TEMA 3 – DETERMINANTES

EJERCICIO 1 : Calcula el valor de los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^3-(1-x)-(1-x) = (1-x)^3-2(1-x) = (1-x)\left[(1-x)^2-2\right] =$

$= (1-x)\left[1-2x+x^2-2\right] = (1-x)\left(x^2-2x-1\right) = -x^3+3x^2-x-1$

b) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{1^a \\ 2^a+4^a \\ 3^a-2\cdot 4^a \\ 4^a}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & 13 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ -5 & 13 & 2 \end{vmatrix} =$

$\underset{\substack{1^a-3\cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a-2\cdot 2^a}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} -5 & 13 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ -11 & 23 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} -5 & 13 \\ -11 & 23 \end{vmatrix} = -(-115+143) = -28$

(1) Desarrollamos por la 4^a columna. (2) Desarrollamos por la 3^a columna.

EJERCICIO 2 : Halla el valor de los siguientes determinantes. En el apartado a), calcula, además, los posibles valores de *t* para que el determinante sea cero: a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Calculamos el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & t & 0 \\ 2 & 4 & t \end{vmatrix} = t^2+4(1-t)-2t(1-t)-t = t^2+4-4t-2t+2t^2-t = 3t^2-7t+4$

Veamos para que valores de t se anula el determinante: $3t^2-7t+4=0 \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{6} = \dfrac{7\pm 1}{6} \begin{cases} t = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{6}{6} = 1 \end{cases}$

El determinante vale cero cuando $t = \dfrac{4}{3}$ y cuando $t = 1$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{1^a-2\cdot 4^a \\ 2^a-4^a \\ 3^a+4^a \\ 4^a}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} 0 & -7 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} -7 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -6\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -6(-6+7) = -6$

(1) Desarrollamos por la 1^a columna. (2) Sumamos a la 1^a fila la 3^a. (3) Desarrollamos por la 1^a fila.

EJERCICIO 3 : a) Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$ **b) Calcula el valor del determinante:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Desarrollamos el determinante y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a-2^a}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = 0 \quad \to \quad x^2 = 1 \quad \to \quad x = \pm 1 \Rightarrow \text{ Hay dos soluciones } \; x_1 = -1, \;\; x_2 = 1$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{1^a+3^a \\ 2^a-3^a \\ 3^a \\ 4^a}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4(12-2) = 4 \cdot 10 = 40$$

(1) Desarrollamos por la $3^{\underline{a}}$ columna. (2) Sumamos la $3^{\underline{a}}$ fila a la $2^{\underline{a}}$. (3) Desarrollamos por la $2^{\underline{a}}$ fila.

<u>EJERCICIO 4</u> : Hallar los valores de *t* que anulan el primer determinante, y calcula cuánto vale el segundo determinante:

a) $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Desarrollamos el determinante e igualamos a cero el resultado:

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t\left(t^2 - 2\right) = 0 \quad \to \quad \to \quad \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 2 = 0 \quad \to \quad t^2 = 2 \quad \to \quad t = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay tres soluciones: $t_1 = 0; \quad t_2 = -\sqrt{2}; \quad t_3 = \sqrt{2}$

b) $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-2\cdot 1^a \\ 4^a}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a+2\cdot 1^a}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 11 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 11 + 8 = 19$$

(1) Desarrollamos por la 4^a columna. (2) Desarrollamos por la 2^a columna.

<u>EJERCICIO 5</u> : Resuelve la ecuación propuesta en a) y calcula el valor del determinante propuesto en b):

a) $\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

Solución:

a) Desarrollamos el determinante e igualamos a cero el resultado:

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a}}{\overset{\text{COLUMNAS}}{=}} \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 = 0 \quad \to \quad a = \pm 1 \Rightarrow \text{ Hay dos soluciones: } a_1 = -1; \; a_2 = 1$$

(1) Desarrollamos por la 2^a columna.

b) $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a-1^a \\ 4^a-1^a}}{\overset{\text{FILAS}}{=}} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \end{vmatrix} \underset{\substack{1^a-2^a \\ 2^a \\ 3^a}}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -5 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 5 = -10$$

(1) Desarrollamos por la 2ª columna. (2) Desarrollamos por la 1ª fila.

EJERCICIO 6 : Desarrolla el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ x & 1-x & -x & 0 \\ x & -x & 0 & 1-x \\ x & 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} x \begin{vmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 0 & 1-x \\ 0 & 1-x & -x \end{vmatrix} = x\left[x^3 - (1-x)^3\right] = x.\left[x^3 - (1-3x+3x^2-x^3)\right] =$$

$x.(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

(1) Restamos la 1ª columna a las demás. (2) Desarrollamos por la 1ª fila.

EJERCICIO 7 : Halla el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{Filas} \\ 1^a \\ 2^a - 3\cdot 3^a \\ 3^a \\ 4^a - 2\cdot 3^a \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ -13 & 4 & 0 & -8 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ -9 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -13 & 4 & -8 \\ -9 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 17$$

(1) Desarrollamos por la 3ª columna.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{Filas} \\ 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -4 & 7 & -5 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 38$$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.

c) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{Filas} \\ 1^a - 2\cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 2\cdot 2^a \end{array} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -5 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -(-24) = 24$$

(1) Desarrollamos por la 1ª columna.

EJERCICIO 8 : Calcula, en función de *x*, el valor de este determinante: $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}$ **Da el resultado factorizado.**

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+3x & x & x & x \\ 1+3x & 1 & x & x \\ 1+3x & x & 1 & x \\ 1+3x & x & x & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (1+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 1 & x & x \\ 1 & x & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{c} \text{Filas} \\ 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \\ 4^a-1^a \end{array} = (1+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (1+3x)\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1+3x)\,(1-x)^3$$

(1) Sacamos (1 3x) factor común de la 1ª columna. (2) Desarrollamos por la 1ª columna.

EJERCICIO 9 :Demuestra que: a) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{a(b-a)\cdot(c-b)\cdot(d-c)}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{a-b-c} & \mathbf{2a} & \mathbf{2a} \\ \mathbf{2b} & \mathbf{b-c-a} & \mathbf{2b} \\ \mathbf{2c} & \mathbf{2c} & \mathbf{c-a-b} \end{vmatrix} = \mathbf{(a+b+c)^3}$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} a\,(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 1 & c-a & c-a \\ 1 & c-a & d-a \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} a\,(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a & b-a \\ 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} a\,(b-a)(c-b)(d-c)$$

(1) Restamos la 1ª fila a las otras tres. (2) Desarrollamos por la 1ª columna. (3) Sacamos $(b-a)$ factor común.
(4) Restamos a la 3ª fila la 2ª y a la 2ª la 1ª. (5) Es el determinante de una matriz triangular.

b) $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{COLUMNAS} \\ 1^a \\ = 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \end{array} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} (a+b+c)(-a-b-c)(-a-b-c) = (a+b+c)^3$$

(1) Sumamos a la 1ª fila las otras dos. (2) Sacamos $(a+b+c)$ factor común. (3) Es el determinante de una matriz triangular.

EJERCICIO 10 : Calcula el valor de este determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{x} & \mathbf{a} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{x} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{x} \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x+3a & a & a & a \\ x+3a & x & a & a \\ x+3a & a & x & a \\ x+3a & a & a & x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x & a & a \\ 1 & a & x & a \\ 1 & a & a & x \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ 1^a \\ = 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \\ 4^a-1^a \end{array} (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)\cdot(x-a)^3$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las otras tres. (2) Sacamos $(x+3a)$ factor común. (3) Es el determinante de una matriz triangular.

EJERCICIO 11 : Calcula el valor de este determinante, dando el resultado factorizado: $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 0 & 1 \\ a+2 & a & 1 & 0 \\ a+2 & 1 & a & 1 \\ a+2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} (a+2)\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} (a+2)a\begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)a\left[(a-1)^2-1\right] = (a+2)a\left(a^2-2a\right) = (a+2)a^2(a-2) = a^2(a+2)(a-2)$$

(1) Sumamos a la $1^{\underline{a}}$ columna las demás. (2) Sacamos $(a+2)$ factor común. (3) Restamos la $1^{\underline{a}}$ columna a la $2^{\underline{a}}$ y a la $4^{\underline{a}}$.

(4) Desarrollamos por la $1^{\underline{a}}$ fila. (5) Desarrollamos por la $2^{\underline{a}}$ fila.

<u>EJERCICIO 12</u> : Halla en función de *a*, el valor de este determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{-a} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{a} \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{\underset{\substack{1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}+1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}}}}{=}} \begin{vmatrix} a & -a & -1 & -1 \\ a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & -1 & a \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -(a+1)\begin{vmatrix} -a & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} (a+1)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)\left(a^3-1+a-a\right) = (a+1)\left(a^3-1\right)$$

(1) Desarrollamos por la $2^{\underline{a}}$ fila. (2) Sacamos -1 factor común.

<u>EJERCICIO 13</u> : Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{2x} & \mathbf{2y} & \mathbf{2z} \\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}+\mathbf{p} & \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2}}+\mathbf{q} & \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{2}}+\mathbf{r} \\ \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{3x} & \mathbf{3a} & \mathbf{3p} \\ \mathbf{3y} & \mathbf{3b} & \mathbf{3q} \\ \mathbf{3z} & \mathbf{3c} & \mathbf{3r} \end{vmatrix} = \mathbf{3}\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} \end{vmatrix}$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2}+p & \frac{b}{2}+q & \frac{c}{2}+r \\ p & q & r \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{\underset{\substack{1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}-3^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}}}}{=}} \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$ Por tanto, es verdadera la igualdad.

b) Falsa, ya que: $$\begin{vmatrix} 3x & 3a & 3p \\ 3y & 3b & 3q \\ 3z & 3c & 3r \end{vmatrix} = 3^3\begin{vmatrix} x & a & p \\ y & b & q \\ z & c & r \end{vmatrix} = 3^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \neq 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

<u>EJERCICIO 14</u> :

a) Justifica cuáles de las siguientes igualdades son correctas y cuales no:

$$\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

b) Si $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{3}$, **calcula el valor de los siguientes determinantes :** $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \mathbf{2a+2b} & \mathbf{b} \\ \mathbf{2c+2d} & \mathbf{d} \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha ad - \alpha bc = \alpha(ad-bc) = \alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \rightarrow$ VERDADERA

$$\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2 ad - bc \neq \alpha^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha^2 (ad - bc) \quad \to \quad \text{FALSA}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha^2 ad - \alpha^2 bc = \alpha^2 (ad - bc) = \alpha^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \to \quad \text{VERDADERA}$$

b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$

$$\begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b \\ 2d & d \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 3 = 6$$

(1) El segundo determinante es 0 por tener las dos columnas proporcionales.

EJERCICIO 15 : Indica, razonando tus respuestas, si son ciertas o no las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

a) La 1ª fila la hemos multiplicado por 2 y la 2ª por $\frac{1}{2}$. A la 3ª le hemos sumado la 1ª.

Por tanto: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ a+2 & b+2 & c+2 \end{vmatrix}$. La igualdad es cierta.

b) Observamos que la 2ª y la 3ª columna son proporcionales, puesto que la 3ª la obtenemos multiplicando la 2ª por *a*. Por tanto, el determinante es cero. La igualdad es cierta.

EJERCICIO 16 :

a) Si A y B son dos matrices 2×2, tales que $|A| = 2$ y $|B| = -4$, calcula, justificando la respuesta:

$|A^2|$; $|-A|$; $|2A|$; $|AB^t|$; $|B^t A|$; $|A^{-1}|$ **(B^t representa la traspuesta de la matriz B)**

b) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$, calcula $\begin{vmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{vmatrix}$.

Solución

a) Vamos a tener en cuenta estas tres igualdades:

Consideramos *A* y *B* dos matrices 2×2. 1) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$; 2) $|k \cdot A| = k^2 \cdot |A|$; 3) $|A^t| = |A|$

Por tanto:

- $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = 2^2 = 4$
- $|-A| = |(-1) \cdot A| = (-1)^2 \cdot |A| = 1 \cdot |A| = |A| = 2$
- $|2A| = 2^2 \cdot |A| = 4 \cdot |A| = 4 \cdot 2 = 8$
- $|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot (-4) = -8$
- $|B^t \cdot A| = |B^t| \cdot |A| = |B| \cdot |A| = (-4) \cdot 2 = -8$
- Para hallar $|A^{-1}|$, vamos a tener en cuenta que $A \cdot A^{-1} = I$; y que existe A^{-1}, puesto que $|A| = 2 \neq 0$. Así:

$$|A \cdot A^{-1}| = |I| \quad \to \quad |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \to \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

b) Sumamos a la 1ª columna la 2ª y sacamos 2 y (–1) factor común: $\begin{vmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) = 4$

EJERCICIO 17 : Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 4$, halla el valor de los siguientes determinantes :

a) $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & x & 3p+x \\ b & y & 3q+y \\ c & z & 3r+z \end{vmatrix}$

Solución:

a) Restando a la 1ª fila la 3ª y sacamos (-2) factor común:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} (-2)\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2\cdot 4 = 8$$

$(*)$ Al permutar la 2ª y 3ª filas de orden, el determinante cambia de signo.

b) Restamos a la 3ª columna la 2ª, y sacamos 3 factor común:

$$\begin{vmatrix} a & x & 3p+x \\ b & y & 3q+y \\ c & z & 3r+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & 3p \\ b & y & 3q \\ c & z & 3r \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3\cdot 4 = 12$$

$(*)$ Tenemos en cuenta que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

__EJERCICIO 18__ : Calcula el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & -11 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ **e)** $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Por tanto, ran $(A) \geq 2$. Las dos primeras líneas son linealmente independientes.
Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \rightarrow$ Las tres filas son linealmemente independientes. Luego, ran (A) = 3.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor no nulo de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 2$ Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \rightarrow$ Las tres primeras filas son linealmente independientes $\rightarrow \text{ran}(M) \geq 3$

Comprobamos si el determinante de M es distinto de cero o no:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 13 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 13 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

(1) Restamos a la 4ª columna, la 2ª multiplicada por 3. (2) Desarrollamos por la 3ª fila.

Por tanto, ran (M) = 4

c)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que la 4ª columna coincide con la 1ª y que la 5ª es igual que la 3ª.

Por tanto, podemos prescindir de las dos últimas columnas para calcular el rango de M. Así, ran (M) ≤ 3.

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Luego, ran (M) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3ª fila depende linealmente de las dos primeras: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\,(\text{M}) = 3$

d) Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego, ran (A) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 12 & -11 \end{vmatrix} = 0$ (pues, si restamos la 1ª columna menos la 2ª, obtenemos la 3ª)

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0$. Así, la 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras.

Comprobamos si la cuarta fila depende linealmente de las dos primeras:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0$. También la cuarta fila depende de las dos primeras.

Por tanto, ran (A) = 2.

e) Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

Luego, ran (M) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \quad \rightarrow$ Las tres primeras filas son linealmente independientes $\rightarrow \quad \text{ran}\,(\text{M}) \geq 3$

Comprobamos si el determinante de M es distinto de cero o no:

$$|\text{M}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{COLUMNAS} \\ 1^{a} \\ 2^{a}+1^{a} \\ 3^{a}+1^{a} \\ 4^{a}+2\cdot 1^{a} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 10 & 2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 10 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, ran (M) = 3.

<u>EJERCICIO 19</u> : Estudia el rango de las siguientes matrices para los distintos valores de los parámetros:

a) $M=\begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$ b) $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+1 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$

Luego, ran $(M)\geq 2$. Las dos primeras filas son linealmente independientes para cualquier valor de a.

Buscamos los valores de a que hacen que el determinante formado por las columnas 1ª, 3ª y 4ª sea igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix}=2a^2+6-5a-3a=2a^2-8a+6=2\left(a^2-4a+3\right)=0 \;\rightarrow\; a^2-4a+3=0 \;\rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}\;\begin{cases} a=3 \\ a=1 \end{cases}$$

- Si $a=1 \;\rightarrow$ Sabemos que la 1ª columna depende linealmente de las dos últimas.

  Veamos que ocurre con la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; \text{La } 2^{a} \text{ columna depende linealmente de las dos últimas.}$$

Por tanto, ran $(M)=2$.

- Si $a=3 \;\rightarrow$ Sabemos que la 1ª columna depende linealmente de las dos últimas.

  Veamos que ocurre con la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}=8\neq 0. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(M)=3$$

b)

$$M=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{4} & 2 \\ \boxed{0} & t & \boxed{4} & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que la 4ª columna es el doble de la 1ª. Luego, podemos prescindir de ella para obtener el rango.

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0$ Así, ran $(M)\geq 2$.

Buscamos los valores de t que hacen cero el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{vmatrix}=t^2+4t-12=0 \;\rightarrow\; t=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2}=\frac{-4\pm 8}{2}\;\begin{cases} t=2 \\ t=-6 \end{cases}$$

- Si $t\neq 2$ y $t\neq -6 \;\rightarrow\; \operatorname{ran}(M)=3$
- Si $t=2$ o $t=-6 \;\rightarrow$ La 2ª columna depende linealmente de la 1ª y 3ª.

Por tanto, ran $(M)=2$.

c)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & \lambda+1 & \boxed{1} \\ \lambda & \boxed{0} & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0$ Luego, ran $(A)\geq 2$.

Buscamos los valores de λ que hacen cero el determinante formado por las columnas 2ª, 3ª y 4ª:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & \lambda+1 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} = -2[2-\lambda(\lambda+1)] = -2\left[2-\lambda^2-\lambda\right] = = 2\cdot\left[\lambda^2+\lambda-2\right] = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\,(A) = 3$
- Si $\lambda = 1 \quad \rightarrow$ La 3ª columna depende linealmente de la 2ª y 4ª. Veamos qué ocurre con la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\,(A) = 3$$

- Si $\lambda = -2 \quad \rightarrow$ La 3ª columna depende linealmente de la 2ª y 4ª. Veamos qué ocurre con la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\,(A) = 3$$

Por tanto, ran (A) = 3 para cualquier valor de λ.

d)

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & t & 3 & \boxed{2} \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que la 3ª columna es proporcional a la 1ª (es su triple); por tanto, podemos prescindir de ella para calcular el rango.

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Luego, ran (M) $\geq$ 2.

Buscamos los valores de t que hacen que el determinante formado por las columnas 1ª, 2ª y 4ª sea cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8-3t & -2 \end{vmatrix} = -2t+8-3t+4-t-2(8-3t)+4 = 0 \quad \text{para cualquier valor de } t.$$

Por tanto, la 3ª fila depende linelmente de las dos primeras para cualquier valor de t. Así, ran (M) = 2.

e) Podemos prescindir de la 3ª columna, pues no influye en el rango.

Tomemos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Luego, ran (A) $\geq$ 2.

Buscamos los valores de a que hacen cero el determinante formado por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2+4a+3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm 2}{2} \quad \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq -3 \quad \rightarrow \quad \text{ran}\,(A) = 3$
- Si $a = -1$ o $a = -3 \quad \rightarrow$ La 2ª fila depende linealmente de las otras dos $\rightarrow$ ran (A) = 2

<u>EJERCICIO 20</u> : Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$**, comprueba que** $\mathbf{A^2 = 2A - I}$**, siendo I la matriz identidad. Usando la fórmula anterior, calcula** A^4**.**

Solución:

Comprobamos que A^2 = 2A - I

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{Son iguales.}$$

Utilizando que $A^2 = 2A - I$, calculamos A^4: $A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$

Por tanto: $A^4 = 4A - 3I = 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 21</u> :

a) Calcula el rango de la siguiente matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

b) ¿Cuántas filas hay en la matriz *A* que sean linealmente independientes? Razona tu respuesta.

Solución:

a) Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

Luego *ran* (*A*) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

Por tanto, *ran* (*A*) = 3.
b) Como *ran* (*A*) = 3, las tres filas de *A* son linealmente independientes.

<u>EJERCICIO 22</u> : Halla el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-6} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Solución:

Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Luego *ran* (*M*) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

La tercera fila depende linealmente de las dos primeras. Por tanto, *ran* (*M*) □ 2.
Así, el número de columnas de *M* linealmente independientes es 2.

<u>EJERCICIO 23</u> :

a) Averigua el rango de la matriz: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

b) ¿Cuál es el número de columnas linealmente independientes en la matriz *M*? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Luego *ran* (*M*) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.
Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$ La $3^{\underline{a}}$ fila depende linealmente de las dos primeras.

Veamos si la cuarta fila depende linealmente de las dos primeras: $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

Por tanto, *ran* (*M*) = 3.
b) Como *ran* (*M*) = 3, las tres columnas de *M* son linealmente independientes.

EJERCICIO 24 :

a) Halla el rango de la siguiente matriz: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

b) Averigua el número de columnas de A que son linealmente independientes.

Solución:

a) Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Luego *ran* (*A*) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras: $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto, *ran* (*M*) = 2.

b) Como *ran* (*A*) = 2, hay dos columnas de *A* linealmente independientes.

EJERCICIO 25 :

a) Obtén el rango de la siguiente matriz: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) ¿Cuántas columnas hay en la matriz *M* que sean linealmente independientes? Razona tu respuesta.

Solución:

a) Tomamos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Luego *ran* (*M*) ≥ 2. Las dos primeras filas son linealmente independientes.
Veamos si la tercera fila depende linealmente de las dos primeras:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. La $3^{\underline{a}}$ fila depende linealmente de las dos primeras.

Veamos si la cuarta fila depende linealmente de las dos primeras: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$. Por tanto, $\mathrm{ran}(\mathrm{M}) = 3$.

b) Como *ran* (*M*) = 3, las tres columnas de *M* son linealmente independientes.

<u>EJERCICIO 26</u> : Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{matrix} 1^a - 2\cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$

(1) Desarrollamos por la 1^a columna.

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{matrix} 1^a + 2\cdot 4^a \\ 2^a \\ 3^a - 4^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 9 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 9 & 7 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -4$

(1) Desarrollamos por la 1^a columna

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a + 2\cdot 1^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6$

(1) Desarrollamos por la 2^a columna.

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{matrix} 1^a - 2\cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-30) = 30$

(1) Desarrollamos por la 1^a columna

e)
$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \overset{(1)}{=} (-1)\cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot(-15) = 15$

(1) Desarrollamos por la 1^a columna.

<u>EJERCICIO 27</u> : Halla, en función del parámetro, el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2(a^2-1) & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} =$

$$\begin{array}{c}\text{FILAS}\\ 1^{a}\\ =2^{a}-1^{a}\\ 3^{a}-1^{a}\end{array}\left(a^2-1\right)\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & a-1\\ 0 & -1 & a^2-a\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}\left(a^2-1\right)\begin{vmatrix}1 & a-1\\ -1 & a^2-a\end{vmatrix}=\left(a^2-1\right)\left(a^2-1\right)=\left(a^2-1\right)^2$$

(1) Sacamos $\left(a^2-1\right)$ factor común de la 2^{a} columna. (2) Desarrollamos por la 1^{a} columna.

b) $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 1 & 1\\ -1 & -1 & x & 1\\ -1 & -1 & -1 & x\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & x & 1 & 1\\ -1 & -1 & x & 1\\ 0 & 0 & 0 & x+1\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}(x+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & x & 1\\ -1 & -1 & x\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}(x+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & x & 1\\ 0 & 0 & x+1\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}(x+1)^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & x\end{vmatrix}=(x+1)^2(x+1)=(x+1)^3$$

(1) Sumamos a al última fila la primera. (2) Desarrollamos por la última fila

<u>EJERCICIO 28</u> : Resuelve la siguiente ecuación (operando en el determinante antes de desarrollarlo):

$$\begin{vmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}\\ \mathbf{x} & \mathbf{-1} & \mathbf{x} & \mathbf{x}\\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{-1} & \mathbf{x}\\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{-1}\end{vmatrix}\mathbf{=0}$$

Solución: Sumamos a la 1^{a} columna las otras tres:

$$\begin{vmatrix}-1 & x & x & x\\ x & -1 & x & x\\ x & x & -1 & x\\ x & x & x & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3x-1 & x & x & x\\ 3x-1 & -1 & x & x\\ 3x-1 & x & -1 & x\\ 3x-1 & x & x & -1\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}(3x-1)\begin{vmatrix}1 & x & x & x\\ 1 & -1 & x & x\\ 1 & x & -1 & x\\ 1 & x & x & -1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{array}{c}\text{FILAS}\\ 1^{a}\\ =2^{a}-1^{a}\\ 3^{a}-1^{a}\\ 4^{a}-1^{a}\end{array}(3x-1)\begin{vmatrix}1 & x & x & x\\ 0 & -1-x & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1-x & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1-x\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}(3x-1)(-1-x)^3=0$$

(1) Sacamos $(3x-1)$ factor común de la 1^{a} columna. (2) Es el determinante de una matriz triangular.

$$(3x-1)(-1-x)^3=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases}3x-1=0 \;\rightarrow\; 3x=1 \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{3}\\ (-1-x)^3=0 \;\rightarrow\; -1-x=0 \;\rightarrow\; x=-1\end{cases}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x_1=\dfrac{1}{3}; \quad x_2=-1$

<u>EJERCICIO 29</u> : Desarrolla el siguiente determinante: $\begin{vmatrix}\mathbf{x+2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{x+2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{x+2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{x+2}\end{vmatrix}$

Solución: Sumamos a la primera columna las otras tres: $\begin{vmatrix}x+2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & x+2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & x+2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & x+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+5 & 1 & 1 & 1\\ x+5 & x+2 & 1 & 1\\ x+5 & 1 & x+2 & 1\\ x+5 & 1 & 1 & x+2\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}$

$$\overset{(1)}{=}(x+5)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & x+2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & x+2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & x+2\end{vmatrix}\begin{array}{c}\text{FILAS}\\ 1^{a}\\ =2^{a}-1^{a}\\ 3^{a}-1^{a}\\ 4^{a}-1^{a}\end{array}(x+5)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x+1\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}(x+5)(x+1)^3$$

(1) Sacamos $(x+5)$ factor común de la $1^{\underline{a}}$ columna. (2) Es el determinante de una matriz triangular.

<u>EJERCICIO 30</u> : Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} \mathbf{x-a-b} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{x-b-c} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{a} & \mathbf{x-a-c} \end{vmatrix} \mathbf{= 0}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x-a-b & a & b \\ c & x-b-c & b \\ c & a & x-a-c \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & a & b \\ x & x-b-c & b \\ x & a & x-a-c \end{vmatrix} \overset{\text{FILAS}}{=} \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}}-1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}}-1^{\underline{a}} \end{array} \begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & x-a-b-c & 0 \\ 0 & 0 & x-a-b-c \end{vmatrix} = x(x-a-b-c)^2 = 0$$

(1) A la primera columna le sumamos las otras dos.

$$x(x-a-b-c)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x-a-b-c = 0 \quad \rightarrow \quad x = a+b+c \end{cases}$$

Por tanto, la ecuación tiene dos soluciones: $x_1 = 0$; $x_2 = a+b+c$

<u>EJERCICIO 31</u> : Indica si son ciertas o no las siguientes igualdades. Razona tu respuesta:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{a} & \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{a} & \mathbf{p} & \mathbf{q} \end{vmatrix} = \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{b} & \mathbf{x} & \mathbf{p} \\ \mathbf{c} & \mathbf{y} & \mathbf{q} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{2x-a} & \mathbf{2y-b} & \mathbf{2z-c} \end{vmatrix} \mathbf{= 0}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & y \\ a & p & q \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x & y \\ 1 & p & q \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & x & p \\ c & y & q \end{vmatrix} = \dfrac{a}{2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ b & x & p \\ c & y & q \end{vmatrix}$

Por tanto, la igualdad es cierta.

(1) Sacamos a factor común de la $1^{\underline{a}}$ columna. (2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

b) La $3^{\underline{a}}$ fila es combinación lineal de las dos primera $(\text{es } 2\cdot 1^{\underline{a}} - 2^{\underline{a}})$.

Por tanto, el determinante es cero. La igualdad es cierta.

<u>EJERCICIO 32</u> : Sabiendo que $\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} \end{vmatrix} \mathbf{= 2,}$ **halla el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{a-x} & \mathbf{b-y} & \mathbf{c-z} \\ \mathbf{2a} & \mathbf{2b} & \mathbf{2c} \\ \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{x+y+z} & \mathbf{2y} & \mathbf{z} \\ \mathbf{a+b+c} & \mathbf{2b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{p+q+r} & \mathbf{2q} & \mathbf{r} \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z \\ 2a & 2b & 2c \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a-x & b-y & c-z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} 2 \begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = = -2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2\cdot 2 = -4$

$(*)$ Hemos restado a la $1^{\underline{a}}$ fila la $2^{\underline{a}}$.

b) $\begin{vmatrix} x+y+z & 2y & z \\ a+b+c & 2b & c \\ p+q+r & 2q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2y & z \\ a & 2b & c \\ p & 2q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & 2y & z \\ b & 2b & c \\ q & 2q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & 2y & z \\ c & 2b & c \\ r & 2q & r \end{vmatrix} = \overset{(*)}{=} 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} + 0 + 0 = 2\cdot 2 = 4$

$(*)$ El $2^{\underline{o}}$ determinante es 0 por tener dos columnas $(\text{la } 1^{\underline{a}} \text{ y la } 2^{\underline{a}})$ proporcionales.

El tercer determinante es cero por tener dos columnas iguales $(1^{\underline{a}} \text{ y } 3^{\underline{a}})$.

<u>EJERCICIO 33</u> :

a) Justifica, sin desarrollar el determinante, que $\begin{vmatrix} 12 & -1 & 3 \\ 20 & 4 & 4 \\ 3 & 35 & 4 \end{vmatrix}$ **es múltiplo de 7.**

b) Prueba, sin desarrollarlos, que el valor de los siguientes determinantes es cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ x-2 & y-1 & z-3 & t-2 \\ 2 & -5 & 0 & 3 \\ x & y & z & t \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 2x & -1 & x/2 \\ 2y & 2 & y/2 \\ 2z & 3 & z/2 \end{vmatrix}$$

Solución:

a) Sumamos a la 1ª columna las otras dos: $\begin{vmatrix} 12 & -1 & 3 \\ 20 & 4 & 4 \\ 3 & 35 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & -1 & 3 \\ 28 & 4 & 4 \\ 42 & 35 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7\cdot 2 & -1 & 3 \\ 7\cdot 4 & 4 & 4 \\ 7\cdot 6 & 35 & 4 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 35 & 4 \end{vmatrix}$

Por tanto, el determinante es múltiplo de 7.

b) Primer determinante $\rightarrow$ La 2ª es combinación lineal de la 4ª y la 1ª (es igual a la 4ª menos la 1ª). Por tanto, el determinante es cero.

Segundo determinante $\rightarrow$ La 1ª y la 3ª columna son proporcionales (la 1ª es 4 veces la 3ª). Por tanto, el determinante es cero.

<u>EJERCICIO 34</u> : Indica, razonando tu respuesta, si son ciertas o no las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} x+2y & y+2z \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ p & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 2a & 2p & 2x \\ 2b & 2q & 2y \\ 2c & 2r & 2z \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} x+2y & y+2z \\ p & q \end{vmatrix} = q(x+2y) - p(y+2z) = qx + 2qy - py - 2pz = = (qx - py) + (2qy - 2pz) = \begin{vmatrix} x & y \\ p & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ p & q \end{vmatrix}$

Por tanto, la igualdad es verdadera.

b) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta. Además, si multiplicamos una fila (o una columna) por un número, el determinante queda multiplicado por ese número. Por tanto: $8\begin{vmatrix} 2a & 2p & 2x \\ 2b & 2q & 2y \\ 2c & 2r & 2z \end{vmatrix} = 8\cdot 8\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = 64\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

Por tanto, la igualdad es falsa.

<u>EJERCICIO 35</u> : Sabiendo que A y B son dos matrices de orden 2 tales que |A| = - 2 y |B| = 4, calcula, justificando la respuesta: $|AB^t|$; $|A^t|$; $|B^{-1}|$; $|A^{-1}B|$; $|3A|$

Solución:

Tendremos en cuenta que:

1) $|AB| = |A|\cdot|B|$ 2) $|A^t| = |A|$

3) $A\cdot A^{-1} = I \rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ (si $|A| \neq 0$; es decir, si existe A^{-1}).

4) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces $3A = \begin{pmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} \\ 3a_{21} & 3a_{22} \end{pmatrix}$

Por tanto:

$|AB^t| = |A||B^t| = |A||B| = -2\cdot 4 = -8$ $\qquad |A^t| = |A| = -2$ $\qquad |B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{4}$

$|A^{-1}B| = |A^{-1}||B| = \dfrac{1}{|A|}|B| = \dfrac{1}{-2}\cdot 4 = -2$ $\qquad |3A| = 3^2|A| = 9|A| = 9\cdot(-2) = -18$