TEMA 6 – GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS

EJERCICIO 1 : Escribe la ecuación del plano que contiene a la recta $\mathbf{r:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}}$ **y es paralelo a** $\boldsymbol{s:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{1}}$.

Solución: Para hallar la ecuación de un plano, necesitamos un punto y dos vectores: P_s, $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$

- Pasamos la recta r a paramétricas para hallar un punto y un vector de r:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\alpha \\ y=\alpha \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r=(1,0,0) \\ v_r=(0,1,1) \end{cases}$$

- Hallamos el vector director de s: $\vec{v}_s\,(3,2,1)$

- Ecuación del plano: $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-1)+3y-3z=0 \Rightarrow -x+3y-3z+1=0$

EJERCICIO 2 : Halla la ecuación del plano que contiene a estas rectas: $\mathbf{r:\begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}}$ $\mathbf{s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}}$

Solución: Hallamos un vector y un punto de cada recta, para ello pasamos r a paramétricas:

Recta r: $\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=2 \end{cases}$ $P_r(1,0,2)$ $\vec{v}_r(-1,1,0)$

Recta s: $P_s(1,0,2)$ $\vec{v}_s(1,-2,1)$

Como no son paralelas tomamos un punto: $P_r(1,0,2)$ y los dos vectores $\vec{v}_r(-1,1,0)$, $\vec{v}_s(1,-2,1)$

La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)+y+(z-2)=0 \Rightarrow x+y+z-3=0$

EJERCICIO 3 : Escribe la ecuación del plano, π, que contiene al punto *P* (3, 0,-2) y a la recta $\boldsymbol{r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}}$.

Solución: Necesitamos un punto y dos vectores: P, v_r, PP_r

Recta r: $P_r(3,1,1)$ $\vec{v}_r(2,-1,1)$

Plano: P(3,0,-2), $\vec{v}_r(2,-1,1)$, $\overrightarrow{PP_r}\,(0,1,3) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y & z+2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-3)-6y+2(z+2)=0 \Rightarrow$

$-4x-6y+2z+16=0 \Rightarrow 2x+3y-z-8=0$

<u>EJERCICIO 4</u> : Halla la ecuación del plano, π, que contiene a la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{0}$ y es paralelo a $s: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$.

Solución: Necesitamos un punto y dos vectores: $P_r(1,-2,-1)$, $\vec{v}_r(2,3,0)$, $\overrightarrow{PP}_{rs}(-1,2,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7(z+1) = 0 \Rightarrow z + 1 = 0$$

<u>EJERCICIO 5</u> : Determina la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ -2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano π: 5*x* -2*y* + 4*z* - 2 = 0.

Solución: Necesitamos un punto y dos vectores: P_r, $\vec{v}_r$, $\vec{n}_\pi$

Pasamos la recta r a paramétricas: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y + 3x - 4z = -1 \\ x - 3z = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 3\alpha - 2 \\ y = 5 - 5\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ $P_r(-2,5,0)$ $\vec{v}_r(3,-5,1)$

La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x+2 & y-5 & z \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ -18(x+2) -7(y-5)+19z = 0 $\Rightarrow$ -18x -7y + 19z -1 = 0

POSICIÓN RELATIVA

<u>EJERCICIO 6</u> : Dados las rectas: $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$; $s: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$; y el plano $\pi: 2x - 3y + 2 = 0$; halla la posición relativa entre: a) *r* y *s* b) *r* y π

Solución:

a) Ponemos las dos rectas en paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda + 3\alpha = -4 \\ \lambda - 2\alpha = 0 \\ \lambda - \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Rango A = 2 $\neq$ Rango A' = 3 $\Rightarrow$ Sistema Incompatible $\Rightarrow$ No tiene solución (Paralelas o se cruzan)

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r = (-2, 1, 1)$, $\vec{v}_s = (3, 2, 1) \Rightarrow$ Los vectores no son paralelos porque no son proporcionales $\Rightarrow$ Las rectas no son paralelas, por tanto, SE CRUZAN.

b) Como la recta ya está en paramétricas, resolvemos el sistema:

$2(3 - 2\lambda) - 3.(1 + \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 5 - 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 5/7 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ Existe una única solución $\Rightarrow$ SE CORTAN EN UN PUNTO.

<u>EJERCICIO 7</u> : Estudia, según los valores del parámetro *a*, la posición relativa de las rectas *r* y *s*:

$r: \frac{x-a}{-1} = \frac{y-2}{a^3} = \frac{z-a}{a-1}$ y $s: \begin{cases} x = (a+2)\lambda \\ y = 1 \\ z = a \end{cases}$ y obtén, si fuese posible, sus puntos de corte.

Solución:
Pasamos las ecuaciones a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r:\begin{cases}x=a-\alpha\\ y=2+a^3\alpha\\ z=a+(a-1)\alpha\end{cases}\quad s:\begin{cases}x=(a+2)\lambda\\ y=1\\ z=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-\alpha=(a+2)\lambda\\ 2+a^3\alpha=1\\ a+(a-1)\alpha=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-\alpha=(a+2)\lambda\\ a^3\alpha=-1\\ (a-1)\alpha=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-1&-a-2&-a\\ a^3&0&-1\\ a-1&0&0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}a+2&1&a\\ 0&a^3&-1\\ 0&a-1&0\end{array}\right)\underset{a\neq 0}{\Rightarrow}\left(\begin{array}{cc|c}a+2&1&a\\ 0&a^3&-1\\ 0&0&-a+1\end{array}\right)$$

Igualamos los elementos de la diagonal, por separado a cero: a = -2, a = 0, a = 1 $\Rightarrow$ Cuatro casos

Caso I: a = -2 $\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}0&1&-2\\ 0&-8&-1\\ 0&0&3\end{array}\right)\Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ Paralelas o se cruzan

$\vec{v}_r=(-1,-8,3)$, $\vec{v}_s=(0,0,0)$ s no es una recta sino un punto.

Caso II: a = 0 $\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}2&1&0\\ 0&0&-1\\ 0&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ Paralelas o se cruzan

$\vec{v}_r=(-1,0,-1)$, $\vec{v}_s=(2,0,0)$ No son paralelos $\Rightarrow$ SE CRUZAN

Caso III: a = 1 $\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}3&1&1\\ 0&1&-1\\ 0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. $\alpha=-1$, $\lambda=2/3\Rightarrow$ SE CORTAN EN UN PUNTO (2,1,1)

Caso IV: $a\in R-\{0,1,-2\}$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ Paralelas o se cruzan:

$\vec{v}_r(-1,a^3,a-1)$ $\vec{v}_s(a+2,0,0)$ $\dfrac{-1}{a+2}=\dfrac{a^3}{0}=\dfrac{a-1}{0}\Rightarrow(a-1)(a+2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ a=-2\end{cases}$ No puede ser $\Rightarrow$ SE CRUZAN

<u>SOLUCIÓN</u>

Si a = -2. s no es una recta sino un punto
Si a = 1: Se cortan en el punto (2,1,1)
Si $a\in R-\{1,-2\}$Se cruzan

<u>EJERCICIO 8</u> : Calcula el valor de *a* para que las rectas: $r:\begin{cases}2x+z=a\\ y=1\end{cases}$ **y** $s:\begin{cases}-x+2y+2z=5\\ x+y=a\end{cases}$ **se corten en un punto, y halla el punto de corte.**

Solución:
Pasamos la rectas a paramétricas

$$r\equiv\begin{cases}x=\alpha\\ y=1\\ z=a-2\alpha\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}x=a-\beta\\ y=\beta\\ z=\dfrac{5+a-3\beta}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \beta=1\\ 4\alpha-3\beta=a-5\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\ 0&1&1\\ 4&-3&a-5\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\ 0&1&1\\ 0&-7&-3a-5\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\ 0&1&1\\ 0&0&-3a+2\end{array}\right)$$

Igualamos, por separado, los elementos de la diagonal a cero: -3a + 2= 0 $\Rightarrow$ a = 2/3 $\Rightarrow$ Dos casos

Caso I : Si a = 2/3 $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Sistema compatible determinado. Existe una única solución $\Rightarrow$

$\beta = 1$, $\alpha = -1/3 \Rightarrow$ SE CORTAN EN UN PUNTO P(-1/3,1,4/3)

Caso II : Si a $\neq$ 2/3 $\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & * \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema Incompatible $\Rightarrow$ Paralelas o se cruzan

EJERCICIO 9 : Estudia la posición relativa de estas rectas: $r: \begin{cases} x = 1-3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+4\lambda \end{cases}$ $\quad s: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{4}$

Solución:

Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$r: \begin{cases} x = 1-3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+4\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = -1+3\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sistema Incompatible. No existe solución $\Rightarrow$ Paralelas o se cruzan

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r(-3,2,4)$ $\quad \vec{v}$ v_s(3,1.4) No son paralelos $\Rightarrow$ SE CRUZAN

EJERCICIO 10

a) Calcula el valor de *m* para que las siguientes rectas sean coplanarias:

$r: \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = m+\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases} \qquad \ddot{s}: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$

b) ¿Cuál será la posición relativa de *r* y *s* para ese valor de *m*?

Solución:

a) Para que sean coplanarias no se deben cruzar. Estudiamos su posición relativa (pasamos s a paramétricas y resolvemos el sistema)

$r: \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = m+\lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases} \quad \ddot{s}: \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -\alpha \\ z = -2+3\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -m \\ 2 & -3 & -4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -m-2 \\ 0 & -5 & -8 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -m-2 \end{array}\right)$

Igualamos, por separado, los elementos de la diagonal a cero: -m – 2 = 0 $\Rightarrow$ m = -2

Caso I : m = -2 $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Existe una solución. Se cortan en un punto.

Caso II : m $\neq$ -2 $\Rightarrow$ Sistema incompatible $\Rightarrow$ Paralelas o se cruzan.

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r(-1,1,2)$ $\quad \vec{v}_s(1,-1,3)$ No paralelos $\Rightarrow$ Se cruzan

Por tanto: m = -2

b) Para m = -2 $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto $\Rightarrow$ SECANTES

EJERCICIO 11

a) Halla los valores de *m* y *n* para que los siguientes planos sean paralelos:

π_1: 2*x* - *y* + *z* - 5 = 0 y π_2: *mx* + *ny* + 2*z* + 3 = 0

b) Obtén la ecuación de un plano paralelo a π_1 que pase por el punto *A*(3, -2, 1).

Solución:

a) Si π_1 y π_2 han de ser paralelos, se tiene que: $\dfrac{m}{2} = \dfrac{n}{-1} = \dfrac{2}{1} \quad \rightarrow \quad m = 4,\ n = -2$

b) El plano buscado ha de ser de la forma: 2*x* - *y* + *z* + *D* = 0

Si contiene al punto *A*, debe verificarse: 2 · 3 –(–2) + 1 + *D* = 0 $\Rightarrow$ *D* = - 9 $\Rightarrow$ 2x –y + z – 9 = 0

<u>EJERCICIO 12</u> : Determina, en función de *a*, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left.\begin{array}{r} (a-2)x+y-z=-1 \\ -ax+(2a-1)y+(-a+2)z=a \\ -x+ay+z=a \end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos la posición relativa resolviendo el sistema (por determinantes)

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ -a & 2a-1 & -a+2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3-a^2-a+1=(a-1)^2\cdot(a+1) = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = -1 \Rightarrow 3 \text{ casos}$$

CASO I: a = 1: $\left.\begin{array}{r} -x+y-z=1 \\ -x+y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{array}\right\}$ Tenemos dos planos coincidentes ($2^{\underline{o}}$ y $3^{\underline{o}}$) y el otro ($1^{\underline{o}}$) los corta.

CASO II: a = -1: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3^{\underline{a}})+(1^{\underline{a}})]{(2^{\underline{a}})+3\cdot(1^{\underline{a}})} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ -8 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Los tres planos se cortan en una recta.

CASO III: $a \neq 1$ y $a \neq -1$: $|A| \neq 0 \Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto.

<u>EJERCICIO 13</u> : Dados los planos: π: 4*x* + *my* + *mz* = 6 y σ: *mx* + *y* + z + 3 = 0 estudia su posición relativa según los valores de *m*.

Solución:

Las ecuaciones de los planos son: $\left.\begin{array}{r} 4x+my+mz=6 \\ mx+y+z=-3 \end{array}\right\}$

- Los coeficientes de las incognitas son proporcionales si m = 2.

En tal caso, las ecuaciones son: $\left.\begin{array}{r} 4x+2y+2z=6 \\ 2x+y+z=-3 \end{array}\right\}$

Los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.

- Si $m \neq 2$, los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

<u>EJERCICIO 14</u> : Halla la posición relativa de los siguientes planos según el valor del parámetro *a*:

$$\pi_1: \begin{cases} x = 3-\lambda+2\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=1+2\mu \end{cases} \qquad \pi_2: 4x + ay - 2z = 5$$

Solución:

π_1, expresado de forma implícita, es: $\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - z = 5$

Así, tenemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=5 \\ 4x+ay-2z=5 \end{array}\right\}$

- Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales si a = 4.

En tal caso, los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.

- Si $a \neq 4$, los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.