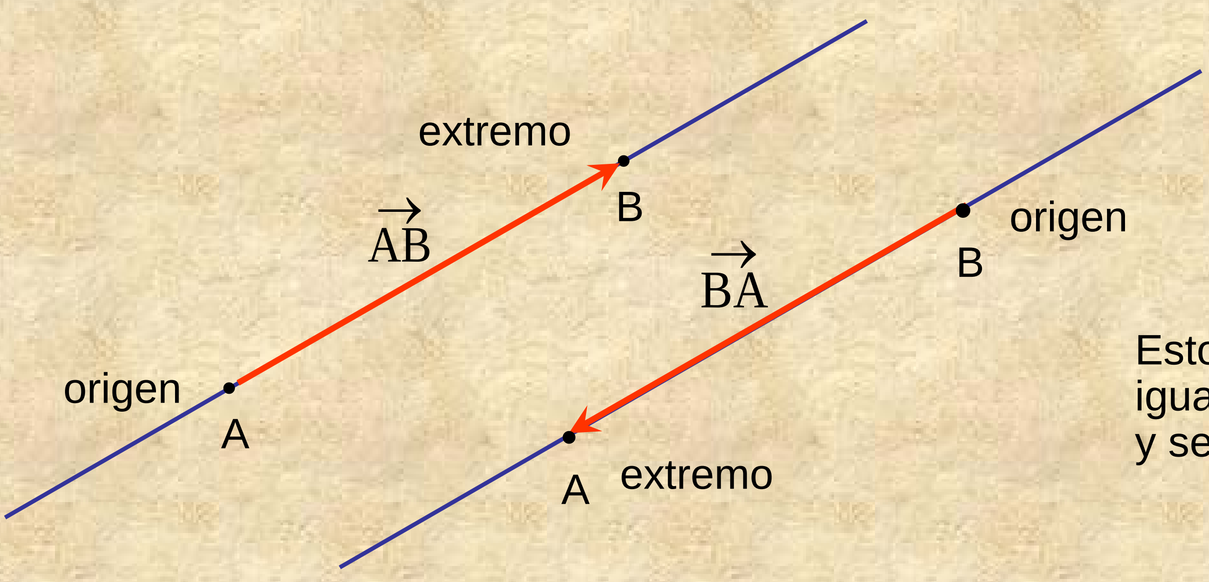
EL CONJUNTO DE LAS TERNAS DE R^3 SOBRE EL CUERPO R CON ESTAS OPERACIONES Y PROPIEDADES TIENE ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL $(R^3, +, \cdot R)$

Vectores fijos en el espacio

Un vector fijo es un segmento de recta orientado. El primero de sus puntos recibe el nombre de **origen**, y el segundo, **extremo**.
Cualquier punto A del espacio se considera como un vector fijo en el que coinciden origen y extremo.

Todo vector fijo está **caracterizado** por su:

- **Módulo**: es la longitud del segmento.
- **Dirección**: determinada por la recta que contiene al segmento y todas sus paralelas.
- **Sentido**: para cada dirección hay dos sentidos posibles. El que corresponde al definido por el recorrido desde A hasta B y el definido por el recorrido desde B hasta A.



Estos dos vectores tienen igual módulo, igual dirección y sentido contrario.

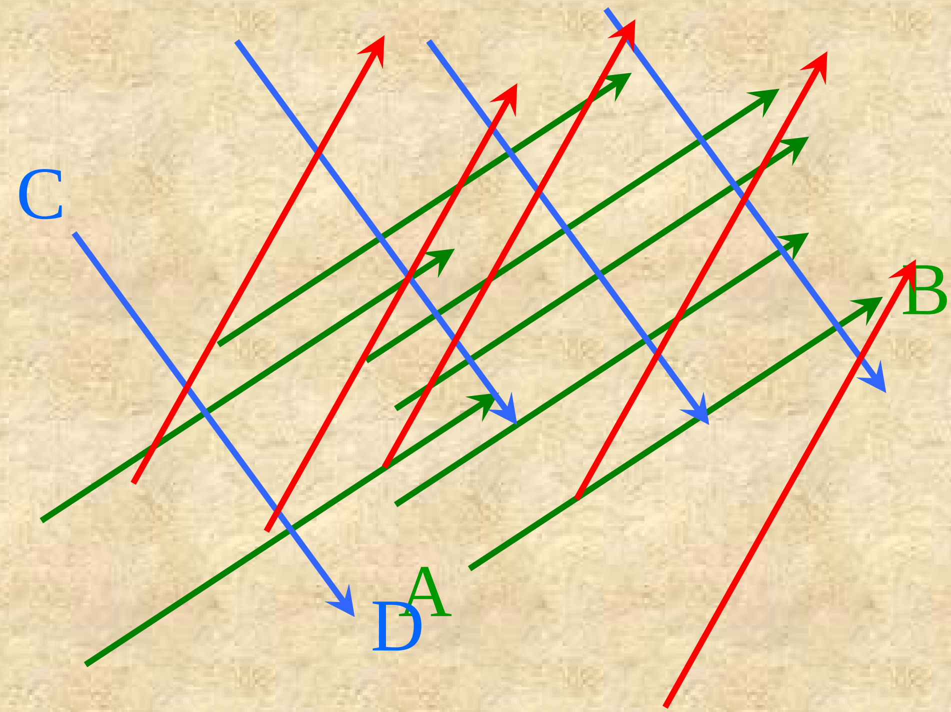
Vector libre

- Se dice que dos vectores fijos no nulos son **equipolentes** **si y sólo si** tienen igual módulo, igual dirección e igual sentido. Esta relación es de equivalencia y clasifica al conjunto de los vectores libres en clases de equivalencia llamadas **VECTOR LIBRE**.

- Todos los vectores nulos son equipolentes entre sí.

- Dado un vector fijo, **el conjunto de todos los vectores equipolentes con él**, se dice que forman un **vector libre** (todos tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido).

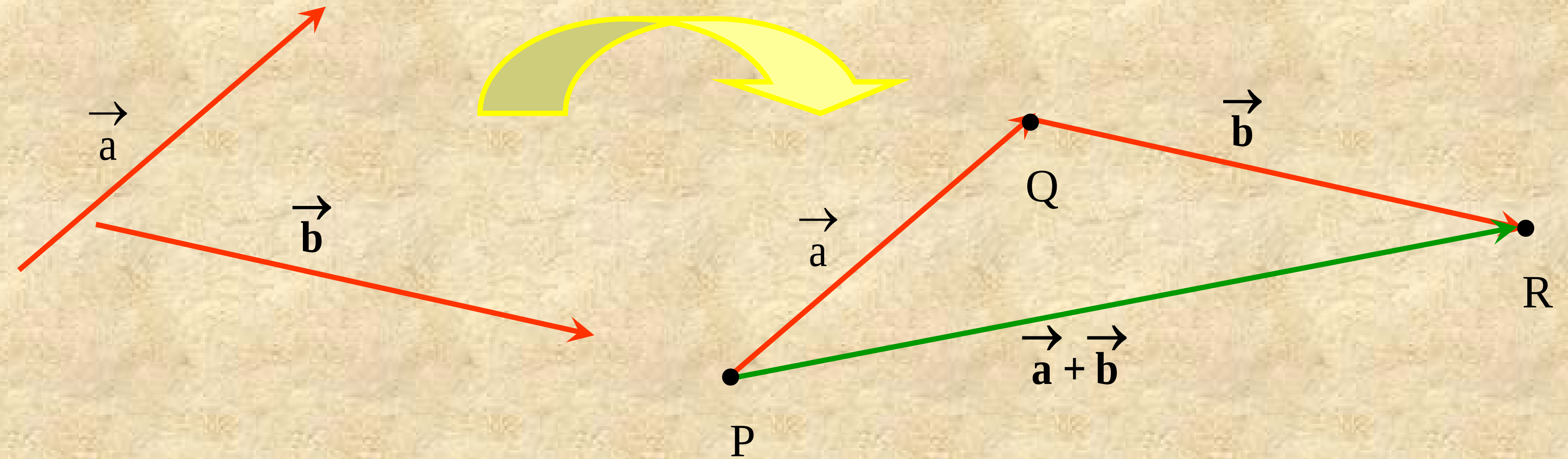
- El conjunto de los vectores libres del espacio se denomina $\mathbf{V_3}$.



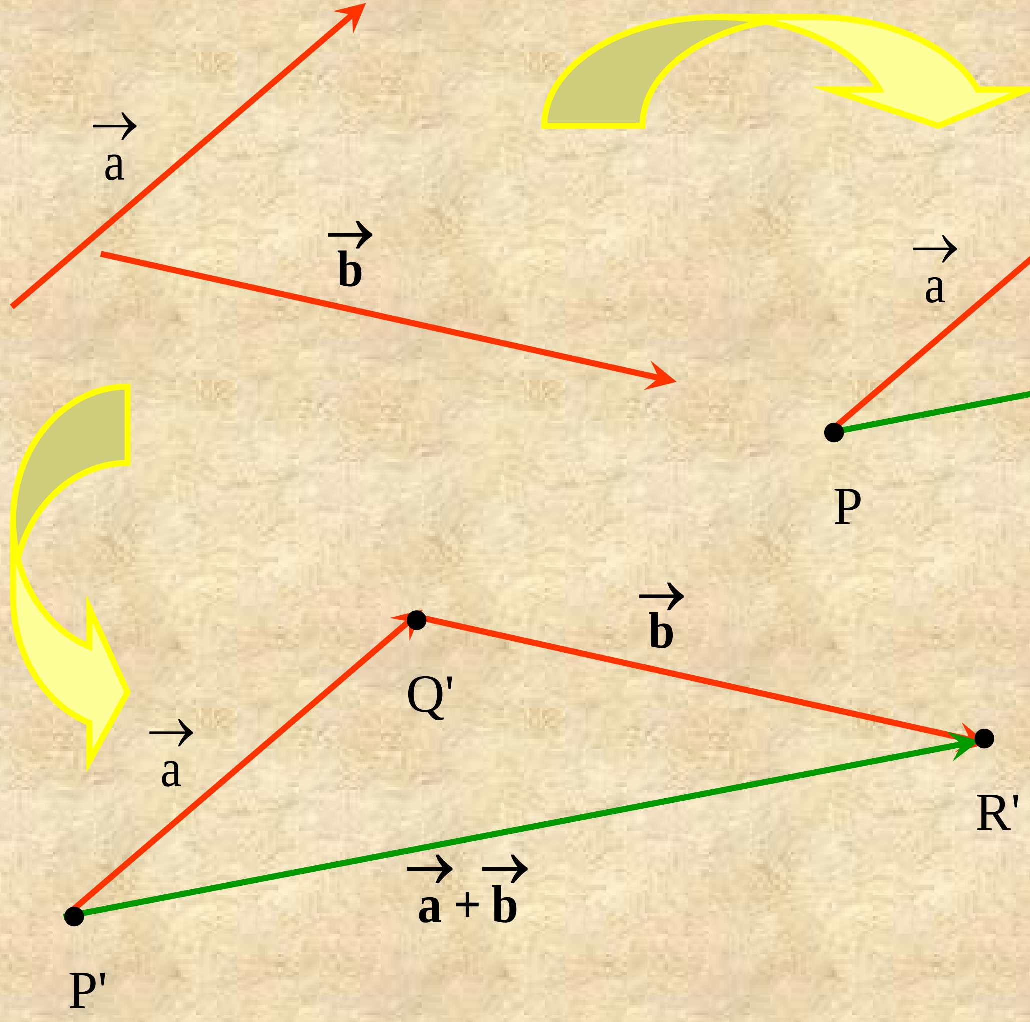
- **El vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $[\overrightarrow{AB}] = \vec{u}$**
- **El vector fijo $\overrightarrow{CD}$ es un representante del vector libre $[\overrightarrow{CD}] = \vec{v}$**

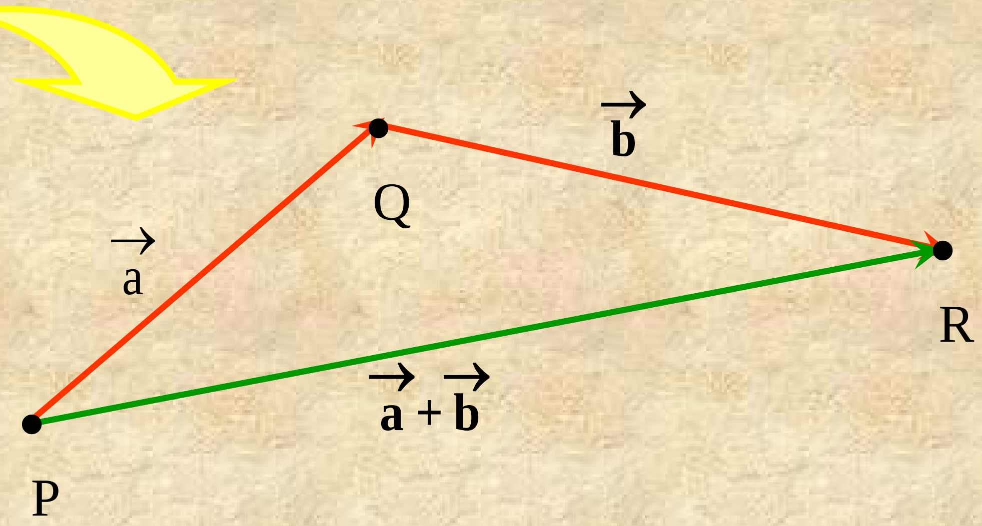
Suma de vectores libres

En el conjunto V_3 de todos los **vectores libres** se define la suma de dos vectores de la siguiente manera:
Se eligen dos representantes de manera que el origen del 2º coincida con el extremo del 1º y el vector suma se obtiene uniendo el origen del 1º con el extremo del 2º



La suma de dos vectores: no depende del punto inicial

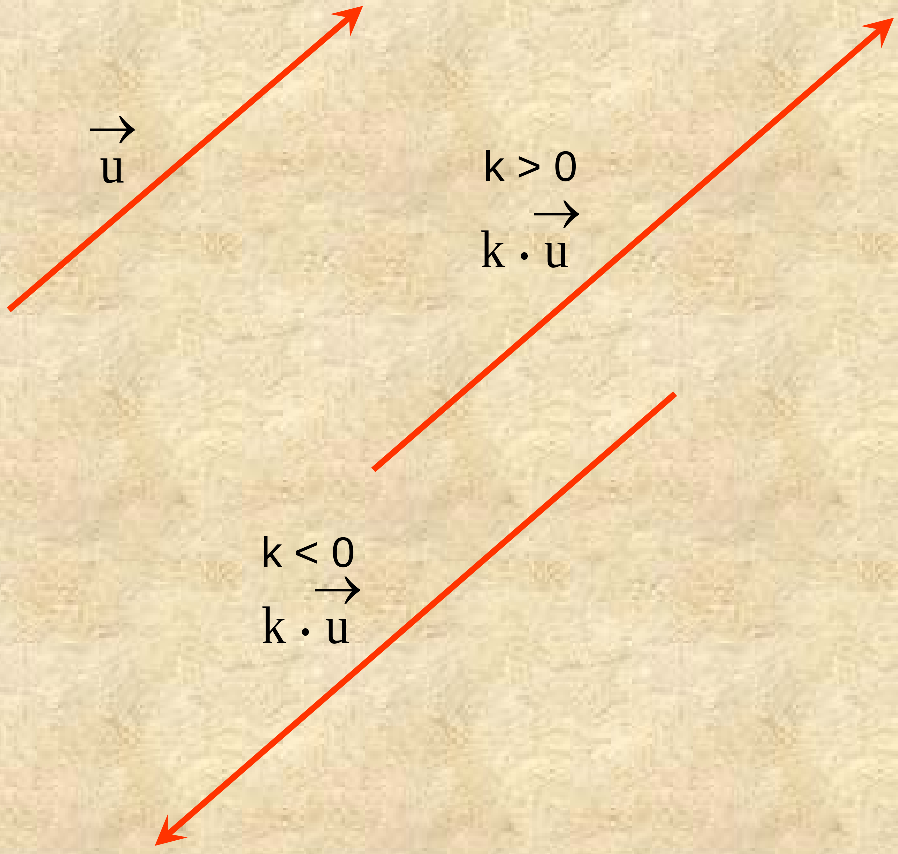




Los vectores PR y el P’R’ son representantes del mismo vector libre con lo que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido

Producto de un número por un vector libre

En el conjunto **V_3** de todos los vectores libres **se define el producto de un número k≠0 por un vector libre** de la siguiente manera: **Es un vector con la misma dirección, su módulo queda multiplicado por k. El sentido depende del signo de k**



- k > 0: el módulo del vector queda multiplicado por k
- El sentido permanece

- k < 0: el módulo del vector queda multiplicado por – k
- El sentido cambia

Si $k = 0$ ó $\vec{u} = \vec{0}$ entonces $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$

Espacio vectorial. Definición

- Decimos que el conjunto **V** (no vacío) es un **espacio vectorial** sobre el cuerpo **K** si tiene definidas dos operaciones:

- **Suma** es una operación interna que verifica las propiedades, asociativa, elemento neutro, elemento simétrico y conmutativa, es decir, es un **grupo conmutativo**

- **Producto por un escalar** es una operación externa en la que se multiplica un escalar del cuerpo **K** por un vector de **V** y que verifica:
  - **1)** 1 **·** ·**v** = **v**
  - **2)** λ **·** **(**μ **·** **u)** **= (**λ **·** μ) **· u**
  - **3) (**λ + μ) **· u** = λ **· u +** μ **·u**
  - **4)** λ (**u + v) =** λ **· u +** λ **· v**

Entonces (V, +, · K) es un espacio vectorial

Definición y Caracterización de subespacios

U n subconjunto **S** de **V** se dice que es **subespacio vectorial** si es no vacío y es espacio vectorial con las operaciones inducidas de **V**

Caracterización de los subespacios

- Un subconjunto **S** de **V** es subespacio vectorial si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

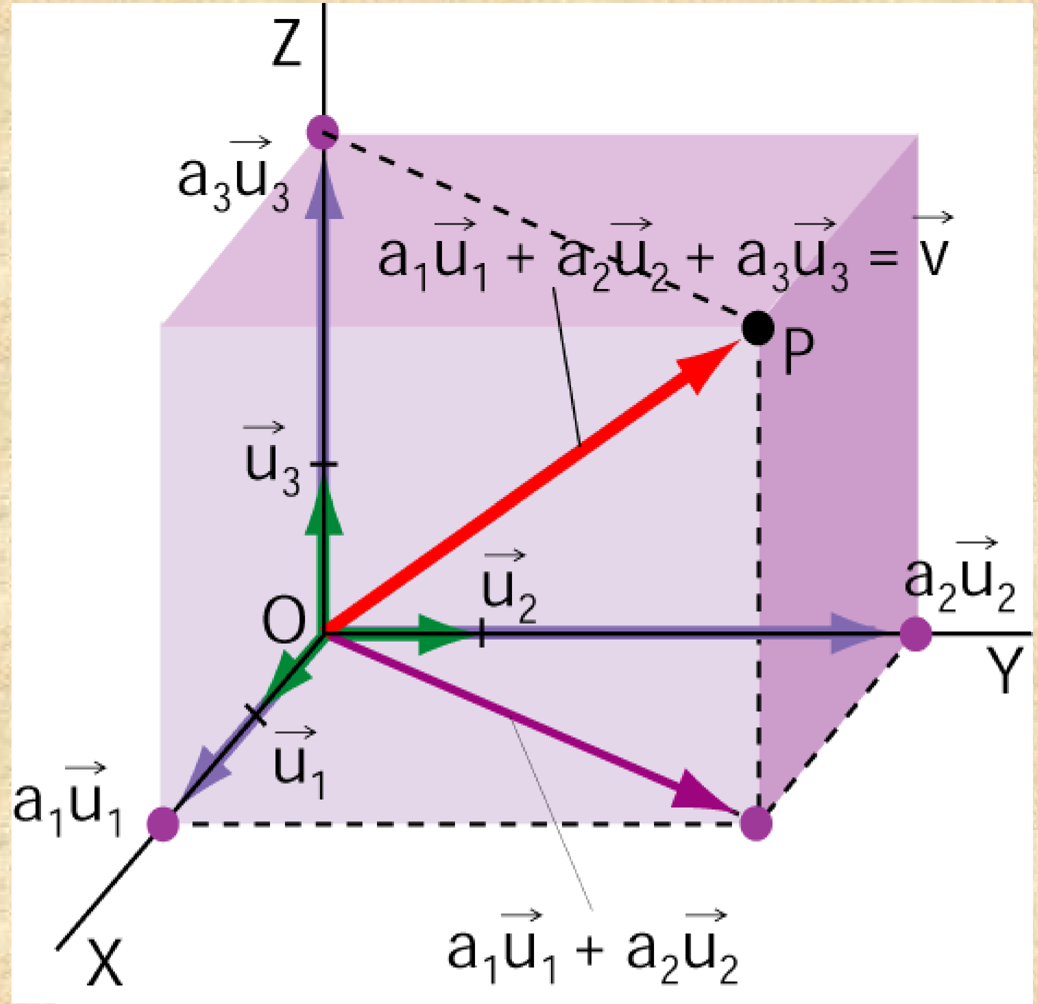
  a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{S} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}$

  b) $\lambda \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{S} \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{S}$

- Un subconjunto **S** de **V** es subespacio vectorial si y sólo si se cumplen la siguiente condición:

  $\lambda\, \mathbf{u} + \mu\, \mathbf{v} \in \mathbf{S} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S} \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

Combinación lineal de vectores



Un vector $\vec{\mathbf{v}}$ de V^3 es **combinación lineal** de los vectores $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$ y $\vec{\mathbf{u}}_3$ de V^3 si puede expresarse así:

$$\vec{\mathbf{v}} = a_1\vec{\mathbf{u}}_1 + a_2\vec{\mathbf{u}}_2 + a_3\vec{\mathbf{u}}_3$$

siendo a_1, a_2, a_3 números reales

Dependencia e independencia de vectores

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots\ldots, \vec{u}_n$ de V ^{3} son **linealmente dependientes** si al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

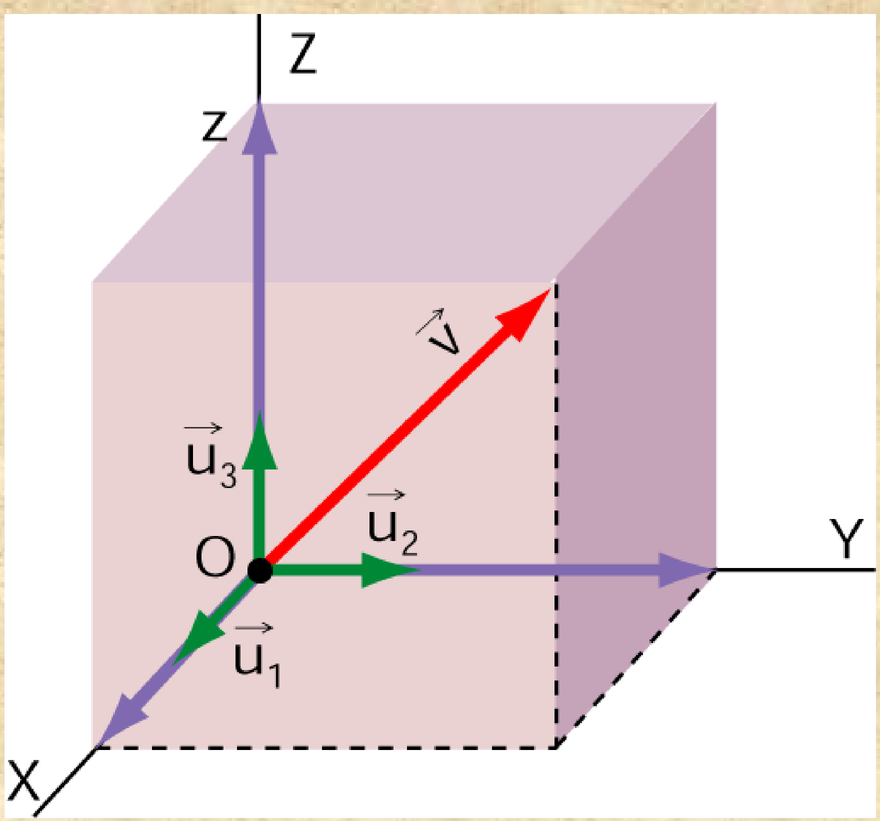
$$u_i = a_1 u_1 + \ldots\ldots + a_{i-1}\, u_{i-1} + a_{i+1}\, u_{i+1} + \ldots\ldots a_n\, u_n$$

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots\ldots, \vec{u}_n$ de V ^{3} son **linealmente dependientes** si existen $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ no todos nulos de manera que:

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n = \vec{0}$$

Si un conjunto de vectores no es linealmente dependiente, se dice que es **independiente**

Bases de V^3

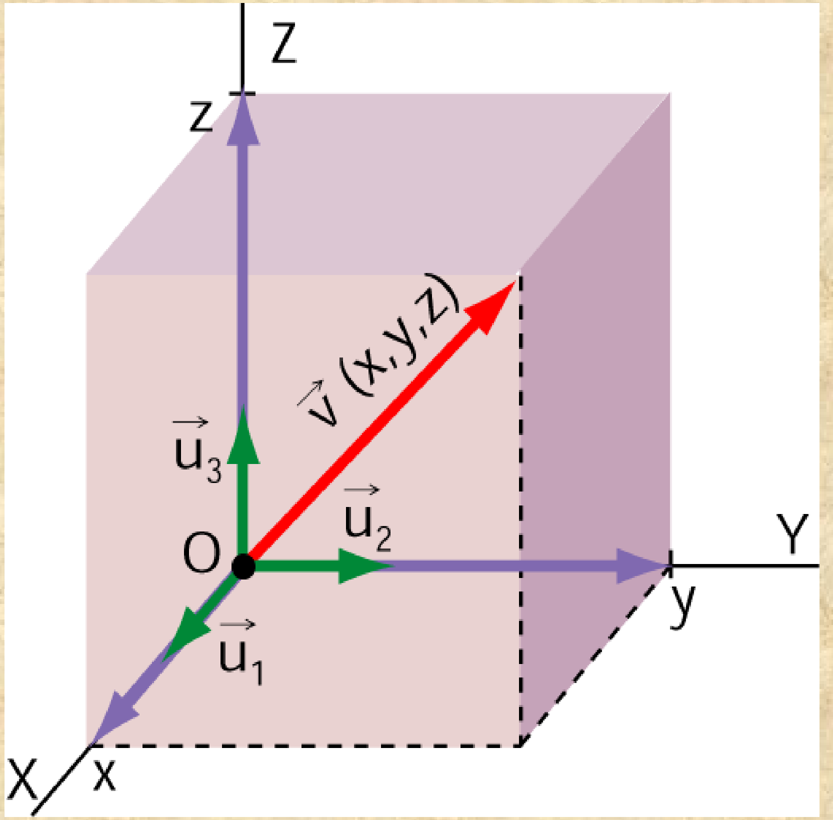


El conjunto B = { $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$} de V^3 forma una base ya que:

- **Son linealmente independientes.**
- **Cualquier vector** de V^3 **se puede expresar como combinación lineal de ellos**.

Además: tres vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ no nulos y no coplanarios forman una base de V^3.

Coordenadas de un vector



(x, y, z) son las coordenadas del vector $\vec{\mathbf{v}}$ respecto de la base B = { $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$} de V^3 si se verifica que:

$$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

- **Las coordenadas de un vector respecto a una base son únicas**.

- A cada vector $\vec{v}$ se le hace corresponder una única terna (x, y, z) y viceversa.

Las coordenadas de un vector respecto a una base son únicas

- Dada una base del espacio vectorial $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y un vector cualquiera $\vec{v}$
- D./ Supongamos que el vector $\vec{v}$ tiene dos coordenadas distintas,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+a_3\vec{u}_3\\ \vec{v}=b_1\vec{u}_1+b_2\vec{u}_2+b_3\vec{u}_3\end{array}\right\}\Rightarrow a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+a_3\vec{u}_3=b_1\vec{u}_1+b_2\vec{u}_2+b_3\vec{u}_3$$

$$a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+a_3\vec{u}_3-b_1\vec{u}_1-b_2\vec{u}_2-b_3\vec{u}_3=\vec{0}$$

$$(a_1-b_1)\vec{u}_1+(a_2-b_2)\vec{u}_2+(a_3-b_3)\vec{u}_3=\vec{0}$$

Como los vectores son una base, en particular son independientes y por ello, de toda combinación lineal igualada a cero se deduce que os coeficientes son cero

$$\mathrm{a}_1-\mathrm{b}_1=0 \qquad \mathrm{a}_2-\mathrm{b}_2=0 \qquad \mathrm{a}_3-\mathrm{b}_3=0$$

$$\text{luego}\quad \mathrm{a}_1=\mathrm{b}_1 \qquad \mathrm{a}_2=\mathrm{b}_2 \qquad \mathrm{a}_3=\mathrm{b}_3$$

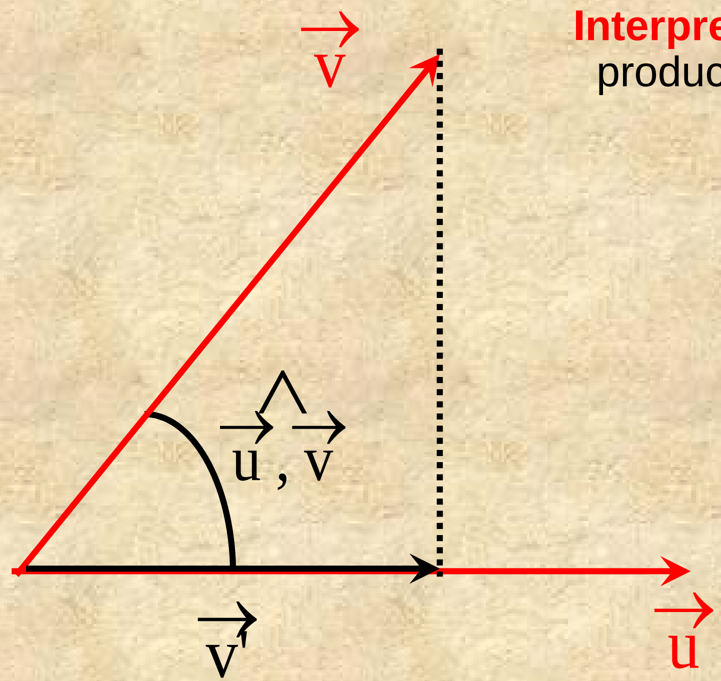
y por tanto las coordenadas son únicas

Producto escalar de dos vectores libres

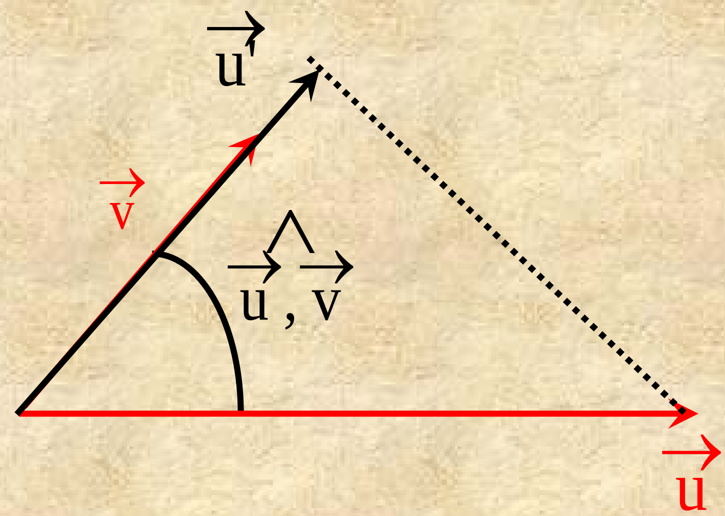
El producto escalar de dos vectores **es un nº** obtenido multiplicando el módulo del primer vector por el módulo del segundo vector por el coseno del ángulo que forman

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \text{ si } \vec{u} \text{ o } \vec{v} \text{ no son nulos} \\ 0 \text{ si } \vec{u} \text{ ó } \vec{v} \text{ son nulos} \end{cases}$$

Interpretación geométrica el módulo del producto es el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él



$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v'}|$$



$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{u'}|$$

Propiedades del producto escalar

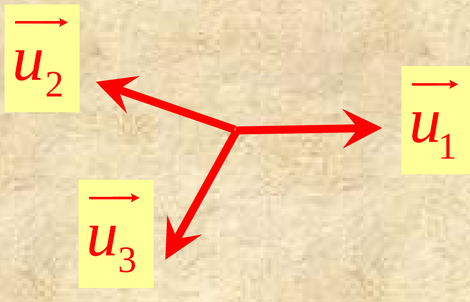
El producto escalar cumple las siguientes propiedades:

- $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$
- **Conmutativa:** $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- **Homogénea:** $k\,(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (k\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (k\vec{y})$
- **Distributiva respecto a la suma:** $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
- El producto escalar de dos vectores puede ser cero sin que ninguno de los vectores sea el vector nulo.
- Si uno de los factores (o los dos) es el vector nulo el producto escalar da cero.

Algunas bases especiales

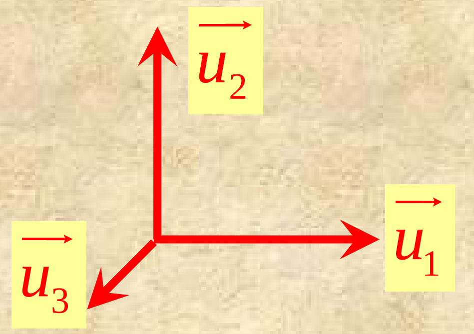
Una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de V^3 puede ser:

Base normada



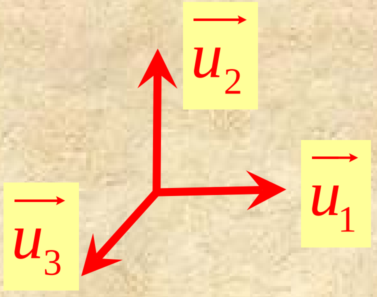
$$|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{u}_3| = 1$$

Base ortogonal



$$\vec{u}_1\vec{u}_2 = \vec{u}_1\vec{u}_3 = \vec{u}_2\vec{u}_3 = 0$$

Base ortonormal



$$|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{u}_3| = 1$$

$$\vec{u}_1\vec{u}_2 = \vec{u}_1\vec{u}_3 = \vec{u}_2\vec{u}_3 = 0$$

Producto escalar: expresión analítica

Sea $B=\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right\}$ una base de V^3. Consideramos los vectores:

$$\vec{u}=x\overrightarrow{u_1}+y\overrightarrow{u_2}+z\overrightarrow{u_3}$$

$$\vec{v}=x'\overrightarrow{u_1}+y'\overrightarrow{u_2}+z'\overrightarrow{u_3}$$

Si multiplicamos los vectores el producto escalar se obtiene aplicando la propiedad distributiva:

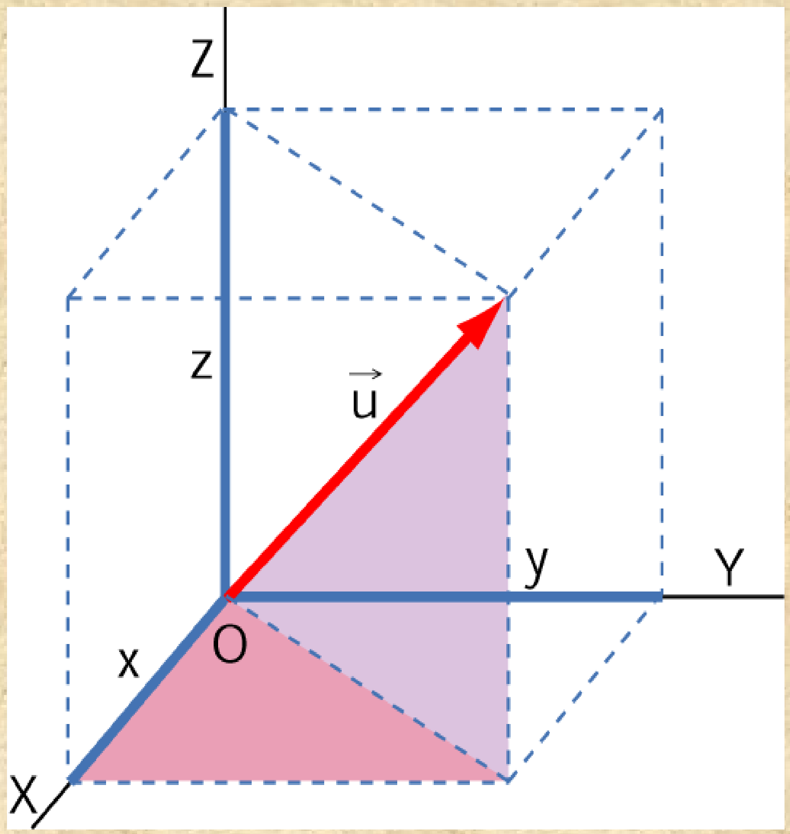
$$\begin{aligned}\vec{u}\vec{v}&=xx'\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}+yx'\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_1}+zx'\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_1}+xy'\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}+yy'\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}\\&\quad+zy'\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_2}+xz'\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_3}+yz'\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}+zz'\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3}\\&=xx'\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}+yy'\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}+zz'\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3}+(yx'+xy')\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}+(zx'+xz')\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_3}+(yz'+zy')\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}\end{aligned}$$

Esta expresión se simplifica en el caso de que la base sea de ciertos tipos:

Normada	$\vec{u}\vec{v}=xx'+yy'+zz'+(yx'+xy')\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}+(zx'+xz')\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_3}+(yz'+zy')\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}$
Ortogonal	$\vec{u}\vec{v}=xx'\left\lvert\overrightarrow{u_1}\right\rvert^2+yy'\left\lvert\overrightarrow{u_2}\right\rvert^2+zz'\left\lvert\overrightarrow{u_3}\right\rvert^2$
Ortonormal	$\vec{u}\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Módulo de un vector

Se define como la raíz cuadrada del producto de un vector por sí mismo



Expresión vectorial

Como $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}) = |\vec{u}|^2$

entonces $|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Expresión analítica

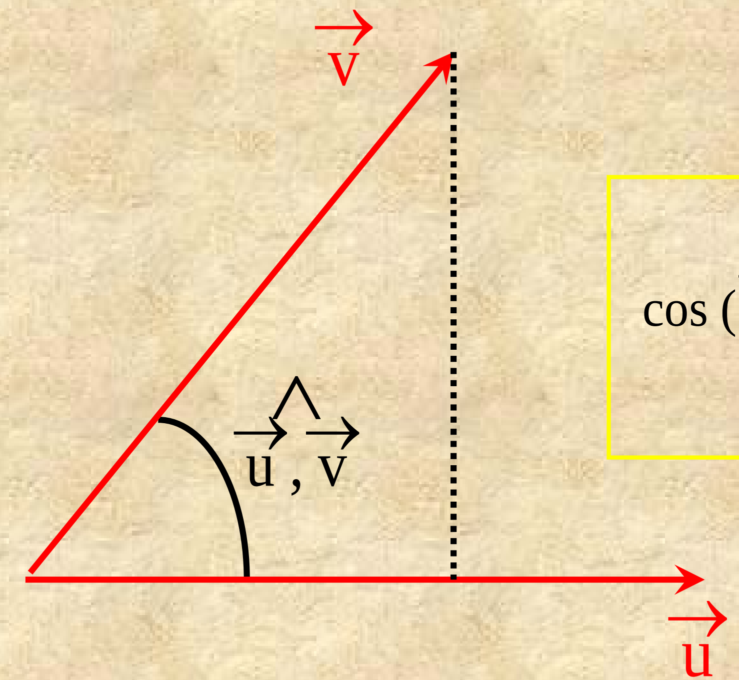
Sea B = $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormal de V^3 y sea $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

Como $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ nos queda:

$$|\vec{u}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ángulo de dos vectores

Sea B = { $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ } una base ortonormal de V^3 y sean $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ y $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$.



Obtenemos el coseno de los vectores despejándolo de la definición inicial.

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Producto vectorial de dos vectores libres

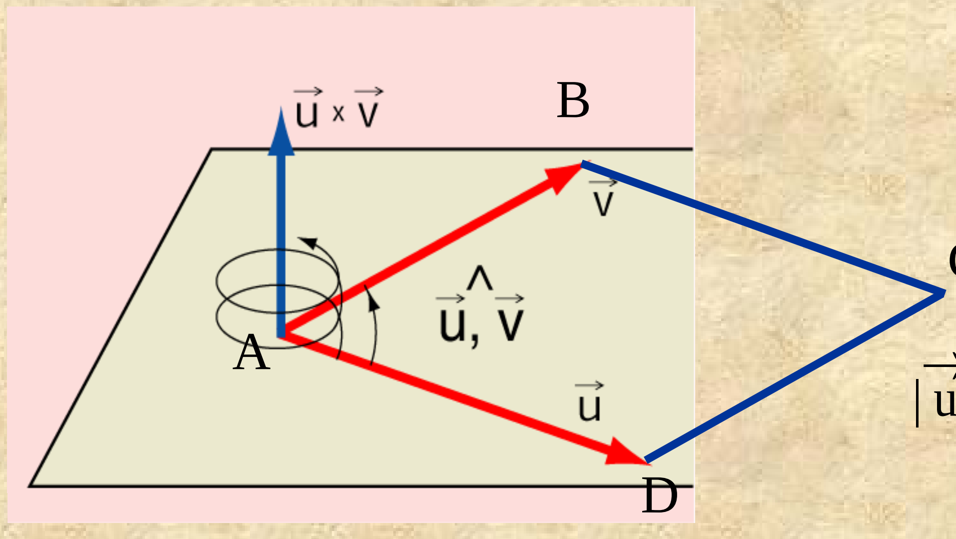
Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define **el producto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ de la siguiente manera:

- Si uno de ellos es nulo o los vectores son proporcionales $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
- En caso contrario $\vec{u} \times \vec{v}$ se define como **un vector** que tiene:

Módulo: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ sen $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Dirección: Perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Sentido: Avance del sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$



Interpretación geométrica

El módulo del producto vectorial representa el área ABCD

$|\vec{u} \times \vec{v}|$ = Área del paralelogramo ABCD

Propiedades del producto vectorial

1. Anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

[El producto vectorial, por lo tanto no es conmutativo]

2. Homogénea $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (k\vec{v})$

3. Distributiva del producto vectorial respecto de la suma de vectores:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

Expresión analítica del producto vectorial

Sea B = $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormal de V^3 y sean los vectores

$\vec{u} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (x', y', z')$. Entonces se cumple que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \times (x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}) = x\cdot x'(\vec{i} \times \vec{i}) + x\cdot y'(\vec{i} \times \vec{j}) +$$

$$x\cdot z'(\vec{i} \times \vec{k}) + y\cdot x'(\vec{j} \times \vec{i}) + y\cdot y'(\vec{j} \times \vec{j}) + y\cdot z'(\vec{j} \times \vec{k}) + z\cdot x'(\vec{k} \times \vec{i}) +$$

$$z\cdot y'(\vec{k} \times \vec{j}) + z\cdot z'(\vec{k} \times \vec{k}) =$$ como el producto de dos vectores iguales es nulo

$$= (y\,z' - y'\,z)\,\vec{i} + (z\,x' - z'\,x)\,\vec{j} + (x\,y' - x'\,y)\,\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Producto mixto de tres vectores libres. Expresión analítica

Dados $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{w}$ se define su producto mixto como el producto escalar del primer vector por el vectorial de los otros dos:

$$[\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}] = \vec{u} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$$

Expresión analítica

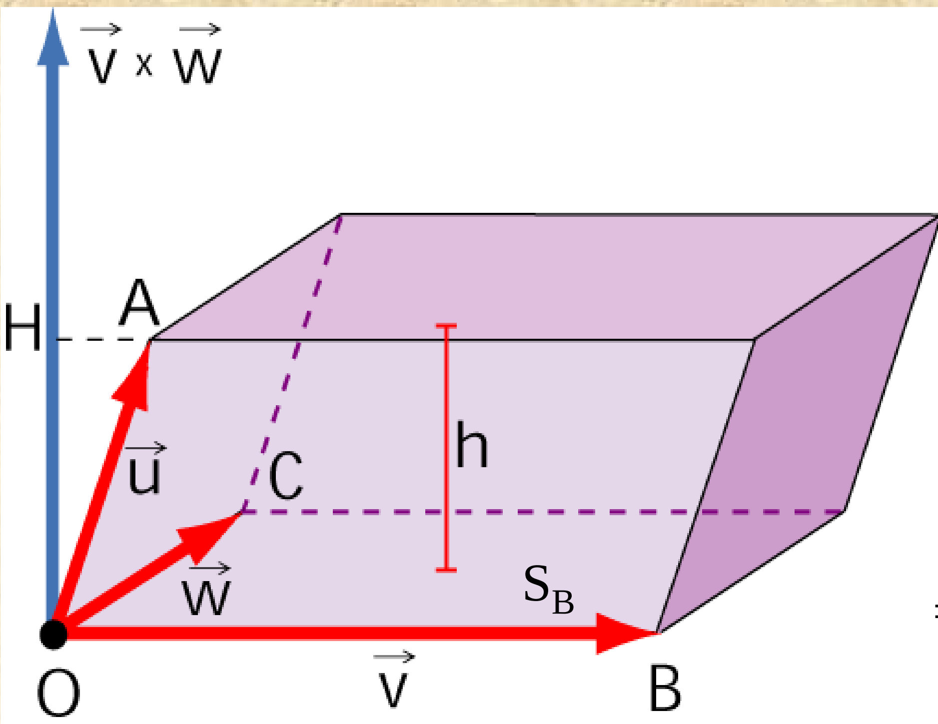
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} =$$

$$= (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \vec{k} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \det(\vec{u}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}})$$

Interpretación geométrica del producto mixto

El módulo del producto mixto representa el volumen del paralelepípedo de aristas los tres vectores



$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| =$$

$$|\vec{u}| \,.\, |\vec{v} \times \vec{w}| \,.\, |\cos(\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w})| =$$

$$|\vec{OH}| \,.\, |\vec{v} \times \vec{w}| = h \,.\, S_B =$$

= Volumen del paralelepípedo de aristas OA, OC y OB

S_B = superficie de la base