MATRICES

Ejercicio nº 1.-

Halla los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$,

siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio nº 2.-

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) Halla una matriz, X, tal que $AX = B$.

Ejercicio nº 3.-

Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Calcula los valores de x para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y O son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Ejercicio nº 5.-

Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener x e y

para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.

Ejercicio nº 6.-

Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} ; \qquad X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla X e Y, y calcula, si tiene sentido, X^{-1} e Y^{-1}.

Ejercicio nº 7.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3, A^4, A^5.

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Ejercicio nº 8.-

Resuelve la ecuación matricial $2A = AX + B$, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 9.-

Se considera la matriz:

$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, donde a, b y c son tres números reales arbitrarios.**

a) Encuentra A^n para todo natural n.

b) Calcula $\left(A^{35} - A\right)^2$.

Ejercicio nº 10.-

Dada la matriz:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^t A$ y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

b) **Encuentra las matrices de la forma** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, **tales que:** $AA^t X = X$

c) **Encuentra todas las matrices de la forma** $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, **tales que:** $A^t AY = Y$

Ejercicio nº 11.-

Obtén el rango de la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 12.-

Averigua cuál es el rango de:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 13.-

Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 14.-

Estudia el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 15.-

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 16.-

Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 17.-

Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores

$$\{\vec{u}_1=(2,\ -1,\ 0,\ 1);\ \vec{u}_2=(-1,\ 0,\ 2,\ 1);\ \vec{u}_3=(5,\ -4,\ 6,\ 7)\}$$

y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$.

Ejercicio nº 18.-

a) Halla el rango de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{u}_1=(2,\ -1,\ 3,\ 4);\ \vec{u}_2=(0,\ 1,\ 1,\ 2)\ \text{ y }\ \vec{u}_3=(-1,\ 3,\ 4,\ 1)$$

Ejercicio nº 19.-

Dados los vectores:

$$\vec{u}_1=(3,\ -1,\ 2,\ 0);\ \vec{u}_2=(1,\ 2,\ -1,\ 1);\ \vec{u}_3=(2,\ 1,\ 0,\ -1)$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$.

Ejercicio nº 20.-

Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{u}_1 = (1,\ 1,\ -1,\ 1);\ \vec{u}_2 = (2,\ 3,\ -2,\ 1);\ \vec{u}_3 = (1,\ 3,\ -1,\ -1)$$

Ejercicio nº 21.-

En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:

	SILLA	MECEDORA	SOFÁ
MADERA	1 unidad	1 unidad	1 unidades
PLÁSTICO	1 unidad	1 unidad	2 unidades
ALUMINIO	2 unidades	3 unidades	5 unidades

Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

Ejercicio nº 22.-

Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz *A.* La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz *B.*

a) Hallar, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indicar que información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1997 & 1998 & 1999 & 2000 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio nº 23.-

En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A, B,* y *C,* que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

PRODUCTO / MATERIAL	*A*	*B*	*C*
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A,* 4 de *B* y 3 de C.

Ejercicio nº 24.-

Una empresa produce tres bienes *A, B,* y *C*. Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:

	FACTORÍA 1	**FACTORÍA 2**	**FACTORÍA 3**
A	10 unidades/hora	20 unidades/hora	15 unidades/hora
B	25 unidades/hora	25 unidades/hora	20 unidades/hora
C	30 unidades/hora	25 unidades/hora	25 unidades/hora

En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias.

a) Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes *A, B* y *C* que fabrica la empresa.

b) Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes *A, B* y *C.*

Ejercicio nº 25.-

En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:

– Lote *A*: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.
– Lote *B*: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.
– Lote *C*: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.

a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.

b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes *A, B* y *C.*

SOLUCIONES EJERCICIOS DE MATRICES

Ejercicio nº 1.-

Halla los valores de a y b en la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2 - 2A = B$,

siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Calculamos $A^2 - 2A$ e igualamos el resultado a B:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \end{array}\right\} \quad a(a-2) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ \text{ó} \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = 0, \quad -2b = 1 \quad \rightarrow \quad b = \frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Si $a = 2, \quad 2b = 1 \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 2.-

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) Halla una matriz, X, tal que $AX = B$.

Solución:

a) Se trata de probar que $A \cdot A^{-1} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. Efectuamos el producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ como queriamos demostrar.

b) Despejamos X en la igualdad $AX = B$, multiplicando por la izquierda por $A^{-}1$:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \rightarrow \quad IX = A^{-1}B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Por al apartado a), conocemos A^{-1}; luego:

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -14 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -1 & 1 \\ -18 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-9}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$\mathbf{3X - 2Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{2X + Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Solución:

Llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} 3X - 2X = A \\ 2X + X = B \end{array}\right\} X = B - 2X$$

$$3X - 2(B - 2X) = A \quad \rightarrow \quad 3X - 2B + 4X = A \quad \rightarrow \quad 7X = A + 2B \quad \rightarrow \quad X = \frac{1}{7}(A + 2B)$$

$$Y = B - 2X = B - \frac{2}{7}(A + 2B) = B - \frac{2}{7}A - \frac{4}{7}B = \frac{3}{7}B - \frac{2}{7}A = \frac{1}{7}(3B - 2A)$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{7}(A + 2B) = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{7}(3B - 2A) = \frac{1}{7}\left[3\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Calcula los valores de x para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

verifique la ecuación $A^2 - 6A + 9I = 0$, donde I y O son, respectivamente, las matrices identidad y nula de orden tres.

Solución:

Calculamos $A^2 - 6A + 9I$ e igualamos a 0:

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2-6x+9 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-6x+9 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-6x+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha de ser:

$$x^2-6x+9=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad \rightarrow \quad x=3$$

Por tanto, el único valor de x que hace que se verifique la igualdad propuesta es $x=3$.

Ejercicio nº 5.-

Si I es la matriz identidad de orden 2 y $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor que deben tener x e y para que se cumpla la igualdad $A^2-xA-yI=0$.

Solución:

Calculamos $A^2-xA-yI$ e igualamos a 0:

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2-xA-yI=\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}-x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-2x-y & 9-3x \\ -6+2x & -5-x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que ha de ser:

$$\left.\begin{aligned} -2-2x-y=0 \\ 9-3x=0 \\ -6+2x=0 \\ -5-x-y=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \quad y=-2-2x=-2-6=-8 \\ &\rightarrow \quad x=3 \\ &\rightarrow \quad x=3 \\ &\rightarrow \quad y=-5-x=-5-3=-8 \end{aligned}$$

Por tanto: $x=3$, $y=8$

Ejercicio nº 6.-

Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X-Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}; \qquad X+2Y=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla X e Y, y calcula, si tiene sentido, X^{-1} e Y^{-1}.

Solución:

Llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} 2X - Y = A \\ X + 2Y = B \end{array}\right\} \quad X = B - 2Y$$

$$2(B-2Y) - Y = A \;\rightarrow\; 2B - 4Y - Y = A \;\rightarrow\; -5Y = A - 2B \;\rightarrow\; 5y = 2B - A \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; Y = \frac{1}{5}(2B - A)$$

$$X = B - 2Y = B - \frac{2}{5}(2B - A) = B - \frac{4}{5}B + \frac{2}{5}A = \frac{1}{5}B + \frac{2}{5}A = \frac{1}{5}(B + 2A)$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{5}(B+2A) = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5}(2B-A) = \frac{1}{5}\left[2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matrices inversas:

  X no tiene matriz inversa. Veámoslo:

  Supongamos que $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$X \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ a-2c & b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ es decir:}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a - 2c = 1 \\ a - 2c = 0 \end{array}\right\} \text{ imposible} \\[2ex] \left.\begin{array}{l} b - 2d = 0 \\ b - 2d = 1 \end{array}\right\} \text{ imposible} \end{array}\right\} \quad \text{Luego, no existe } X^{-1}.$$

Calculamos $Y^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$Y \cdot Y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ de donde:}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} -c=1 \\ -d=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c=-1 \\ d=0 \end{array} \\ \left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b+d=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-c=1 \\ b=1-d=1-0=1 \end{array} \end{array}\right\} \text{ Por tanto: } Y^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Se comprueba que $Y \cdot Y^{-1} = I$).

Ejercicio nº 7.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^2, A^3, A^4, A^5.

b) Halla el valor de $A^{25} + A^{-1}$.

Solución:

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^5 = A^4 A = IA = A$$

b) $\mathrm{A}^{25} = A^{4\cdot 6+1} = \left(A^4\right)^6 A = I^6 A = IA = A$

Para hallar A^{-1}, tenemos en cuenta que:

$$A^4 = A^3 A = I \quad \to \quad A^{-1} = A^3$$

Utilizando los resultados del apartado a), tenemos que:

$$A^{25}+A^{-1}=A+A^{3}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Resuelve la ecuación matricial $2A=AX+B,$ siendo:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\ \ \textbf{y}\ \ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ -\mathbf{3} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Solución:

Despejamos X en la ecuación propuesta:

$$2A=AX+B\ \rightarrow\ 2A-B=AX\ \rightarrow\ A^{-1}(2A-B)=A^{-1}AX$$

$$2A^{-1}A-A^{-1}B=IX\ \rightarrow\ 2I-A^{-1}B=X$$

Calculamos la inversa de A:

Llamamos $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, entonces:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ -a+c & -b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ \text{de donde:}$$

$$\left.\left.\begin{array}{r}a=1\\ b=0\\ -a+c=0\\ -b+d=1\end{array}\right\}\begin{array}{l}a=1\\ b=0\\ c=a=1\\ d=1+b=1+0=1\end{array}\right\}\ \text{Por tanto: } A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Operamos para obtener $X=2I-A^{-1}B$:

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

$$X=2I-A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 9.-

Se considera la matriz:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$ **, donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son tres números reales arbitrarios.**

a) Encuentra $\boldsymbol{A^n}$ para todo natural $\boldsymbol{n}$.

b) Calcula $\left(\boldsymbol{A}^{35}-\boldsymbol{A}\right)^2$.

Solución:

a) $A^1=A$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por tanto, como $A^3=0$, tenemos que $A^n=0$ para $n\geq 3$.

b) Teniendo en cuenta lo obtenido en a):

$$\left(A^{35}-A\right)^2=(0-A)^2=(-A)^2=A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & ac\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 10.-

Dada la matriz:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) Calcula $\boldsymbol{A^tA}$ y $\boldsymbol{AA^t}$, donde $\boldsymbol{A^t}$ denota la matriz traspuesta de $\boldsymbol{A}$.

b) Encuentra las matrices de la forma $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$, tales que: $\boldsymbol{AA^tX}=\boldsymbol{X}$

c) Encuentra todas las matrices de la forma $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix}$, tales que: $\boldsymbol{A^tAY}=\boldsymbol{Y}$

Solución:

a) La matriz transpuesta de A es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto:}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Imponemos la condición dada:

$$AA^t X = X \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = x \\ 2y = y \quad \rightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

c) $$A^t AY = Y \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a+c = a \quad \rightarrow \quad c = 0 \\ b = b \\ a+c = c \quad \rightarrow \quad a = 0 \end{cases}$$

Por tanto: $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $b \in \mathbb{R}$.

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Obtén el rango de la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{7} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{1} & -\mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 7 & -1 \\ 7 & 9 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} + 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 4 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} + 7 \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & 15 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 3 \cdot 2^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} - 3 \cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(M) = 2.$$

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Averigua cuál es el rango de:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 3 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 1^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} - 2 \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} + 2^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} - 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(A) = 2.$$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Calcula el rango de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & -6 \\ 5 & -10 & 15 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} - 5 \cdot 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -10 & 10 & -8 \\ 0 & -20 & 20 & -16 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2 \cdot 2^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} - 4 \cdot 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(A) = 2.$$

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

Estudia el rango de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & -\mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{7} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} 2^{\underline{a}} \\ 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} - 4 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2 \cdot 1^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} 1^{\underline{a}} \\ 2^{\underline{a}} \\ 3^{\underline{a}} - 2^{\underline{a}} \\ 4^{\underline{a}} + 2^{\underline{a}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(A) = 3.$$

<u>Ejercicio nº 15.-</u>

Halla el rango de la siguiente matriz:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{4} & \mathbf{2} & -\mathbf{5} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{8} & -\mathbf{6} & \mathbf{19} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & 8 & -6 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-1^{a} \\ 3^{a}-1^{a} \\ 4^{a}-3\cdot 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 9 & -6 & 18 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}+3\cdot 2^{a} \\ 3\cdot 4^{a}+4\cdot 2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -30 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(M) = 3.$$

<u>Ejercicio nº 16.-</u>

Calcula el rango de la siguiente matriz y di cuál es el número de columnas linealmente independientes:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{6} & -\mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculamos el rango de la matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}+3\cdot 1^{a} \\ 3^{a}+1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}+2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } \operatorname{ran}(A) = 2.$$

Esto significa que hay dos columnas linealmente independientes en A; las otras dos dependen linealmente de ellas.

<u>Ejercicio nº 17.-</u>

Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores

$$\{\vec{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{2},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1});\ \vec{\mathbf{u}}_2 = (-\mathbf{1},\ \mathbf{0},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1});\ \vec{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{5},\ -\mathbf{4},\ \mathbf{6},\ \mathbf{7})\}$$

y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{\mathbf{u}}_1,\ \vec{\mathbf{u}}_2,\ \vec{\mathbf{u}}_3$.

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}+2\cdot 1^{a} \\ 3^{a}+5\cdot 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & 16 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-4\cdot 2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Por tanto, el rango de la matriz es 2.

Esto significa que los vectores son linealmente dependientes. Hay dos vectores linealmente independientes y el tercero depende de ellos.

<u>Ejercicio nº 18.-</u>

a) Halla el rango de la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

b) Estudia la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{2},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4});\ \vec{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2})\ \ \mathbf{y}\ \ \vec{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{-1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{1})$$

Solución:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^{a} \\ 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}+2\cdot 1^{a} \\ 3^{a}+3\cdot 1^{a} \\ 4^{a}+4\cdot 1^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 13 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-2\cdot 2^{a} \\ 4^{a}-3\cdot 2^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \\ 3\cdot 4^{a}+2\cdot 3^{a} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Por tanto, $\text{ran}(A) = 3$.

b) Observamos que las columnas de la matriz A coinciden con los vectores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$.
El número de vectores linealmente independientes es el rango de A. Por tanto, los vectores son linealmente independientes.

Ejercicio nº 19.-

Dados los vectores:

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{3},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{0});\ \vec{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{1});\ \vec{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0},\ -\mathbf{1})$$

Estudia la dependencia o independencia lineal y di cuál es el rango de la matriz cuyas filas son $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$.

Solución:

Calcula el rango de la matriz cuyas filas son los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 3\cdot 1^a \\ 3^a - 2\cdot 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 7\cdot 3^a - 3\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix}.$$ Por tanto, el rango de la matriz es 3.

Esto significa que $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ son linealmente independientes.

Ejercicio nº 20.-

Estudia la dependencia lineal del conjunto de vectores:

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ -\mathbf{1},\ \mathbf{1});\ \vec{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ -\mathbf{2},\ \mathbf{1});\ \vec{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ -\mathbf{1},\ -\mathbf{1})$$

Solución:

Estudiemos el rango de la matriz cuyas filas son los tres vectores dados. El rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2\cdot 2^a \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el rango de la matriz es 2. Luego, hay dos vectores linealmente independientes; el tercero se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

Los tres vectores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3$ son linealmente dependientes.

Ejercicio nº 21.-

En una compañía se utilizan tres tipos de materiales (madera, plástico y aluminio) para fabricar tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás, según la tabla:

	SILLA	**MECEDORA**	**SOFÁ**
MADERA	**1 unidad**	**1 unidad**	**1 unidades**
PLÁSTICO	**1 unidad**	**1 unidad**	**2 unidades**
ALUMINIO	**2 unidades**	**3 unidades**	**5 unidades**

Obtén, matricialmente, las unidades de madera, de plástico y de aluminio que se han utilizado para fabricar 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás.

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{l} \\ \text{MADERA} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{SILLA} & \text{MECED.} & \text{SOFÁ}\end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{SILLAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SOFÁS} \end{array}\!\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{MADERA} \\ \text{PLÁSTICO} \\ \text{ALUMINIO} \end{array}\!\begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 1\,500 \end{pmatrix}$$

Es decir se han utilizado 400 unidades de madera, 600 de plástico y 1 500 de aluminio.

<u>Ejercicio nº 22.-</u>

Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz *A.* La evolución de los precios de los años 1997 a 2000 viene reflejada en la matriz *B.*

a) Hallar, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indicar que información proporciona el producto matricial.

b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?

$$A = \begin{array}{l} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE}\end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{l} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}1997 & 1998 & 1999 & 2000\end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solución:

a) La matriz A es 3×3 y la B es 3×4. Para poder efectuar el producto de dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

Por tanto, el producto $B \cdot A$ no se puede hacer, pero el $A \cdot B$ sí.

$$A \cdot B = \begin{array}{l} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{PAN} & \text{AGUA} & \text{LECHE}\end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{l} \\ \text{PAN} \\ \text{AGUA} \\ \text{LECHE} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}1997 & 1998 & 1999 & 2000\end{array} \\ \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{l} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}1997 & 1998 & 1999 & 2000\end{array} \\ \begin{pmatrix} 106\,150 & 111\,300 & 113\,250 & 122\,750 \\ 108\,580 & 113\,140 & 115\,800 & 125\,450 \\ 73\,000 & 76\,200 & 78\,000 & 84\,500 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz $A \cdot B$ nos da el gasto anual de cada familia en el total de los tres productos durante los años 1997 a 2000.

b) El elemento $c_{34} = 84\,500$, corresponde a la familia tercera en el año 2000; es decir, nos indica el gasto total de esta familia en los tres productos durante ese año.

Ejercicio nº 23.-

En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos *A, B,* y *C,* que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:

PRODUCTO / MATERIAL	***A***	***B***	***C***
CHATARRA	8	6	6
CARBÓN	6	6	4
ALEACIONES	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de *A,* 4 de *B* y 3 de C.

Solución:
Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{r} \\ \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\!\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{r} \text{CHATARRA} \\ \text{CARBÓN} \\ \text{ALEACIONES} \end{array}\!\begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Es decir, necesitaremos 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.

Ejercicio nº 24.-

Una empresa produce tres bienes *A, B,* y *C*. Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:

	FACTORÍA 1	**FACTORÍA 2**	**FACTORÍA 3**
A	10 unidades/hora	20 unidades/hora	15 unidades/hora
B	25 unidades/hora	25 unidades/hora	20 unidades/hora
C	30 unidades/hora	25 unidades/hora	25 unidades/hora

En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias.

a) Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes *A, B* y *C* que fabrica la empresa.

b) Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes *A, B* y *C.*

Solución:

a) Organizamos en dos matrices los datos que tenemos; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{r} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{FACT. 1} & \text{FACT. 2} & \text{FACT. 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 25 & 25 & 20 \\ 30 & 25 & 25 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{r} \text{FACT. 1} \\ \text{FACT. 2} \\ \text{FACT. 3} \end{array}\!\begin{pmatrix} 8 \\ 24 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\!\begin{pmatrix} 710 \\ 1\,000 \\ 1\,090 \end{pmatrix}$$

Es decir, cada día se fabrican en total (entre las tres factorías de la empresa) 710 unidades de A, 1 000 unidades de B y 1 090 de C.

b) La matriz obtenida en a) nos daba la proporción diaria: si la multiplicamos por 22 (los días que se trabajan cada mes), obtendremos la producción mensual:

$$22 \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 710 \\ 1000 \\ 1090 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 15\,620 \\ 22\,000 \\ 23\,980 \end{pmatrix}$$

Por tanto, cada mes se fabrican en la empresa (entre las tres factorías) 15 620 unidades de A, 22 000 unidades de B y 23 980 de C.

<u>Ejercicio nº 25.-</u>

En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:

– **Lote A: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.**
– **Lote B: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.**
– **Lote C: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.**

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.

a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.

b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes A, B y C.

Solución:

a) La matriz será:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{CARPETAS} & \text{CUADERNOS} & \text{BOLÍGRAFOS} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Los precios de cada carpeta, cada cuaderno y cada bolígrafo se resumen en la matriz:

$$\begin{array}{c} \text{CARPETA} \\ \text{CUADERNO} \\ \text{BOLÍGRAFO} \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 0{,}24 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la matriz obtenida en a) con esta última, obtendremos la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{CARPETA} & \text{CUADERNO} & \text{BOLÍGRAFO} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{CARPETA} \\ \text{CUADERNO} \\ \text{BOLÍGRAFO} \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 1{,}5 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 7{,}74 \\ 11{,}22 \\ 17{,}46 \end{pmatrix}$$

Es decir, el lote A cuesta 7,74 euros, el lote B, 11,22 euros y el lote C, 17,46 euros.