Tabla de integrales inmediatas

Inmediatas	Con función - Cuasi inmediatas
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\int f^n(x) \cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + k$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + k$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + k$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$	$\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k$
$\int \operatorname{sen}x dx = -\cos x + k$	$\int \operatorname{sen}(f(x))f'(x)dx = -\cos(f(x)) + k$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen}x + k$	$\int \cos(f(x))f'(x)dx = \operatorname{sen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + tg^2 x)dx = tgx + k$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \int (1 + tg^2(f(x))f'(x)dx = tg(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int (1 + cotg^2 x)dx = -ctgx + k$	$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))} dx = \int (1 + ctg^2(f(x))f'(x)dx = -ctg(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}x + k$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + k$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = arctg(f(x)) + k$

Propiedades y métodos de calcular

- En la suma/resta: La integral de la suma es la suma de las integrales: $\int (u + v)\, dx = \int u\ dx + \int v\ dx$

    Ejemplo: $\int (senx + x^2)\, dx = \int senx\ dx + \int x^2\ dx = -cosx \cdot \frac{x^3}{3} + k$
- En la constante: La integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función.

    Ejemplo: $\int 3 \cdot senx\, dx = 3 \cdot \int senx\, dx = 3(-cosx) + K$
- En la multiplicación: No hay regla fija

    Intentar que un factor sea la derivada del otro por cambio de variable si no, intentar hacer por el método por partes:

    Ejemplos: $\int 2x^3 dx = \int x^2 \cdot 2x$ dx = $\int t \cdot dt$ = $\frac{t^2}{2} + C = \frac{x^4}{2} + k$; $\int sinx \cdot cosxdx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{(\sin x)^2}{2}$ + k
- En la división: No hay regla fija

    - Intentar que el numeador sea la derivada del denominador, para aplicar Ln.

    - Si en el denominador hay una x^2, intentar que se parezca a la arctang.

    - Si no, hacer por el método cambio variable

    - Si no, aplicar método racionales.

    Ejemplo: $\int tan\ x$ dx = $\int \frac{sinx}{\cos x}$ dx = $-\int \frac{-sinx}{cosx}$ = $\ln\ \lvert cosx\rvert + k$

Tabla de integrales inmediatas con ejemplos

TIPOS	EJEMPLOS
Tipo potencial $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int \sqrt{x^3}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}.dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} = \frac{x^{5/2}}{5/2} = \frac{2\sqrt{x^5}}{5}$
Tipo logarítmico $\int \frac{f'}{f}dx = L\lvert f\rvert$	$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = L(1+e^x)$
Tipo exponencial $\int f'.e^f.dx = e^f$ $\int f'.a^f.dx = \frac{a^f}{La}$	$\int e^{-2x}dx = \frac{1}{-2}\int(-2)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ $\int 5^x.9^x.dx = \int 45^x dx = \frac{45^x}{L45}$
Tipo coseno $\int senx dx = -\cos x$ $\int f'.senf.dx = -\cos f$	$\int sen\frac{x}{3}dx = 3\int\frac{1}{3}.sen\frac{x}{3}dx = -3\cos\frac{x}{3}$
Tipo seno $\int \cos x = senx$ $\int f'.\cos f.dx = senf$	$\int \cos(2x+5)dx = \frac{1}{2}\int 2.\cos(2x+5)dx = sen(2x+5)$
Tipo tangente $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx$ $\int \frac{f'}{\cos^2 f}dx = tgf$	$\int tg^2\,x\,dx = \int(1+tg^2\,x-1)dx = tg\,x - x$ $\int \frac{x}{\cos^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10}\int\frac{10x}{\cos^2(5x^2-3)} = \frac{1}{10}tg(5x^2-3)$
Tipo cotangente $\int \frac{1}{sen^2 x}dx = -\cot g\,x$ $\int \frac{f'}{sen^2 f}dx = -\cot g\,f$	$\int \cot g^2\ x dx = \int(1+\cot g^2\ x-1)dx = -\cot g\,x - x$ $\int \frac{x}{sen^2\,3\,x^2}dx = \frac{1}{6}\int\frac{6x}{sen^2\,3\,x^2}dx = -\frac{1}{6}\cot g\,3x^2$
Tipo arc senx (= −arc cosx) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arc\ senx$ $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}dx = arc\ senf$	$\int^{\int^2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int^{\int}\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}arcsen$ $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int\frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = arcsen\,e^x$
Tipo arco tang.(= -arc cotang.) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arc$ tgx $\int \frac{f'}{1+f^2}dx = arc\ tgf$	$\int \frac{1}{3+3x^2}dx = \frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{3}arctg\,x$ $\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \int\frac{1}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}\int\frac{3}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}arc\ \ tg(3x)$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

0. INTEGRALES CUASI INMEDIATAS:

Pueden calcularse a partir de la tabla de integrales; generalmente se ha de ajustar una constante para que un factor resulte ser la derivada de una función que aparece en el integrando. (una dentro de otra; regla cadena)

Ejemplo1 $\int f(x)\cdot f'(x)dx$ *equivale a tener* $\int t\ dt$

- $\int x^2(2-2x^3) = \rightarrow$ *buscamos la forma* $\int f(x)\cdot f'(x)dx$ *o si:* $t = 2-2x^2$ *queda* $\int t\ dt$
  $\frac{1}{6}\int(2-2t)dt = -\frac{1}{6}\int -6x^2(2-2x^3) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(2-2x^3)^2 = -\frac{1}{12}(2-2x^3)^2$

Si en el producto, una función es derivada de la otra: $\int g(f)\cdot f'dx = g(f)+k$

- $\int sin^3x\cdot cosx\ dx = \int(sin\ x)^3\cdot cosx\ dx = \frac{(\sin x)^4}{4}+k \rightarrow$ equivale al cambio: $\int t^3\cdot dt$

Ejemplo2: En la integral $\int\frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$, la derivada $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow$ multiplicando y dividiendo por 2:

$$\int\frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = 2\int\frac{sen\sqrt{x}}{2\cdot\sqrt{x}}\ dx = 2\int sen\ t\ dt = -2\cos\sqrt{x}+K$$

Ejemplos de integrales que se transforman en inmediatas *(casi-inmediatas)*

1. $\int x^2(2-2x^3) =$ *Si buscamos* $\int f(x)\cdot f'(x)dx$ *o* $\int t\ dt : -\frac{1}{6}\int -6x^2(2-2x^3) =$

2. $\int\frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}+k$

3. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^{1/3}}{1/3} = 3\sqrt[3]{x}+k$

4. $\int\frac{sen\,x-cos\,x}{sen\,x+cos\,x}dx = -\int\frac{cos\,x-sen\,x}{sen\,x+cos\,x}dx = -Ln|sen\,x+cos\,x|+k$

5. $\int\frac{3}{4x^2-4x+1}dx = \int\frac{3}{(2x-1)^2} = 3\int(2x-1)^{-2}dx = -\frac{3}{2}(2x-1)^{-1} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(2x-1)}+k$

6. $\int\frac{1}{tg\,x}dx = \int\frac{cos\,x}{sen\,x}dx = Ln|sen\,x|+C$

7. $\int\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}Ln(x^2+1)+k$

8. $\int\frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{2\,dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\ arctg\ 2x+k$

9. $\int\frac{e^{arcsen\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int e^{arcsen\,x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \int e^t\,dt = e^{arcsen\,x}+k$

10. $\int\frac{2^x}{1+4^x}dx = \frac{1}{Ln2}\int\frac{2^x.Ln2}{1+(2^x)^2}dx = \frac{1}{Ln2}arctg\ 2^x+k$

11. $\int sec^2\frac{x}{3}dx = 3\int\frac{1}{3}.sec^2\frac{x}{3}dx = 3tg\frac{x}{3}$

12. $\int sec^2(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int 2.sec^2(2x+1)dx = \frac{1}{2}tg(2x+1)+k$

13. $\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{16}}} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{3x}{4})^2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\ arc\ sin\ \frac{3}{4}x+k = \frac{1}{2}\ arc\ sin\ \frac{3x}{4}+k$

1.- METODO DE INTEGRACION POR PARTES.

Se utiliza este método cuando en la expresión a integrar se aprecia la existencia de dos funciones sin que ninguna de ellas sea derivada de la otra. La fórmula a emplear es la siguiente: $\int \boldsymbol{u\,dv = u\,v - \int v\,du}$

Recordar frase pnemotécnica: UDiaVi = UnaVaca – ∫ Vestida DeUniforme

Una parte la tenemos que saber integrar y la otra derivar. Si hay parte polinómica, intentar que baje de grado.

Ejemplos:

1.- $\int \boldsymbol{3x^2 \cdot \ln x \; dx}$

u= lnx se deriva y **dv** = 3x² se integra . Luego aplicamos la fórmula: $\int \boldsymbol{u\ dv = u\,v - \int v\ du}$ y sustituimos:

u = lnx ⇒ du = $\frac{1}{x}dx$

dv = 3x² ⇒ v = x³, $\int 3x^2 \cdot \ln x \; dx \;=\; x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{x}\, x^3\, dx \;=\; x^3 \cdot \ln x - \frac{x^3}{3} + k$

2.- $\int \boldsymbol{arc\ tg\ x\ \ dx}$

$u = arc\ tgx \quad du = \frac{1}{1+x^2}$
$dv = dx \quad v = x$

Aplicando la fórmula que hemos indicado anteriormente, $I = x.arctg\,x - \int x.\frac{1}{1+x^2}dx$

La integral resultante es de tipo logarítmico: $\mathrm{I} = x.arctg\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x.arctg\,x - \frac{1}{2}L(1+x^2)$+C

3.- $\int \boldsymbol{x^2 \cdot senx\,dx}$

$u = x^2 \qquad u = 2xdx$
$dv = sen\,x\,dx \quad v = \int sen\,x\,dx = -\cos x$ → $\mathrm{I} = -x^2\ \cos x + \int 2x \cos x\, dx.$

(*) A veces hay que repetir la integración por partes como en este caso:

$u = 2x \qquad du = 2dx$
$dv = \cos x\, dx \quad v = \int \cos x\, dx = sen\,x$ → $\int 2x \cos x\, dx = 2x\,sen\,x - \int 2\,sen\,x\,dx = 2x\,sen\,x + 2\cos x$

Y volviendo a la expresión (*) obtenemos el resultado final: $I = -x^2 \cos x + 2x\,senx + 2\cos x + K$

4- $\int \boldsymbol{e^x \cdot (7+2x)dx}$

$u = 7 + 2x \quad du = 2x$
$dv = e^x \quad v = e^x$ → $\mathrm{I} = (7+2x)\cdot e^x - \int 2 \cdot e^x\, dx = (7+2x)\cdot e^x - 2\cdot e^x = e^x(5+2x) + k$

5.- $\int \boldsymbol{\frac{ln\,x}{x^2}\ dx}$

Equivale a: $\int lnx \cdot x^{-2}dx$

u = lnx → du = 1/x

dv= x^{-2} → v = $\int x^{-2} = -x^{-1}$; I = $u \cdot v - \int v \cdot du$ = lnx · -1/x - ∫ - x^{-2}· 1/x dx = $\frac{-lnx}{x} - \frac{1}{x}$ + C

2.-METODO DE SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE.

*Consiste en sustituir la variable x por otra variable **t** mediante una nueva función g tal que x=g(t) a fin de transformar el integrando en otro más sencillo.*

Ejemplos:

1.- $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

Cambiamos x por t^2 (para eliminar la raíz) $x = t^2$, con lo que $dx = 2tdt$ y la integral queda:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{2t}{t^2+t}dt = \int \frac{2}{t+1}dt = 2\ln|t+1| + k = \ln(t+1)^2 + k.$$

Deshaciendo el cambio, $t = \sqrt{x}$, se tiene: $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \ln(\sqrt{x}+1)^2 + k.$

2.- $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{x-1} = t$ y elevando al cuadrado, $x-1 = t^2$

Diferenciando la igualdad anterior, $dx = 2t.dt$

Por otra parte, de $x-1 = t^2$ resulta $x = 1+t^2$

Sustituyendo resulta: $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{1}{(1+t^2).t}.2tdt = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2arctgt = 2arctg\sqrt{x-1} + C$

3.- $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

Hacemos el cambio $\sqrt{1+x^3} = t \Rightarrow 1+x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2dx = 2tdt$

Despejamos en forma adecuada: $x^2dx = \frac{2t\,dt}{3}$ y ahora sustituimos:

$$\int x^2\sqrt{1+x^3} = \int \sqrt{1+x^3}\,.x^2\,dx = \int t.\frac{2tdt}{3} = \frac{2}{3}\int t^2\,dt = \frac{2}{3}\frac{t^3}{3} = \frac{2\sqrt{(1+x^3)^3}}{9}$$

4.- $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

Hacemos el cambio $x^2+x+1 = t \Rightarrow (2x+1)dx = dt$

Sustituyendo en la integral resulta:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2+x+1} + C$$

5.- $\int sen^2 x\,cos^3\,x\,dx$

El cambio que podemos realizar es el siguiente: $senx = t$ (Por ser impar en cosx)
De dicho cambio resulta: $cosxdx = dt$ y sustituyendo en la integral propuesta obtenemos:

$$\int sen^2\,x\,cos^3\,x\,dx = \int sen^2\,x\,.cos^2\,x\,.cos\,x\,dx = \int t^2(1-t^2)dt =$$

$$= \int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{sen^3\,x}{3} - \frac{sen^5\,x}{5} + C$$

6.- $\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x}\sqrt{\mathbf{1}-x}}\boldsymbol{dx}$

$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$ → $\mathrm{I} = \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} 2tdt = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2\, arcsen\, t = 2\, arcsen \sqrt{x} + k$

$dx = 2tdt$

Otros cambios:

$$\int \frac{x^2}{x^3-2} dx = \frac{1}{3} Ln\left|x^3 - 2\right| + C$$

$x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$$

$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$

$$\int \cos\left(x^2\right) 2x \; dx = \operatorname{sen} x^2 + C$$

$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$$\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C$$

$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{Ln}\, (\boldsymbol{Ln}\, \boldsymbol{x})$$

$Cambiamos\text{: } Ln\, x = t \rightarrow dt = \frac{1}{x}\; dx$

Para poder usar: $\int \frac{dt}{t} = \ln t$ → Sustituimos: $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1/x}{\ln x} dx = Ln\,(\ln x) + k$

3.- METODO DE DESCOMPOSICION EN FRACCIONES SIMPLES

Consiste en separar la función racional en sumas de funciones racionales. Suponemos que el grado del numerador es menor que el grado del denominador , pues en caso contrario, se hace la división y después se integra el cociente más el resto partido por el divisor, es decir, $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ donde el grado de p(x) es igual o mayor que el de q(x), entonces,

p(x)	q(x)
r	c(x)

p(x) = q(x) · c(x) + r **o bien:** $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r}{q(x)}$

Por tanto: $\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \left(c(x) + \frac{r}{q(x)}\right) dx$

Ejemplos:

1.- $\int \frac{x^4+x^3-x^2-2x+5}{x^3-x^2-x-1}$

Primero hacemos la división para que la función racional quede con numerador de grado menor al denominador.

$$\frac{x^4+x^3-x^2-2x+5}{x^3-x^2-x-1} = x - \frac{x-5}{x^3-x^2-x-1}$$

con lo que : $$\int \frac{x^4+x^3-x^2-2x+5}{x^3-x^2-x-1} = \int x\,dx - \int \frac{x-5}{x^3-x^2-x-1}dx$$

Calculando por otro lado la integral $\int \frac{x-5}{x^3-x^2-x-1}dx$:

$$\frac{x-5}{x^3+x^2-x-1} = \frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}.$$

La igualdad x - 5 = A(x + 1)² + B(x - 1)(x + 1) + C(x - 1), se verificará para cualquier valor de x;

para x = -1, -6 = 2C; C = 3,

para x = 1, -4 = 4A; A = -1,

para x = 0, -5 = A - B - C; B = 1.

$$\int \frac{x-5}{x^3+x^2-x-1}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}dx =$$

$$= -\ln|x-1| + \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + k_1 = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{3}{x+1} + k_1.$$

Finalmente: $$\int \frac{x-5}{x^3+x^2-x-1} = \frac{x^2}{2} - \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{3}{x+1} + k.$$

2.- $\int \frac{x^2}{2x+1}dx$

Sol: Dado que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, hemos de realizar la división con lo que se obtiene el siguiente cociente y resto: $C(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$; $R = \frac{1}{4}$

$$\int \frac{x^2}{2x+1}dx = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2x+1}\right)dx = \int \frac{1}{2}x\,dx - \int \frac{1}{4}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int x\,dx - \frac{1}{4}\int dx +$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}L|2x-1| + C$$

3.- $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$

Buscamos las raices del denominador resolviendo la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Como los denominadores son iguales los numeradaores también lo serán, por tanto, 1=a(x-2)+b(x-3)

Y dando a **x** los valores de **2** y **3** se obtienen los valores de **a** y **b**: Para x=2, 1=-b Para x=3, 1=a

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{1}{x-3} dx - \int \frac{1}{x-2} dx = L|x-3| - L|x-2| + C$$

4.- $\int \frac{3x-1}{x^2 + x} dx$

En este caso la descomposición en fracciones simples es más sencilla:

$$\frac{3x-1}{x^2 + x} = \frac{3x-1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)}$$

$3x - 1 = a(x+1) + bx$ Las raices del denominador son **0** y –**1:**

Para x= –1, b = 4
Para x = 0, a = –1

$$\int \frac{3x-1}{x^2 + x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{4}{x+1} dx = -L|x| + 4L|x+1| + C$$

EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO DE INTEGRALES

1.-Cálcula las siguientes integrales: a) $\int xe^x dx$; b) $\int x\,sen\,x\,dx$; c) $\int xLxdx$;

Solución: Todas ellas se resuelven por partes y la fórmula del método es: $\int u.dv = u.v - \int v.du$

a) $I = \int xe^x dx.$

$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x.dx \end{array}\right\}$ $du = dx$

$v = \int e^x dx = e^x \quad \rightarrow \quad I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

b) $I = \int x\,sen\,x.dx$

$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = sen\,x.dx \end{array}\right\}$ $du = dx$

$v = \int sen\,x\,dx = -\cos x \quad \rightarrow \quad I = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + sen\,x + C$

c) $I = \int xLxdx$

$\left.\begin{array}{l} u = Lx \\ dv = xdx \end{array}\right\}$ $du = \frac{1}{x}dx$

$v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \rightarrow I = \frac{x^2}{2}.Lx - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}.dx = \frac{x^2}{2}.Lx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}.Lx - \frac{x^2}{4} + C$

2.-Calcula las siguientes integrales: a) $\int x^2e^x dx$; b) $\int x^2 \cos 3\,xdx$

Sol: Las dos se resuelven aplicando el método de integración por partes dos veces:

a) $\int x^2 e^x dx$

$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x\,dx \end{array}\right\} du = 2xdx$

$v = \int e^x\,dx = e^x \rightarrow I = x^2\,e^x - \int 2xe^x\,dx$; $I = x^2e^x - I_1$ (*) donde $I_1 = \int 2xe^x dx$

Hacemos nuevamente

$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = e^x\,dx \end{array}\right\}$ $du = 2dx$

$v = \int e^x\,dx = e^x \rightarrow I_1 = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x$

Resultado final: $I = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

b) $\int x^2\ \cos 3\,xdx$

$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos 3\,xdx \end{array}\right\}$ $du = 2xdx$

$$v = \int \cos 3\,xdx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3\,xdx = \frac{1}{3} sen\,3\,x$$

$I = \frac{1}{3}x^2\ sen\,3\,x - \int \frac{2}{3}x\,sen\,3\,xdx.$

Aplicamos nuevamente el método de integración por partes:

$u = \frac{2}{3}x$; dv = sen3xdx.

$$du = \frac{2}{3}dx; \quad v = \int sen3xdx = \frac{1}{3}\int 3\,sen\,3\,xdx = -\frac{1}{3}\cos 3\,x$$

$\int \frac{2}{3}x\,sen\,3\,xdx = -\frac{2}{9}x\cos 3\,x + \int \frac{2}{9}\cos 3\,xdx = -\frac{2}{9}x\cos 3\,x + \frac{2}{27}\int 3\cos 3\,xdx =$

$= -\frac{2}{9}x\cos 3x + \frac{2}{27}sen3x$

$I = \frac{1}{3}x^2\,sen3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}sen3x + C$

3.-Integra las siguientes funciones racionales:

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx$; **b)** $\int \frac{x-1}{x^2-2x-6}dx$ **c)** $\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx$; **d)** $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

Solución:

a) La primera es inmediata ya que el numerador es exactamente la derivada del denominador, por tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx = L\left|x^2+x-6\right| + C$$

b) La segunda se resuelve buscando la derivada del denominador:

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-6}dx = \frac{1}{2}.L\left|x^2-2x-6\right| + C$$

c) La tercera la descomponemos en dos integrales:

$$\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{2x}{1+x^2}dx = arctg\, x + L(1+x^2) + C$$

d) La cuarta se resuelve realizando previamente la división. Y podemos realizarla por Ruffini

Hecha la división se obtiene de cociente x+1 y de resto 2

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}dx = \int (x+1+\frac{2}{x-1})dx = \frac{x^2}{2} + x + 2L|x-1| + C$$

4.-Integra la siguiente función racional: $I=\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$

Como no puede obtenerse en el numerador la derivada del denominador, utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples, ya que el denominador tiene raices reales.

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases}3\\2\end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{2x-1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Como los numeradores son iguales los denominadores también lo serán:

$$2x+1 = A(x-2) + B(x-3)$$

Para x = 3, 7 = A; Para x = 2, 5 = – B

(A x se le han dado los valores de las raices del denominador.).

Ahora procedemos de la siguiente manera:

$$I=\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{7}{x-3}dx + \int \frac{-5}{x-2}dx = 7L|x-3| - 5L|x-2|$$

5.-Calcula por el método más adecuado las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$; **b)** $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx$

a) La primera la resolvemos por un sencillo cambio de variable: $x-1=t \Rightarrow dx = dt$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x-1} + C$$

b) La segunda es una integral en la que el numerador puede transformarse en la derivada del denominor:

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x-6}{3x^2-6x+5}dx = \frac{1}{6}L\left|3x^2-6x+5\right| + C$$

6.-La función f(x)=2x+5 tiene infinitas primitivas que difieren en una constante. ¿Cuál de estas funciones toma el valor 18 para x=2?

$\int(2x+5).dx = x^2+5x+C$ Como toma el valor 18 para x=2 resulta: $2^2+5.2+C=18 \Rightarrow C=4$.

La función buscada es: $F(x) = x^2+5x+4$

7.-Halla una función cuya derivada sea $f(x) = 4x^2 - 7x^2 + 5x - 1$ y que se anule para x=1.

Buscamos la integral indefinida de f(x) que es: $\int (4x^3 - 7x^2 + 5x - 1).dx = x^4 - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + C$

Como se anula para x=1 tenemos: $1^4 - \frac{7.1^3}{3} + \frac{5.1^2}{2} - 1 + C = 0$ y se obtiene que C= - 1/6,

Por tanto, la función buscada es $F(x) = x^4 - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x - \frac{1}{6}$

8.-Halla la función G tal que G"(x)=6x+1; G(0)=1 y G(1)=0

Nos dan la segunda derivada por lo que tenemos que integrar dos veces:

$G'(x) = \int (6x+1)dx = 3x^2 + x + C$ $G(x) = \int (3x^2 + x + C)dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Cx + D$

De G(0)=1 resulta: D=1 , (después de sustituir la x por 0.)

De G(1)=0 obtenemos: 1+1/2+C+1=0 ,(después de sustituir la x por 1) por lo que C = -5/2.

La función que buscamos es la siguiente: $G(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

9.-Dada la función f(x)=6x halla la primitiva que pasa por el punto A(1,2).

Sol: Hallamos la integral indefinida: $\int 6x dx = 3x^2 + C$

que es el conjunto de todas sus primitivas.

Ahora buscamos la que pasa por el punto (1,2):

$3.1^2 + C = 2$ lo que indica que C= –1, por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = 3x^2 - 1$

10.-Resolver la integral $\int sen^5 x\, dx$

Sol: Es impar en senx por lo que hacemos el cambio cosx=t

con lo que -senx.dx=dt. Entonces:

$$\int sen^5\ x\,.dx = \int sen^4\ x\,.sen\,x\,.dx = \int sen^2\ x\,.sen^2\ x\,.sen\,x\,.dx =$$

$$= \int (1 - cos^2\ x)(1 - cos^2\ x).sen\,x\,.dx = \int (1 - t^2)^2\,.(-dt) =$$

$$= -\int (1 - 2t^2 + t^4).dt = -(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}) + C = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -cos\,x + \frac{2\,cos^3 x}{3} - \frac{cox^5 x}{5} + C$$

11.- Calcula por el método más adecuado la siguiente integral: $I = \int \frac{cos\,x}{1 - cos\,x}.dx$

$$I = \int \frac{cos\,x}{1 - cos\,x}.dx = \int \frac{cos\,x\,(1 + cos\,x)}{(1 - cos\,x)(1 + cos\,x)}.dx =$$

$$= \int \frac{cos\,x(1 + cos\,x)}{1 - cos^2\,x}.dx = \int \frac{cos\,x + cos^2\,x}{sen^2\,x} dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{cos\,x}{sen^2\,x} dx + \int \frac{1 - sen^2\,x}{sen^2\,x} dx =$$

$$= \int \frac{cos\,x}{sen^2\,x} dx + \int \frac{1}{sen^2\,x} dx - \int dx = I_1 - \text{ctgx} + x + C$$

Resolvemos ahora la integral $I_1 = \int \frac{cos\,x}{sen^2\,x} dx$ haciendo el cambio senx=t ; cosxdx=dt y entonces $I_1 =$

$$\int \frac{cos\,x}{sen^2\,x} dx = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{sen\,x}$$

12.-Resuelve la integral siguiente: $I = \int \frac{x-3}{x^2+49} dx$

La descomponemos en dos integrales. En la primera podemos buscar en el numerador la derivada del denominador y en la segunda buscamos el arco tangente

$$I = \int \frac{x}{x^2+49} dx - \int \frac{3}{x^2+49} dx = I_1 + I_2$$
$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+49} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+49} dx = L(x^2\ +49)$$
$$I_2 = \int \frac{3}{x^2+49} dx = \int \frac{3/49}{x^2/49 + 49/49} dx = \frac{3}{49}\int \frac{1}{1+(x/7)^2} dx$$

Haciendo el cambio x/7=t resulta x=7t y por tanto dx=7dt por lo que

$$I_2 = \frac{3}{49}\int \frac{1}{1+t^2}.7dt = \frac{21}{49}\int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{3}{7} arctg\ t = \frac{3}{7} arctg\ \frac{x}{7}$$

13.-Calcula por el método más adecuado la integral siguiente: $\int \frac{(Lx)^3}{x} dx$

El método más adecuado es el de sustitución o cambio de variable: $Lx = t$, $\frac{1}{x}$ dx = dt

$$\int \frac{(Lx)^3}{x} dx = \int (Lx)^3 . \frac{1}{x} dx = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(Lx)^4}{4} + C$$

14.-Resuelva la integral $\int (x-1)e^x\, dx$ por partes

$$\left.\begin{array}{l} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{array}\right\} \quad du = dx$$
$$v = \int e^x\, dx = e^x$$
$$\int (x-1)e^x\, dx = (x-1)e^x - \int e^x\, dx = (x-1)e^x - e^x + C$$

15.-Resuelve la siguiente integral por partes: $I = \int \cos^2 x\, dx$ por 2 métodos

<u>Método por partes:</u>

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos x \\ dv = \cos x\, dx \end{array}\right\} \qquad du = -\,sen\, x\, dx$$

$v = \int \cos x\, dx = sen\, x \rightarrow\ I = \int \cos^2\ x\, dx = \int \cos x \cos x\, dx = sen\, x \cos x + \int sen^2\ x\, dx$

$I = sen\, x \cos x + \int (1 - \cos^2\ x) dx \rightarrow\ I = sen\, x \cos x + \int dx - \int \cos^2\ x\, dx \rightarrow$Volvemos a tener la misma:

$$I = \text{sen}x\ \cos x + x - I$$
$$2I = \text{sen}x\ \cos x + x$$
$$I = \frac{\text{sen}x\ \cos x + x}{2} + C$$

<u>Método 2:</u>

Descomponiendo en las relaciones trigonométricas: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2\int \cos 2x\, dx =} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + k$$

16.-Resuelve la siguiente integral por partes: $\int xL(1+x)dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = L(1+x) \\ dv = xdx \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} du = \frac{1}{1+x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$I = \frac{x^2}{2}L|1+x| - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{1+x}dx = \frac{x^2}{2}L(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx$$

Dividiendo x^2 entre **x+1** se obtiene **x-1** de cociente y **1** de resto, por tanto:

$$I = \frac{x^2}{2}L|1+x| - \frac{1}{2}\int (x-1+\frac{1}{x+1})dx \;\; \rightarrow \;\; I = \frac{x^2}{2}L|1+x| - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + L|x+1|\right) + C$$

17.-Resuelve la siguiente integral trigonométrica: $\int \frac{sen\,x + tg\,x}{cos\,x} dx$

$$I = \int \frac{sen\,x + tg\,x}{cos\,x} = \int \frac{sen\,x}{cos\,x}dx + \int \frac{sen\,x}{cos^2\,x}dx = I_1 + I_2$$

La primera la ponemos de forma que el numerador sea la derivada del denominador:

$$I_1 = \int \frac{sen\,x}{cos\,x}dx = -\int \frac{-sen\,x}{cos\,x}dx = -L|cos\,x|$$

Para la segunda hacemos un cambio de variable:

$$I_2 = \int \frac{sen\,x}{cos^2\,x}dx$$

cosx=t ; -senxdx=dt

$$I_2 = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2}dt = -\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) = \frac{1}{t} = \frac{1}{cos\,x}$$

18.-Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{8}{x^2-2x+3}dx$

Las raíces del denominador son imaginarias. En este caso se procede de la siguiente manera:
$x^2-2x+3 = (x-\alpha)^2 + \beta$; es decir, $x^2-2x+3 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$
Identificando coeficientes se obtiene: α=1; β=2.

Entonces resulta: $\int \frac{8}{x^2-2x+3}dx = \int \frac{8}{(x-1)^2+2}dx = \int \frac{8/2}{\frac{(x-1)^2}{2}+1}dx = \int \frac{4}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$

Si hacemos el cambio $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t$ se obtiene que $dx = \sqrt{2}dt$ y llevandolo a la integral planteada,

$$\int \frac{8}{x^2-2x+3}dx = \int \frac{4}{t^2+1}\sqrt{2}dt = 4\sqrt{2}\,arctg\,t = 4\sqrt{2}\,arctg\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

19.-Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

Estamos en el caso en que el denominador tiene raíces múltiples. Las descomposición tenemos que hacerla de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

(Si la raiz múltiple fuese de orden 3, llegariamos con las fracciones hasta $\frac{D}{(x-1)^3}$)

$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$ (donde hemos realizado la suma indicada)

Igualando numeradores: $1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$.

Para calcular los valores de A, B y C damos a x los valores de 0, 1 y otro valor cualquiera: 2

De ese modo obtenemos A=1, B=–1 y C=1.

Entonces:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = L|x| - L|x-1| + \int (x-1)^{-2} dx =$$

$$= L|x| - L|x-1| + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C = L|x| - L|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

20.-Resuelve la siguiente integral: $I = \int \sqrt{25-x^2}dx$

El cambio a realizar en este tipo de integrales es $x = 5\,sen\,t$

$$dx = 5\,cos\,t\,.dt; \qquad \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\,sen\,t)^2} = \sqrt{25(1-sen^2\,t)} = 5\,cos\,t$$

Entonces: $I = \int 5\,cos\,t\,.5\,cos\,t\,.dt = 25\int cos^2\,t\,dt$. (*)

Hacemos $I_1 = \int cos^2\,t\,dt$ y la resolvemos por partes:

$cos\,t = u; \quad cos\,t\,.dt = dv; \quad -sen\,t\,.dt = du; \quad v = \int cos\,t\,.dt = sen\,t$

$$I_1 = sen\,t\,.cos\,t + \int sen^2\,t\,.dt = sen\,t\,.cos\,t + \int (1-cos^2\,t)dt = sen\,t\,.cos\,t + \int dt - \int cos^2\,t\,.dt$$

Es decir, $I_1 = set.\,cos\,t + t - I_1$; y por tanto, $I_1 = \frac{sen\,t.cos\,t+t}{2}$

Resultado que llevado a (*) nos da $I = \frac{25}{2}(sen\,t\,.cos\,t + t)$. Si deshacemos el cambio de variable:

$$sen\,t = \frac{x}{5};\ \text{y de la relación}\ sen^2\,t + cos^2\,t = 1,\ \text{sale que}\ cos\,t = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

Finalmente queda: $I = \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}arcsen\frac{x}{5} + C$

21.-Resuelve la siguiente integral: $I = \int x \cdot \sqrt{x+5}\,dx$

Para eliminar la raíz, hacemos el cambio: $x + 5 = t^2 \rightarrow x = t^2 - 5 \rightarrow dx = 2t$

I= $\int (t^2-5) \cdot \sqrt{t^2} \cdot 2t\,dt = \int (t^2-5)t \cdot 2t\,dt = \int (2t^4 - 10t^2)dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{10t^3}{3} + k$

Luego deshacemos el cambio: I = $\frac{2\sqrt{(x+5)^5}}{5} - \frac{10\sqrt{(x+5)^3}}{3}$ + k

22.-Resuelve la siguiente integral: $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Cambio trigonométrico: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \rightarrow x = \sin\alpha \rightarrow dx = \cos\alpha \cdot d\alpha$

I = $\int \sqrt{1-sin^2\,\alpha} \cdot cos\,\alpha\,d\alpha = \int \sqrt{cos^2\alpha} \cdot \cos\alpha\,d\alpha = \int \boldsymbol{cos^2\alpha}\,d\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{sin2\alpha}{4} + k$ *(ver ejer. 15)*

Deshaciendo el cambio: I = $\frac{arc\sin x}{2} + \frac{\sin(2\,arc\sin x)}{4}$ +k

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Resolver la integral: $I = \int \frac{1}{sen\,x} dx$

(Indicación: Multiplica y divide por senx) $Sol: -\frac{1}{2} L(cos\,x + 1) + \frac{1}{2} L|cos\,x - 1| + C$

2.- Resuelve $I = \int \frac{dx}{1 + sen\,x}$

(Indicación: multiplica y divide por el conjugado del denominador) $Sol: tg\,x - \frac{1}{cos\,x} + C$

3.- Halla el valor de la siguiente integral: $I = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

Sol. Buscando el arco seno resulta: $I = a.arcsen\frac{x}{a} + C$

4.- Resuelve la integral siguiente: $I = \int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx$

Sol: Se hace el cambio $x + 2 = t^{m.c.m(indices)} = t^6$ y se obtiene

$$I = 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6L\left|1 + \sqrt[6]{x+2}\right| + C$$

5.- Resuelve: $I = \int \frac{1}{\sqrt{7 + 6x - x^2}} dx$

Sol: Eliminamos el término en x haciendo el cambio x=t–b/2 . Después buscamos el arco seno y se obtiene $I = arcsen\frac{x-3}{4} + C$

6.- Demostrar que $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a}} dx = L\left|x + \sqrt{x^2 - a} + C\right|$

Sol: Hágase el cambio $\sqrt{x^2 - a} = t - x$

7.- Comprueba que $\int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2L\left|x + \sqrt{x^2 + 4} + C\right|$

8.- Resuelve: $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 20}$ Sol. $\frac{1}{2} arctg\frac{x+4}{2}$

9.- Utilizando el cambio de variable e^x = t, calcula $\int \frac{e^{2x} - 3e^x}{e^x + 1} dx$

Sol. $e^x - 4L(e^x + 1)$

10.- Calcula la siguiente integral: $I = \int \frac{1 + sen^2\,x}{sen\,x\,cos\,x} dx$

(Indicación: Sustituye el 1 por $sen^2 x + cos^2\,x$, después la descompones en suma de dos integrales y cada una de ellas se resuelve por cambio de variable)

Sol. $-2L(cos\,x) + L(senx)$

11.- Resuelve: $I = \int \frac{1}{e^x + 1} dx$ Sol. $I = L(e^x) - L(e^x + 1) + C$

INTEGRAL DEFINIDA - CALCULO DE AREAS

- *Interpretación geométrica*: $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región limitada por las rectas x = a, x = b, y = 0 (eje de abscisa) y la gráfica de la función $f(x)$.
- *Teorema del valor medio*: $\int_a^b f(x)dx$ = (b - a)· f(c)
- *Regla de Barrow:* (integral definida): $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) - F(a)
- *Cálculo de áreas*:
  - Para una función con OX: Comprobar si hay corte con OX entre los intervalos de integración dados
  - Para una función que corta a OX: Buscar los puntos de corte con OX para usarlos como intevalos
  - Para dos funciones que se cortan: Integrar la resta de las funciones entre los puntos de corte

0. - *Calcular la integral* $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}dx$

Solución:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$x = A(x+1)+B(x-1)$$

$$\text{Para x = -1, } B = \frac{1}{2} \quad ; \quad \text{Para x = 1, A} = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx = \frac{1}{2}L|x-1| + \frac{1}{2}L|x+1| =$$

$$= L(\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1})$$

Por tanto,

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \left[L(\sqrt{x-1}\sqrt{x+1})\right]_2^3 = L\sqrt{8} - L\sqrt{3}$$

1.- *Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función* **y = x³ - 3x² - x + 3,** *las rectas* **x = -2, x = 2** y *el eje OX*

1º- Resolver la ecuación: y = $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ (para calcular las abscisa de los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX); $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$, este último fuera del intervalo [-2, 2] , con lo que no se tiene en cuenta.

2º- Calcular la suma de los valores absolutos de las integrales definidas:

$$\left|\int_{-2}^{-1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 - x + 3)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-2}^{-1}\right|$$

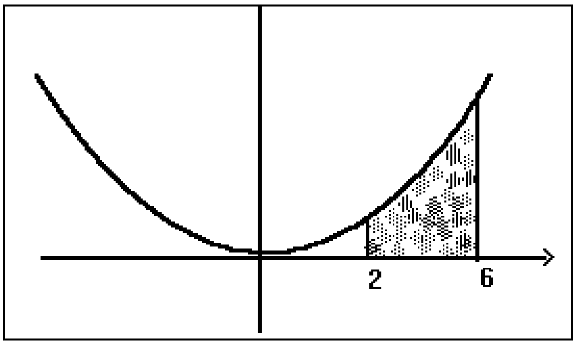
$$+ \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}\right| = \left|-\frac{25}{4}\right| + |4| + \left|-\frac{7}{4}\right| = 12u^2.$$

2.-Calcula el área del recinto limitado por la parábola **$y=x^2$** *y las rectas* **y=0, x=2, x=6.**

Solución:

La recta **y=0** es el eje **x.**

El área del recinto limitado por una función **f(x),** el eje **x** y la rectas **x=a, x=b,** viene dada por el valor absoluto de la integral $I = \int_a^b f(x)dx$ siempre que la función **f(x)** no corte al eje **x** en ningún punto interior del intervalo [a,b]



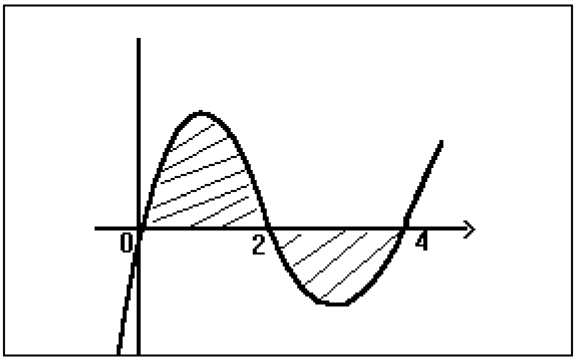
$$I = \int_2^6 x^2\,dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3}$$
$$\text{Area} = \left|\frac{208}{3}\right| = \frac{208}{3}\ u^2$$

3.-** Calcula el área limitada por la curva* ***$y = x^3 - 6x^2 + 8x$ *y el eje* ***x***

Calculamos los puntos de corte de la curva con el eje **x :**

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad \rightarrow \quad (x^2 - 6x + 8)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2; x = 4 \end{cases}$$

Los puntos de corte obtenidos son **0**, **2** y **4** , por tanto el área pedida se halla resolviendo las integrales:



$$I_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$
$$I_2 = \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx$$
$$I_1 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 4;$$

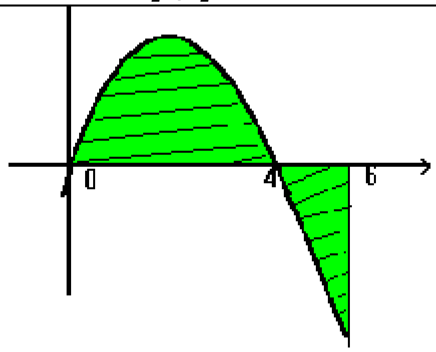
$$I_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 = -4; \qquad \text{Area} = |4| + |-4| = \mathbf{8\ u^2}$$

4.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación ***$y = 9 - x^2$*** y el eje de abscisas***.***

Determinamos los puntos de corte de la curva con el eje **x:** $9-x^2=0 \rightarrow x=3$; $x=-3$

$$I = \int_{-3}^3 (9 - x^2)dx = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^3 = (27-9) - (-27+9) = 36 \ ; \quad \text{Area} = |36| = \mathbf{36\ u^2}$$

5.-*Calcula el área del recinto limitado por la parábola* ***$y = 4x - x^2$*** *y el eje de abscisas en el intervalo* ***[0,6]***



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo [0,6].

$4x-x^2 = 0 \rightarrow x(4-x)=0 \rightarrow x=0; \; x=4$

Como hay un punto de corte dentro del intervalo [0,6] que es x = 4, las integrales a plantear son:

$$I_1 = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$I_1 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{96-64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$I_2 = \int_4^6 (4x - x^2)dx \rightarrow I_2 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^6 = (64 - 72) - \frac{32}{3} = -\frac{56}{3}$$

Area= $\left|\frac{32}{3}\right| + \left|-\frac{56}{3}\right| = \frac{88}{3}$; $\text{Area} = \frac{88}{3}u^2$

6.- *Halla el área comprendida entre las parábolas* ***$y = 8 - x^2$; $y = x^2$***

Buscamos los puntos de corte de las dos curvas: $8 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

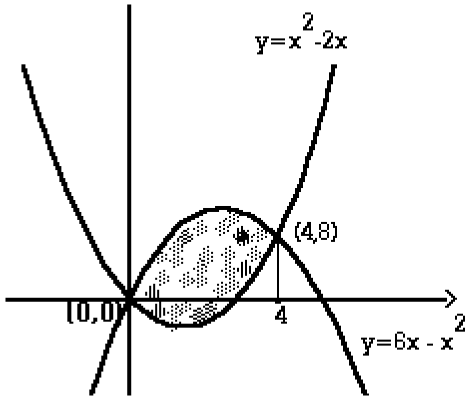
Los límites de integración son: -2 y 2

La función a integrar es la diferencia de las dos funciones: $8 - x^2 - x^2 = 8 - 2x^2$,

por tanto, $I = \int_{-2}^{2}(8 - 2x^2)dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$

$$I = (16 - \frac{16}{3}) - (-16 - \frac{-16}{3}) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \quad ; \quad Area = \left|\frac{64}{3}\right|u^2 = \frac{64}{3}u^2$$

7.-*Halla el área comprendida entre las curvas* ***$y=6x-x^2$*** ; ***$y=x^2-2x$***



Igualamos ambas curvas para encontrar los puntos de intersección:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0; \quad x = 4$$

Función a integrar:

$$(x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 2x^2 - 8x$$

$$I = \int_0^4 (2x^2 - 8x)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2\right]_0^4 =$$

$$= \frac{128-192}{3} = -\frac{64}{3}$$ Area= $\left|-\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3}$ u^2

8.-*Area del recinto limitado por la parábola* ***$y=3x-x^2$*** *y la recta* ***$y=x-3$***

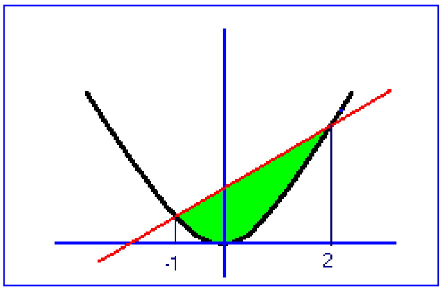
Solución:

Límites de integración: $3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolviendo la ecuación se obtiene x=3; x=-1

Función a integrar: $I = \int_{-1}^{3}(x^2 - 2x - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = -\frac{32}{3}$; Area= $\left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}u^2$

9.-*Halla el área del recinto limitado por la parábola de ecuación* ***y=x²*** *, la recta de ecuación* ***y=x+2*** *y el eje* ***OX.***



Límites de integración:

Son los puntos de corte de la parábola y la recta:

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

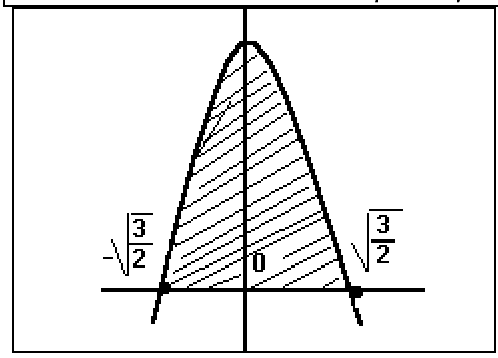
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Función a integrar: $x + 2 - x^2$ (Diferencia de las dos funciones)

resolver la integral: $I = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$;

$$Area = \left|\frac{9}{2}\right| u^2 = \frac{9}{2} u^2$$

10.-*Calcula el área limitada por la parábola de ecuación* ***y=2(1-x²*** **)** *y la recta de ecuación* ***y = 0***



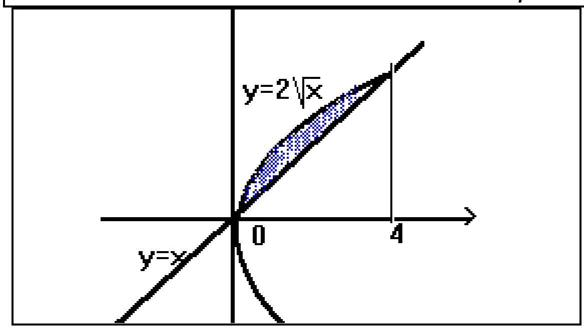
Como la curva es simétrica respecto al eje de ordenadas, podemos integrar entre 0 y $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y multiplicar el resultado por 2.

Límites de integración: $2(1 - x^2) = -1 \Rightarrow 3 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Función a integrar: $2(1 - x^2) - (-1) = 3 - 2x^2$

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - 2x^2)dx = \left[3x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \to \quad Area = 4\sqrt{\frac{3}{2}} u^2$$

11.-*Calcula el área del recinto limitado por la curva de ecuación* $y = 2\sqrt{x}$ *y la recta* ***y = x.***



Límites de integración:

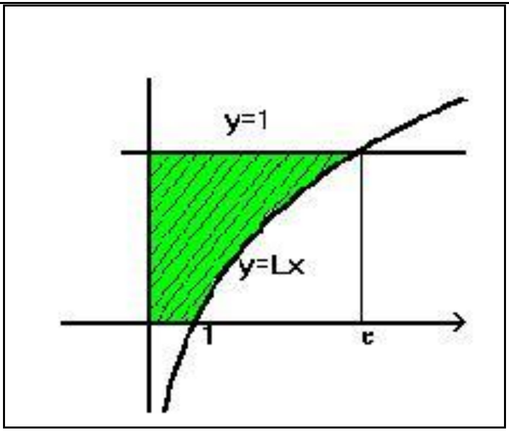
$$2\sqrt{x} = x \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; \ \ x = 4$$

Función a integrar: $2\sqrt{x} - x$

$$I = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \int_0^4 (2x^{\frac{1}{2}} - x)dx = \left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{8}{3} \ ; \quad \text{Area} = \frac{8}{3} u^2$$

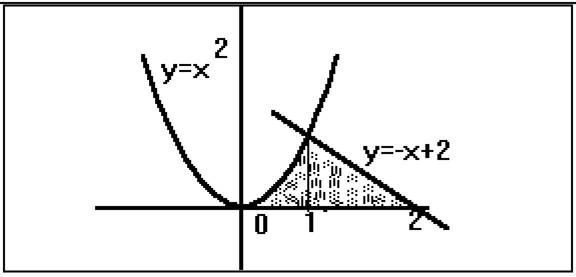
12.-*Halla el área limitada por las gráficas de las funciones* ***y=Lx, y=1*** *y los ejes de coordenadas.*



Observando el dibujo, el área pedida será la diferencia entre las integrales $\int_0^e 1.dx$ y $\int_1^e Lx.dx$

$I_1 = \int_0^e 1.dx = [x]_0^e = e$ $\boldsymbol{I_2 = \int_1^e Lxdx = [xLx - x]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1}$ (por partes): Area=$I_1 - I_2 = e - 1$ u^2

13.- *Halla el área limitada por la parábola* $y = x^2$*, la recta de ecuación* $y = -x + 2$ *y el eje OX*



Punto de corte de la parábola y el eje OX:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Punto de corte de la recta y el eje =OX:

$$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Punto de corte de la parábola y la recta:

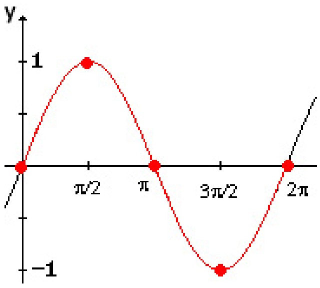
$$x^2 = -x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

La solución x = -2 está fuera del eje OX, por tanto, sólo hemos de considerar el valor x =1

Observando el dibujo, hemos de resolver las integrales siguientes:

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \qquad I_2 = \int_1^2 (-x+2)dx = \frac{1}{2}; \qquad Area = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{6} u^2$$

14.- *Halla el área limitada por la función* ***y= senx*** *, en el primer periodo (entre 0 y 2π)*



Comprobamos si hay puntos de corte dentro del intervalo.

Como se anula en: *sen* π = 0 integramos entre [0,π] y entre [π, 2π]:

$$\int_0^{2\pi} sen\, xdx = \int_0^{\pi} sen\, x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} sen\, x\, dx = [-cosx]_0^{\pi} + [-cosx]_{\pi}^{2\pi}$$

Como el recinto está compuesto por dos áreas iguales:

A = $2 \cdot [-cosx]_0^{\pi}$ = 2 | - cos π + cos 0 | = 2(1 +1) = **4 u²**

CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO

Que se genera al girar la gráfica de la función y = f(x) entre los puntos de abscisas a y b alrededor de un eje:

Alrededor del eje de abscisas: $\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.}$

Para calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar la gráfica de la función $y = x\sqrt{x+1}$, entre los puntos de corte con el eje OX, alrededor de este eje, calculamos la integral definida:

$V = \pi \int_{-1}^{0} \left(x\sqrt{1+x}\right)^2 dx$ (x = -1 y x = 0 son las soluciones de la ecuación $x\sqrt{x+1} = 0$, abscisas de los puntos de corte de la gráfica de f con el eje OX).

$$V = \pi \int_{-1}^{0} \left(x\sqrt{1+x}\right)^2 dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \left[0 - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{12}\, u^3.$$

Alrededor del eje de ordenadas: $\boxed{V = 2\pi \int_a^b f(x)\cdot x\cdot dx.}$

f-3-2-1) Ejemplo: para calcular el volumen del cuerpo que se genera al girar la gráfica de la función $y = x\sqrt{x+1}$, entre los puntos de corte con el eje OX, alrededor del eje de ordenadas, calculamos la integral definida:

$$V = 2\pi \int_{-1}^{0} x\left(x\sqrt{1+x}\right)dx = 2\pi \int_{-1}^{0} x^2\sqrt{1+x}\,dx.$$

Aplicando el cambio de variable $1 + x = t^2$, se tiene: $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$; y los límites de integración:

si x = -1, t = 0 y

si x = 0, t = 1.

$$V = 2\pi \int_0^1 (t^2 - 1)^2 \cdot t \cdot 2t\,dt = 2\pi \int_0^1 \left(2t^6 - 4t^4 + 2t^2\right)dt = 2\pi\left[\frac{2t^7}{7} - \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{32}{105}\pi\, u^3.$$