Vectores en el espacio.

Vector fijo.

Definición	Se llama vector fijo en el espacio $\overrightarrow{AB}$ a un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en el punto B.
Características	• Dirección: conjunto de rectas paralelas sobre la que podemos representar el vector. • Sentido: viene determinado por su origen y extremo. • Módulo: valor de la longitud del segmento que va desde el origen al extremo. El módulo de un vector viene determinado por la siguiente fórmula: $\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Representación de un vector en el espacio.

Coordenadas cartesianas	$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$
Mediante origen en A y extremo en B	$\begin{cases} A\ (x_1, y_1, z_1) \\ B\ (x_2, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Operaciones con vectores.

Suma	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
Resta	$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$
Producto por un escalar	$k \cdot \vec{u} = k \cdot (u_1, u_2, u_3) = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, k \cdot u_3)$

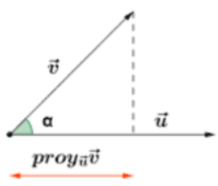
Dependencia e independencia lineal.

Combinación lineal	$\vec{v} = k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + k_n \cdot \vec{u}_n \ , \quad k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$
Linealmente dependientes	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Linealmente dependientes}$
Linealmente independientes	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Linealmente independientes}$

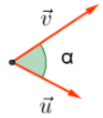
Base de un espacio vectorial.

Definición	Cualquier conjunto de tres vectores libres, $B=(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$, linealmente independientes forman una base del espacio vectorial V^3. Todo vector $\vec{v}$ de V^3 se puede expresar como combinación lineal de B. $\vec{v} = k_1 \cdot \vec{v}_1 + k_2 \cdot \vec{v}_2 + k_3 \cdot \vec{v}_3$
Base canónica	Tres vectores perpendiculares y unitarios. $B=\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{i}\ (1,0,0) \rightarrow \lvert\vec{i}\rvert=1 \\ \vec{j}\ (0,1,0) \rightarrow \lvert\vec{j}\rvert=1 \\ \vec{k}\ (0,0,1) \rightarrow \lvert\vec{k}\rvert=1 \end{cases}$

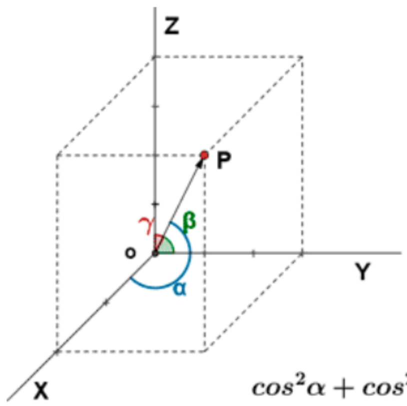
Producto escalar de dos vectores en el espacio.

Expresión geométrica	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert\ \lvert\vec{v}\rvert \cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos.	
Expresión analítica	$\begin{cases}\vec{u}=(x_1,x_2,x_3)\\ \vec{v}=(y_1,y_2,y_3)\end{cases}$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1\cdot y_1 + x_2 + y_2 + x_3 \cdot y_3$	
Proyecciones	Proyección de un vector $\vec{u}\ (x_1,x_2,x_3)$ sobre un vector $\vec{v}\ (y_1,y_2,y_3)$: Segmento proyección: $\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert} = \dfrac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2}}$ Vector proyección: $\overline{\text{Proy}_{\vec{u}}\vec{v}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert^2}\vec{v} = \dfrac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2}(y_1,y_2,y_3)$	

Ángulo entre dos vectores en el espacio.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lvert\vec{u}\rvert \cdot \lvert\vec{v}\rvert \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\ \lvert\vec{v}\rvert}$	
$\cos\alpha = \dfrac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\cdot\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}\cdot\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2}}\right)$	

Cosenos directores



$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Producto vectorial de dos vectores en el espacio.

Vectores		$\begin{cases}\vec{u}\,(x_1,x_2,x_3)\\ \vec{v}\,(y_1,y_2,y_3)\end{cases}$
Características	Módulo	$\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert\,\lvert\vec{v}\rvert\,\operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$
	Dirección	Perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$
	Sentido	El del avance de un sacacorcho que gira en sentido positivo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Expresión analítica		$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$

Interpretación geométrica del producto vectorial de dos vectores en el espacio.

Figura	Área
Paralelogramo	$A_{\text{paralelogramo}} = \lvert\vec{u}\rvert\cdot h = \lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert\cdot\operatorname{sen}\alpha = \lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert$
Triángulo	$A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rvert$

Producto mixto de tres vectores en el espacio.

Vectores	$\begin{cases}\vec{u}\,(x_1,x_2x_3)\\ \vec{v}\,(y_1,y_2,y_3)\\ \vec{w}\,(z_1,z_2,z_3)\end{cases}$	Producto mixto: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$

Aplicaciones del producto mixto de tres vectores en el espacio.

Cuerpo geométrico	Volúmen
Paralepípedo	$V_{\text{paralelepípedo}} = \left\lvert[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right\rvert = \left\lvert[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}]\right\rvert$
Tetraedro	$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}} = \frac{1}{6}\left\lvert[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AD}]\right\rvert = \frac{1}{6}\left\lvert[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]\right\rvert$