TEMA 10 – DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA. LA BINOMIAL

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD. CÁLCULO DE PARÁMETROS

<u>EJERCICIO 1</u> : Lanzamos tres dados y anotamos el número de cincos que obtenemos.
a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad? **b) Calcula la media y la desviación típica.**

Solución:
a) Los posibles valores de x_i son 0, 1, 2, 3. La tabla de la distribución de probabilidad es la siguiente:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{125}{216}=0{,}58$	$\frac{75}{216}=0{,}35$	$\frac{15}{216}=0{,}07$	$\frac{1}{216}=0{,}005$

b) $\mu=\Sigma p_i x_i=\dfrac{108}{216}=\dfrac{1}{2}=0{,}5 \quad\rightarrow\quad \mu=0{,}5$

$$\sigma=\sqrt{\Sigma p_i x_i^2-\mu^2}=\sqrt{\frac{144}{216}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{12}}=0{,}65 \quad\rightarrow\quad \sigma=0{,}65$$

<u>EJERCICIO 2</u> : Una urna, *A*, contiene tres bolas con los números 1, 2 y 3, respectivamente. Otra urna, B, tiene dos bolas, con los números 4 y 5. Elegimos una urna al azar, extraemos una bola y miramos el número obtenido.
a) Haz una tabla con las probabilidades. **b) Calcula la media y la desviación típica.**

Solución:
a) Los posibles valores de x_i son 1, 2, 3, 4, 5. La tabla de la distribución de probabilidad es la siguiente:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

b) $\mu=\sum p_i\, x_i=\dfrac{13}{4}=3{,}25 \quad\rightarrow\quad \mu=3{,}25$

$$\sigma=\sqrt{\sum p_i\; x_i^2-\mu^2}=\sqrt{\frac{151}{12}-\frac{169}{16}}=\sqrt{\frac{97}{48}}=1{,}42 \quad\rightarrow\quad \sigma=1{,}42$$

IDENTIFICAR DISTRIBUCIONES BINOMIALES. CÁLCULO DE PARÁMETROS

<u>EJERCICIO 3</u> : Para cada una de las siguientes situaciones, indica si sigue una distribución binomial. En caso afirmativo, identifica en ella los valores de *n* y *p*:
a) Lanzamos cien veces un dado y nos preguntamos por el número de unos que obtenemos.
b) Extraemos una carta de una baraja y vemos si es un as o no. Sin devolverla al mazo, extraemos otra y también miramos si se trata de un as o no, ... y así sucesivamente hasta diez veces.

Solución:

a) Es una distribución binomial con $n=100,\ p=\dfrac{1}{6}\rightarrow B\left(100,\ \dfrac{1}{6}\right)$

b) No es una binomial, pues la probabilidad de obtener as para la segunda carta es distinta que para la primera (al ser sin reemplazamiento las extracciones).

<u>EJERCICIO 4</u> : Para cada una de las situaciones que se te proponen a continuación, di si se trata de una distribución binomial y, en caso afirmativo, identifica los valores de *n* y *p*:
a) Se calcula que el 51% de los niños que nacen son varones. En una población de 100 recién nacidos, nos preguntamos por el número de niñas que hay.

b) Un examen tipo test tiene 30 preguntas a las que hay que responder verdadero o falso. Para un alumno que conteste al azar, nos interesa saber el número de respuestas acertadas que tendrá.

Solución:
a) Es una distribución binomial con $n=100,\ p=0{,}49\ \rightarrow B(100;\ 0{,}49)$

b) Es una distribución binomial con $n=30,\ \ p=\dfrac{1}{2}\rightarrow B\left(30,\ \dfrac{1}{2}\right)$

CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN DISTRIBUCIONES BINOMIALES

<u>EJERCICIO 5</u> : Se sabe que el 30 de la población de una determinada ciudad ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas de esa ciudad elegidas al azar. Calcula la probabilidad de que, entre esas 10 personas, estuvieran viendo el programa:
a) Más de 8. **b) Alguna de las 10.** **c) Halla la media y la desviación típica.**

Solución: Si llamamos x = "número de personas entre esas 10, que están viendo el programa", se trata de una distribución binomial con n = 10, p = 0,3 $\rightarrow$ B(10; 0,3).

a) $p[x>8]=p[x=9]+p[x=10]=$

$$=\binom{10}{9}\cdot 0,3^9\cdot 0,7+\binom{10}{10}\cdot 0,3^{10}=10\cdot 0,3^9\cdot 0,7+0,3^{10}=0,000144\rightarrow p[x>8]=0,000144$$

b) $p[x>0]=1-p[x=0]=1-0,7^{10}=0,972\rightarrow p[x>0]=0,972$

c) Hallamos la media y la desviación típica:

$\mu=np=10\cdot 0,3=3\quad\rightarrow\quad\mu=3$

$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{10\cdot 0,3\cdot 0,7}=\sqrt{2,1}=1,45\quad\rightarrow\quad\sigma=1,45$

<u>EJERCICIO 6</u> : Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 blancas y 2 verdes. Extraemos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Si repetimos la experiencia 5 veces, calcula la probabilidad de sacar:
a) Alguna bola verde. **b) Menos de dos bolas verdes.**
c) Halla el número medio de bolas verdes extraídas. Calcula también la desviación típica.

Solución: Si llamamos x = "número de bolas verdes extraídas", se trata de una distribución binomial con

$n=5,\ p=\dfrac{2}{10}=0,2\quad\rightarrow\quad B(5;\ 0,2)$

a) $p[x>0]=1-p[x=0]=1-0,8^5=0,672\rightarrow p[x>0]=0,672$

b) $p[x<2]=p[x=0]+p[x=1]=0,8^5+5\cdot 0,2\cdot 0,8^4=0,737\rightarrow p[x<2]=0,737$

c) Hallamos la media y la desviación típica:

$\mu=np=5\cdot 0,2=1$ bola verde (por término medio) $\rightarrow\quad\mu=1$

$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{5\cdot 0,2\cdot 0,8}=0,89\quad\rightarrow\quad\sigma=0,89$

<u>EJERCICIO 7</u> : La probabilidad de que un determinado medicamento provoque reacción alérgica es de 0,02. Si se le administra el medicamento a 20 pacientes, calcula la probabilidad de que tengan reacción alérgica:
a) Al menos uno de ellos. **b) Más de 18.** **c) Halla la media y la desviación típica.**

Solución: Si llamamos x = "número de pacientes con reacción alérgica", se trata de una distribución binomial con $n=20$, $p=0,02\quad\rightarrow\quad B(20;\ 0,02)$

a) $p[x>1]=1-p[x<1]=1-p[x=0]=1-0,98^{20}=0,332\rightarrow p[x>1]=0,332$

b) $p[x>18]=p[x=19]+p[x=20]==20\cdot 0,02^{19}\cdot 0,98+0,02^{20}=1,03\cdot 10^{-31}\approx 0\rightarrow p[x>18]\approx 0$

c) Hallamos la media y la desviación típica:

$\mu=np=20\cdot 0,02=0,4\quad\rightarrow\quad\mu=0,4\qquad\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{20\cdot 0,02\cdot 0,98}=0,63\quad\rightarrow\quad\sigma=0,63$

<u>EJERCICIO 8</u> : La probabilidad de que un cierto producto se rompa cuando es transportado es del 2%. Si se transportan 20 de estos productos, calcula la probabilidad de que:
a) Se rompan más de dos. **b) No se rompa ninguno.**

Solución: • Se trata de una binomial $B(20;\ 0,02)$.

a) $p[x>2]=1-p[x\le 2]=1-(p[x=0]+p[x=1]+p[x=2])$

$p[x=0]=0,98^{20}=0,668$

$p[x=1]=20\cdot 0,02\cdot 0,98^{19}=0,272$

$p[x=2]=\binom{20}{2}\cdot 0,02^2\cdot 0,98^{18}=0,0528$

Luego: $p[x>2]=1-(0,668+0,272+0,0528)=0,0072$

b) $p[x=0]=0,98^{20}=0,668$