9 Aplicaciones de la derivada

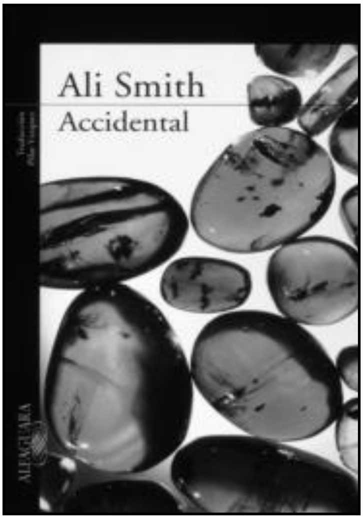
LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Accidental

Magnus [17 años] golpea la cabeza con fuerza contra el edredón. Se vuelve a repetir esas palabras. Ella. Se. Suicidó. Nada. Las palabras son inútiles. No significan nada. No sirven para nada. Se destapa la cabeza. Sigue en la misma habitación. Están de vacaciones en Norfolk. ¿Habrá oscurecido ya? Qué más da. Catherine Masson. Repite el nombre para sí. Catherine Masson Catherine Masson Catherine Masson. No importa no importa no importa. Era feliz, generosa, muy querida. Sus amigos la querían. Vuelve a meter la cabeza debajo del edredón. Era inteligente. Era educada. Pertenecía a la Asociación de Gemología. En la Asociación de Gemología pulían piedras y hacían cosas con ellas, como joyas o gemelos. Seguro que guardaba las cosas que hacía en el tocador de su dormitorio. Se la imagina, delante del ordenador en su habitación. Es una habitación de chica, muy ordenada, limpia. Tiene pósters de cantantes, fotos de personajes de la tele, recortes de caballos y de cachorros de animales, lobeznos, ositos. Es el momento en que abre un correo cuyo remitente es Michael Jackson. Hace clic y aparece. Mira la pantalla. ¡Ay! No importa. No importa. No importa. La había visto una vez en el pasillo. [...] ¿Era ella? Si esa chica era ella, se pasaron casi rozando, pero no se conocían. Ella no sabía quién era él. Ni él mismo tampoco lo sabía. Tiene suerte ella. De estar muerta. No puede sentir nada. Él tampoco siente nada. Pero no está muerto. Luego la noticia corrió por todo el instituto. Una chica de Deans se había suicidado en el cuarto de baño de su casa. Su madre o su hermano la habían encontrado. Oyó el rumor en clase de matemáticas. Charlie quiere ampliar la parte de atrás de su casa y va a construir una extensión de 18 metros cuadrados de suelo. Quiere utilizar el menor número de ladrillos posible, de modo que necesita saber cuál es el perímetro más pequeño que puede utilizar. Da la expresión del área en términos de x, y. El cálculo es la matemática de los límites, especialmente en lo referente a los tipos de cambio. Casi hubo una guerra por quién lo descubrió, si Leibniz o Newton. Leibniz inventó el signo =. Las matemáticas = encontrar lo simple en lo complejo, lo finito en lo infinito. Se sienta en la moqueta, se agarra los pies. [...] No habrá universidad. Ya no es probable que vaya. La universidad le da risa. El cálculo le da risa. Todo es una broma.

ALI SMITH

Accidental
Ali Smith



Un joven de 17 años, Magnus, pasa las vacaciones con su familia en una ciudad de la costa inglesa. Siente remordimientos por haber colaborado en un «juego» que hizo que una compañera del instituto se suicidase. Durante ese verano conoce también a una mujer joven, Ámbar, con la que vive una aventura que tendrá graves consecuencias.

En la novela hay más referencias a las matemáticas, por ejemplo, una tarde Magnum le dice a Ámbar que el signo igual lo inventó Leibniz. Ella le contesta:

Pero ¿cómo sabes que es verdad?

Bueno, dijo Magnus. Supongamos que lo leí en un libro, porque no recuerdo exactamente ni cuándo ni cómo lo aprendí, pero supongamos que lo leí en un libro, lo cual lo hace presumiblemente cierto.

¿Por qué lo hace cierto el hecho de estar en un libro?, dijo Ámbar.

Porque si estaba en un libro era presumiblemente un libro de texto, dijo Magnus. Y los libros de texto suelen estar escritos por gente que ha estudiado el tema durante mucho tiempo y con profundidad suficiente para enseñárselo a gente que sabe mucho menos. Y además, los libros son editados por unos editores que comprueban los hechos antes de publicarlos. Y suponiendo que no lo aprendiera en un libro, sino que me lo enseñara un profesor, se podría aplicar el mismo criterio.

Pero ¿quieres decir que los profesores son editados por editores que comprueban los hechos antes de que los enseñen? […]

Ya sabes a qué me refiero, dijo. Venga ya. Déjame. En paz. […]

No estoy enamorada de ti, le había dicho Ámbar. Así que no lo olvides. Sencillamente los hombres de tu edad son apropiados por naturaleza para las mujeres de mi edad: se trata de elevarnos a la máxima potencia. Tú eres el exponente variable.

¿Había oído bien? ¿Se había inventado él al oír potencia lo del exponente variable? ¿Era una broma típica de Ámbar? Navegando en Internet […] descubrió que después de todo no había sido Leibniz, sino posiblemente un galés llamado Robert Recorde quien lo había inventado hacia 1550. El único dato biográfico relativo a Robert Recorde que aparecía en la página era que había muerto en prisión por deudas.

Resuelve el «problema de Charlie»: Se quiere adosar a una casa una habitación rectangular de 18 m². ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo y utilizar el menor número de ladrillos posible?

Llamamos x e y a las dimensiones de la habitación: $xy = 18 \rightarrow y = \frac{18}{x} \rightarrow P(x, y) = 2x + y$

$$P(x) = 2x + \frac{18}{x} \rightarrow P'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 & \text{Solución no válida} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$P''(x) = \frac{36}{x^3} \rightarrow P''(3) > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

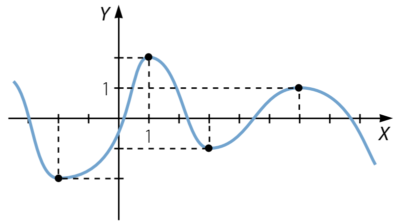
Las dimensiones de la habitación de Charlie son $x = 3$ metros, $y = 6$ metros.

Aplicaciones de la derivada

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Determina el crecimiento y decrecimiento de esta función.**

Indica en qué puntos alcanza máximos o mínimos relativos y absolutos.



La función es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (1, 3) \cup (6, +\infty)$.
Y es creciente en $(-2, 1) \cup (3, 6)$.

Tiene un máximo relativo en $(1, 2)$ y en $(6, 1)$. Tiene un mínimo relativo en $(-2, -2)$ y en $(3, -1)$.

A la vista de la función, no podemos asegurar que presente máximos ni mínimos absolutos.

002 **Una función definida para todos los números reales es decreciente en el intervalo $(-2, 5)$ y creciente en el resto. ¿Cuáles son los máximos y mínimos?**

Se alcanzará un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 5$.

003 **Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, calcula estos límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x))$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x))$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))^{g(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))^{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 1 \\ \text{Indeterminación} & \text{si } L = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < L < 1 \end{cases}$

ACTIVIDADES

001 **Decide dónde crecen y decrecen estas funciones.**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \to x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3},\ x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- En $\left(-\infty, 1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $\left(1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$$g'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

002 **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones, y compruébalo gráficamente.**

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

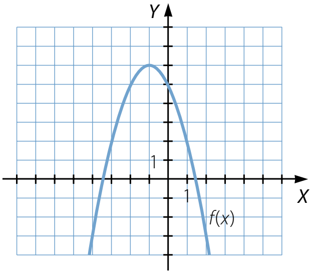
b) $g(x) = -x + 7x^2$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$f'(x) = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Gráficamente:

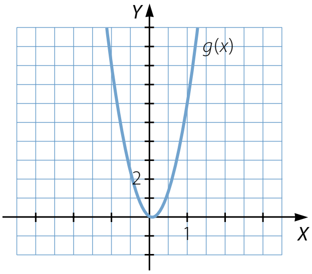


b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica, estudiamos el crecimiento para todos los números reales.

$$g'(x) = -1 + 14x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{14}$$

- En $\left(-\infty, \frac{1}{14}\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{1}{14}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

Gráficamente:



003 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y calcula los máximos y mínimos de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo, siendo sus coordenadas $(0, -1)$.

b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$g'(x) = \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Así, estudiamos el crecimiento en $(-\infty, -1)$, $\left(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ y $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

- En $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

En $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ presenta un máximo, y sus coordenadas son $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

004 **Halla las coordenadas de los máximos y mínimos de la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^3+3}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^3-12}{x^5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt[3]{12}$$

Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, el extremo se encuentra en $(-\infty, 0)$.

- En $\left(-\infty, -\sqrt[3]{12}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt[3]{12}, 0\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = -\sqrt[3]{12}$ presenta un mínimo, y sus coordenadas son $\left(-\sqrt[3]{12}, \frac{-3}{4\sqrt[3]{12}}\right)$.

005 **Halla los máximos y mínimos de estas funciones mediante la derivada segunda.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^6 + 2}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ con $f'(x) = \dfrac{-x^2+3}{x^4} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$f''(x) = \frac{2x^2-12}{x^5}$$

$f''\left(-\sqrt{3}\right) > 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}$ Mínimo

$f''\left(\sqrt{3}\right) < 0 \rightarrow x = \sqrt{3}$ Máximo

b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{-4x^7 + 4x}{(x^6 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 1$$

$$g''(x) = \frac{20x^{12} - 100x^6 + 8}{(x^6 + 2)^3}$$

$$g''(0) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \rightarrow x = 0 \text{ Mínimo}$$

$$g''(-1) = \frac{20 - 100 + 8}{27} < 0 \rightarrow x = -1 \text{ Máximo}$$

$$g''(1) = \frac{20 - 100 + 8}{27} < 0 \rightarrow x = 1 \text{ Máximo}$$

006 **Utiliza la derivada segunda para determinar los máximos y mínimos de la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^3 + x^2 - 6x}$$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3,\ 0,\ 2\}$.

$$f'(x) = \frac{-2x^3 - 10x^2 - 6x + 18}{(x^3 + x^2 - 6x)^2} = \frac{-2x + 2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = \frac{6x^4 - 24x^3 + 32x^2 - 16x}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2)^2} = \frac{x(x-2)(6x^2 - 12x + 8)}{x^4(x-2)^2(x+3)^2} = \frac{6x^2 - 12x + 8}{x^3(x-2)(x+3)^2}$$

$f''(1) < 0 \rightarrow x = 1$ Máximo

007 **Decide dónde son cóncavas y dónde son convexas estas funciones.**

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

a) Como $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$$f'(x) = 21x^2 - 2x - 1$$

$$f''(x) = 42x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

- En $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{21}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{1}{21},\ +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

b) Como $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$$g'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g''(x) = \frac{-2x^3 + 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow -x^3 + 3x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$$

- En $\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\ \sqrt{3}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava
- En $\left(-\sqrt{3},\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3},\ +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

008 **Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.**

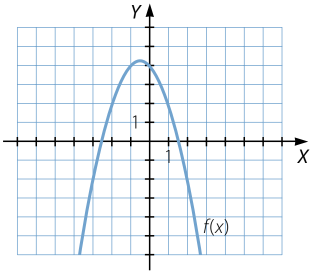
a) $f(x) = -x^2 - x + 4$ b) $g(x) = -x - 5x^2$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$f'(x) = -2x - 1$

$f''(x) = -2 < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

Gráficamente:

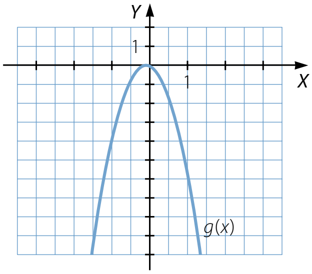


b) $g(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto, estudiamos la concavidad para todos los números reales.

$g'(x) = -1 - 10x$

$g''(x) = -10 < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

Gráficamente:



009 **Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de estas funciones, y a partir de ellos, determina los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+7x}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

Así, en $x = -1$ se alcanza un punto de inflexión.

b) Como el dominio de $g(x)$ es $\mathbb{R} - \{-7, 0\}$, estudiamos la concavidad en $(-\infty, -7)$, $(-7, 0)$, $(0, 7)$ y $(7, +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 7}{(x^2 + 7x)^2}$$

$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 42x - 98}{(x^2 + 7x)^3} = 0 \rightarrow x = 7$$

- En $(-\infty, -7) \cup (0, 7) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $(-7, 0) \cup (7, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava

Hay un punto de inflexión en $x = 7$.

010 **Estudia los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 4x^3 - 8x + 7$ **b)** $g(x) = \dfrac{-x^3 + 2}{x^2}$

a) $f'(x) = 12x^2 - 8$

$f''(x) = 24x = 0 \rightarrow x = 0$

$f'''(x) = 24 \rightarrow f'''(0) \neq 0 \rightarrow x = 0$ Punto de inflexión

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

b) $g'(x) = \dfrac{-x^3 - 4}{x^3}$

$g''(x) = \dfrac{12}{x^4} > 0 \rightarrow$ No hay puntos de inflexión y la función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup (0 +\infty)$, ya que 0 no está en el dominio.

011 **Calcula los puntos de inflexión de las siguientes funciones mediante la derivada tercera.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^3}$ **b)** $g(x) = -\dfrac{x}{x^2 - 7}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 3}{2x^4}$

$$f''(x) = \frac{x^2 - 6}{x^5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6},\ x = \sqrt{6}$$

$$f'''(x) = \frac{-3x^2 + 30}{x^6}$$

$f'''\left(-\sqrt{6}\right) \neq 0$, $f'''\left(\sqrt{6}\right) \neq 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{6}$ y en $x = \sqrt{6}$ presenta puntos de inflexión.

b) $g'(x) = \dfrac{x^2 + 7}{(x^2 - 7)^2}$

$$g''(x) = \frac{-2x^3 - 42x}{(x^2 - 7)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

$g'''(x) = \dfrac{6x^4 + 252x^2 + 294}{(x^2 - 7)^4} \rightarrow g'''(0) \neq 0 \rightarrow$ En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

012 **Halla los máximos, mínimos o puntos de inflexión de estas funciones.**

a) $f(x) = -4x^6$ **b) $g(x) = 3x^7$**

a) $f'(x) = -24x^5 = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = -120x^4 = 0 \rightarrow x = 0$

$f'''(x) = -480x^3 \rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{IV)}(x) = -1.440x^2 \rightarrow f^{IV)}(0) = 0$

$f^{V)}(x) = -2.880x \rightarrow f^{V)}(0) = 0$

$f^{VI)}(x) = -2.880 \neq 0$

La primera derivada no nula tiene orden par y $f^{VI)}(0) < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un máximo.

b) $g'(x) = 21x^6 = 0 \rightarrow x = 0$

$g''(x) = 126x^5 = 0 \rightarrow x = 0$

$g'''(x) = 630x^4 \rightarrow g'''(0) = 0$

$g^{IV)}(x) = 2.520x^3 \rightarrow g^{IV)}(0) = 0$

$g^{V)}(x) = 7.560x^2 \rightarrow g^{V)}(0) = 0$

$g^{VI)}(x) = 15.120x \rightarrow g^{VI)}(0) = 0$

$g^{VII)}(x) = 15.120 \neq 0$

El orden de la primera derivada no nula es impar, por lo que en $x = 0$ presenta un punto de inflexión.

013 **Si el número de visitantes a un museo se obtiene mediante $f(x) = \dfrac{300x}{x^3 + 2}$, siendo x la hora desde su apertura, ¿cuándo recibe mayor número de visitantes?**

Debemos maximizar esta función: $f(x) = \dfrac{300x}{x^3 + 2}$

$$f'(x) = \frac{-600x^3 + 600}{(x^3 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = \frac{1.800x^5 - 7.200x^2}{(x^3 + 2)^3} \rightarrow f''(1) < 0 \rightarrow \text{En } x = 1 \text{ alcanza un máximo.}$$

Así, el mayor número de visitantes lo recibe cuando pasa una hora desde su apertura.

014 **Halla el número real x que minimiza esta función.**

$$D(x) = (a - x)^2 + (b - x)^2 + (c - x)^2 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$D'(x) = -2(a - x) - 2(b - x) - 2(c - x)$

$D'(x) = -2a + 2x - 2b + 2x - 2c + 2x = 6x - 2(a + b + c) = 0$

$$\rightarrow x = \frac{2(a + b + c)}{6} = \frac{a + b + c}{3}$$

$D''(x) = 6 > 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{a + b + c}{3} \in \mathbb{R}$ alcanza un mínimo.

015 **La capacidad de concentración de una saltadora de altura, en una competición de atletismo de tres horas de duración, viene dada por la función:**

$$f(t) = 300t(3 - t)$$

donde t mide el tiempo en horas. ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

$f'(t) = 900 - 600t = 0 \rightarrow t = \frac{3}{2}$

$f''(t) = -600 < 0 \rightarrow$ En $t = \frac{3}{2}$ alcanza un máximo.

Así, el mejor momento para que la saltadora pueda batir su propia marca es cuando lleva 1 hora y media.

016 **Halla dos números reales positivos, sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.**

Si llamamos x e y a los dos números reales positivos, se cumple que: $x + y = 10$
Debemos maximizar la función:

$P(x,\ y) = x^2y^2 \rightarrow P(x) = x^2(10 - x)^2 = x^2(100 + x^2 - 20x) = 100x^2 + x^4 - 20x^3$

$P'(x) = 200x + 4x^3 - 60x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 5, x = 10$

Veamos cuál es el número que maximiza la función $P(x)$.

$P''(x) = 200 + 12x^2 - 120x$

$P''(0) = 200 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un mínimo.

$P''(5) = -100 < 0 \rightarrow$ En $x = 5$ alcanza un máximo.

$P''(10) = 200 > 0 \rightarrow$ En $x = 10$ alcanza un mínimo.

Los dos números que buscamos son $x = 5$ e $y = 5$.

017 **De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.**

Llamamos x a la longitud de la arista de la base e y a la altura del prisma.
Como el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, se cumple que:
$2x + 2y = 30 \rightarrow x + y = 15 \rightarrow y = 15 - x$

La función que debemos optimizar es: $V(x) = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$

$V'(x) = 30x - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 10$

$V''(x) = 30 - 6x \rightarrow V''(0) > 0, V''(10) < 0 \rightarrow$ El máximo se alcanza en $x = 10$.

Las dimensiones del prisma recto de base cuadrada son:

Arista de la base: 10 cm

Altura: 5 cm

018 **Determina el punto de la gráfica de la función que a cada número le hace corresponder su doble y cuya distancia al punto (6, 3) es mínima. ¿Cuál es esa distancia?**

La función que a cada número le hace corresponder su doble es: $y = 2x$

Un punto que satisface esta función es $(x,\ 2x)$ y la función que nos da la distancia desde este punto a $(6,\ 3)$ es: $d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (2x-3)^2}$

Optimizamos la función $D(x) = d^2(x) = (x - 6)^2 + (2x - 3)^2$.

$D'(x) = 2(x - 6) + 4(2x - 3) = 2x - 12 + 8x - 12 = 10x - 24 = 0 \rightarrow x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

$D''(x) = 10 > 0 \rightarrow$ En $x = \frac{12}{5}$ alcanza un mínimo.

Así, la distancia al punto (6, 3) será mínima en el punto $\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$.

019 Entre todos los rectángulos de área 3 m², encuentra las dimensiones del que tiene mínimo el producto de sus diagonales.

Sean x e y las dimensiones del rectángulo de modo que: $xy = 3$

La función a optimizar viene dada por:

$$d \cdot d = d^2 \rightarrow P(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$$

$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

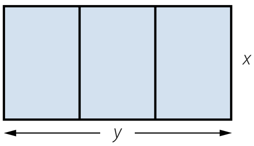
Como la solución negativa no es válida, tenemos que:

$$P''(x) = 2 + \frac{54}{x^4} \rightarrow P''\left(\sqrt{3}\right) > 0 \rightarrow \text{En este punto se alcanza un mínimo.}$$

Las dimensiones son $x = \sqrt{3}$, $y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, por tanto, se trata de un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros.

020 Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?

Llamamos x e y a las dimensiones de la zona rectangular, y consideramos que las divisiones son paralelas a los lados de medida x. Para dividir la zona rectangular en tres partes necesitamos dos divisiones, por lo que se debe cumplir que:



$$4x + 2y = 160 \rightarrow 2x + y = 80 \rightarrow y = 80 - 2x$$

Debemos optimizar la función que nos da el área, es decir:

$$A(x, y) = xy \rightarrow A(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$$

$$A'(x) = 80 - 4x = 0 \rightarrow x = 20$$

$$A''(x) = -4 < 0 \rightarrow \text{En } x = 20 \text{ alcanza un máximo.}$$

Así, las dimensiones de la zona rectangular deben ser $x = 20$ metros e $y = 40$ metros.

021 Razona si la función $f(x) = e^{x^2-1}$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$. Si es así, determina el valor del punto c tal que su derivada se anula.

f es una función continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$.

$f(1) = 1 = f(-1)$

Por tanto, aplicando el teorema de Rolle, existe $c \in (-1, 1)$ tal que:

$$f'(c) = 0 \rightarrow 2c \cdot e^{c^2-1} = 0 \rightarrow 2c = 0 \rightarrow c = 0$$

022 Comprueba si $f(x) = 3\cos^2 x$ verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. ¿Para qué valor de c se cumple que $f'(c) = 0$?

f es una función continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$f'(x) = -6\cos x \operatorname{sen} x = -3\operatorname{sen} 2x \rightarrow f$ es derivable en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Además: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Por el teorema de Rolle existe $c \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ tal que:

$f'(c) = 0 \rightarrow -3\operatorname{sen} 2c = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2c = 0 \rightarrow c = \pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

023 **Razona si la función $f(x) = 7x^4 - x^3 - 4x$ cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2].**

f es una función polinómica $\rightarrow$ Es continua en [0, 2] y derivable en (0, 2). Por tanto, sí se cumplen las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 2].

024 **Razona si $f(x) = \cos^2 x$ cumple las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, \pi]$. Si es así, halla la derivada que resulta.**

f es una función continua en $[0, \pi]$.

$f'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x$, que es derivable en $(0, \pi)$.

Por el teorema del valor medio existe $c \in (0, \pi)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi - 0} \rightarrow -\operatorname{sen} 2c = \frac{1-1}{\pi} = 0 \rightarrow 2c = 0 + k\pi \rightarrow c = \frac{k\pi}{2}$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ Como $c \in (0, \pi)$, se tiene que $c = \frac{\pi}{2}$.

025 **Razona si $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = \ln x$ cumplen las condiciones del teorema del valor medio generalizado en el intervalo [1, 3]. En ese caso, ¿cuánto vale c?**

f y g son dos funciones continuas en [1, 3] y derivables en (1, 3),
con $g(1) = \ln 1 = 0 \neq \ln 3 = g(3)$.

Como se cumplen las condiciones del teorema del valor medio generalizado existe $c \in (1, 3)$ tal que: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)}$

$f'(x) = 2x - 1$	$f(1) = 0$	$f(3) = 6$
$g'(x) = \frac{1}{x}$	$g(1) = 0$	$g(3) = \ln 3$

Así, $\frac{2c-1}{\frac{1}{c}} = \frac{6-0}{\ln 3 - 0} \rightarrow c(2c-1) = \frac{6}{\ln 3} \rightarrow c = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{48}{\ln 3}} = 1{,}92$

026 **Comprueba si las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ verifican las condiciones del teorema del valor medio generalizado en el intervalo [−1, 1].**

f y g son dos funciones continuas en [−1, 1] y derivables en (−1, 1) por ser polinómicas. Además, $g(1) = 1 \neq -1 = g(-1)$ con lo cual, sí se cumplen las condiciones del teorema del valor medio generalizado.

027 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{4x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x+9} - 3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{4x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{4} = \dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x+9} - 3} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x+9} - 3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - 1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+9}}} = \dfrac{-1}{\dfrac{1}{6}} = -6$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{2}{1} = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \text{tg}^2\, x}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

028 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^5 - 4x^2}{-x^2 + 1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - e^x}{3\,\text{sen } x}$ d) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{\ln(x^2 - 6x - 6)}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^5 - 4x^2}{1 - x^2} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{20x^4 - 8x}{-2x} = \dfrac{12}{-2} = -6$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - e^x}{3\,\text{sen } x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^{-x} - e^x}{3\cos x} = \dfrac{-2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{\ln(x^2 - 6x - 6)} \to \dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2x - 9}{\dfrac{2x - 6}{x^2 - 6x - 6}} = \lim\limits_{x\to 7} \dfrac{(2x - 9)(x^2 - 6x - 6)}{2x - 6} = \dfrac{5}{8}$

029 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x^3}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} \to \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} \to \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{1/x} = \lim\limits_{x\to +\infty} xe^x = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{2x^3} \to \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6x^2}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6x^2} \to \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{12x} \to \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{12} = +\infty$

030 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{4x} - \frac{2}{xe^x} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x+1}}{3x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x)$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{4x} - \frac{2}{xe^x} \right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 8}{4xe^x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{4e^x + 4xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{4(1+x)} = \frac{1}{4}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x+1}}{3x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x \ln x) \to 0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

031 Halla estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} (tg\ x)^x$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x-5}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(tg\ x)^x \to 0^0$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(tg\ x)^x\right) = \lim_{x\to 0}(x \ln(tg\ x)) \to 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(tg\ x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{tg\ x}\cdot\frac{1}{cos^2\ x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{tg\ x \cdot cos^2\ x} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{\frac{1}{cos^2\ x}\cdot cos^2\ x - tg\ x \cdot 2\ cos\ x\ sen\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{1 - 2\ tg\ x\ cos\ x\ sen\ x} = 0$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(tg\ x)^x\right) = 0 \to \lim_{x\to 0}(tg\ x)^x = e^0 = 1$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x-5} \to 1^\infty$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x-5}\right) = \lim_{x\to+\infty}(4x-5)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) \to \infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{4x-5}} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2}}{\frac{-4}{(4x-5)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x(4x-5)^2}{-4(x+3)x^2} = 12$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x+5}\right) = 12 \to \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x-5} = e^{12}$$

032 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}} \to \infty^0$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln(x^2+2) \to 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+2} = 0$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}}\right) = 0 \to \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+2} = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1} \to 1^\infty$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} (3x+1)\ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right) \to \infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)}{\dfrac{1}{3x+1}} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x-2}{x+3}\cdot\dfrac{-5}{(x-2)^2}}{\dfrac{-3}{(3x-1)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5(3x-1)^2}{3(x+3)(x-2)} = \frac{45}{3} = 15$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1}\right) = 15 \to \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+1} = e^{15}$$

033 **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de las siguientes funciones polinómicas.**

a) $f(x) = x^2(x+1)$

b) $g(x) = 3x^3 - 7x + 2$

c) $h(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$

d) $i(x) = |x^2 - 2|$

e) $j(x) = |-x^2 + 6x - 9|$

a) $f'(x) = 2x(x+1) + x^2 = 3x^2 + 2x = 0 \to x = 0,\ x = \dfrac{-2}{3}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2}{3}\right) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2}{3}, 0\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

Por tanto, $f(x)$ alcanza un máximo en $x = \dfrac{-2}{3}$ y un mínimo en $x = 0$.

b) $g'(x) = 9x^2 - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}, x = \frac{-\sqrt{7}}{3}$

- En $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{7}}{3}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3}\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

Así, $g(x)$ alcanza un máximo en $x = \frac{-\sqrt{7}}{3}$ y un mínimo en $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

c) $h'(x) = -4x^3 + 6x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

- En $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1\right) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creciente
- En $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup (1, +\infty) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreciente

Así, en $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ y en $x = 1$ alcanza dos máximos

y en $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, un mínimo.

d) $i(x) = \left|x^2 - 2\right| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x^2 - 2 \geq 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x^2 - 2 < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \\ 2 - x^2 & \text{si } x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \end{cases}$

$i'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \\ -2x & \text{si } x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \end{cases}$

Así $i'(x) = 0 \rightarrow x = 0$, así, los intervalos en los que debemos estudiar el crecimiento y decrecimiento son: $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, 0\right), \left(0, \sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

- En $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creciente
- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreciente

La función $i(x)$ alcanza un máximo en $x = 0$ y dos mínimos en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

e) $j(x) = \left|-x^2 + 6x - 9\right| = \left|-(x-3)^2\right| = \left|(x-3)^2\right| = (x-3)^2$

$j'(x) = 2(x - 3) = 0 \rightarrow x = 3$

- En $(-\infty, 3) \rightarrow j'(x) < 0 \rightarrow j(x)$ decreciente
- En $(3, +\infty) \rightarrow j'(x) > 0 \rightarrow j(x)$ creciente

Así, en $x = 3$ alcanza un mínimo.

034 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las funciones racionales.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ c) $h(x) = \dfrac{7x^2 + 2}{x}$ e) $j(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

b) $g(x) = \dfrac{40 - 5x}{10 - x}$ d) $i(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$ f) $k(x) = -\dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

a) f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = 0$ alcanza un máximo y en $x = 2$, un mínimo.

b) g es continua en $\mathbb{R} - \{10\}$.

$$g'(x) = \frac{-10}{(10-x)^2} < 0 \rightarrow g(x) \text{ decreciente en todo su dominio}$$

c) h es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$h'(x) = \frac{7x^2 - 2}{x} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{7}},\ x = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{2}{7}}, +\infty\right) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creciente
- En $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{7}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{\dfrac{2}{7}}\right) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreciente

Así, en $x = -\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ alcanza un máximo y en $x = \sqrt{\dfrac{2}{7}}$, un mínimo.

d) i es continua en $\mathbb{R}$.

$$i'(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2+2)^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creciente

Así, en $x = \sqrt{2}$ alcanza un máximo y en $x = -\sqrt{2}$ un mínimo.

e) j es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$j'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow j(x) \text{ decreciente en todo su dominio}$$

f) k es continua en $\mathbb{R} - \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

$$k'(x) = \frac{-x^4 + 9x^2}{(x^2-3)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -3,\ x = 3$$

- En $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \rightarrow k'(x) < 0 \rightarrow k(x)$ decreciente
- En $\left(-3, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 3\right) \rightarrow k'(x) > 0 \rightarrow k(x)$ creciente

En $x = -3$ alcanza un mínimo y en $x = 3$, un máximo.

035 **Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, de estas funciones exponenciales.**

a) $f(x) = 3x^2e^x$ b) $g(x) = (x + 3)e^x$ c) $h(x) = 6xe^{-x}$

Las tres funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

a) $f'(x) = e^x(6x + 3x^2) = 0 \rightarrow x = -2, x = 0$
- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -2$ alcanza un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

b) $g'(x) = e^x(x + 4) = 0 \rightarrow x = -4$
- En $(-\infty, -4) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-4, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

En $x = -4$ alcanza un mínimo.

c) $h'(x) = e^{-x}(6 - 6x) = 0 \rightarrow x = 1$
- En $(-\infty, 1) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreciente

En $x = 1$ alcanza un máximo.

036 **Estudia el crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones logarítmicas.**

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ **b)** $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ c) $h(x) = x \ln \sqrt{x}$

a) El dominio de f es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 1$ alcanza un mínimo.

b) El dominio de g es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow x = \sqrt{e}$$

- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

En $x = \sqrt{e}$ alcanza un máximo.

c) El dominio de h es $(0, +\infty)$ y es continua en todo el dominio.

$$h'(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$$

- En $\left(0, \frac{1}{e}\right) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creciente

En $x = \frac{1}{e}$ alcanza un mínimo.

037 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de estas funciones trigonométricas, y decide si alcanzan máximos o mínimos en algún punto.**

a) $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $g(x) = x - sen\ x$ c) $h(x) = arc\ tg\ x$

a) f es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = -2\,sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos x = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$

Estudiamos el crecimiento en $(-\pi, \pi)$ ya que las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.

- En $\left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

La función tiene un máximo en $x = \frac{-\pi}{2}$ y un mínimo en $x = \frac{\pi}{2}$.

Por ser una función periódica de período 2π, podemos extender el resultado a toda la recta real repitiéndose indefinidamente intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

b) g es continua en $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 1 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0$

Estudiamos el crecimiento en $(-\pi, \pi)$ ya que $g'(x)$ es periódica de período 2π.

$g'(x) > 0$ en $(-\pi, 0) \cup (0, \pi) \rightarrow g(x)$ creciente $\rightarrow$ No tiene extremos relativos.

Extendiendo el resultado a toda la recta real, g no tiene extremos relativos.

c) h es continua en $\mathbb{R}$.

$h'(x) = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \rightarrow h(x)$ creciente en $\mathbb{R} \rightarrow$ No tiene extremos relativos.

038 **Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:**

$$f(x) = x^4e^{-x}$$

Como consecuencia calcular los máximos y los mínimos locales de *f*.

(País Vasco. Julio 2005. Bloque C. Problema C)

f es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = e^{-x}(4x^3 - x^4) = 0 \rightarrow 4x^3 - x^4 = 0 \rightarrow x = 0, x = 4$

- En $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, 4) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

Así, en $x = 0$ alcanza un mínimo y en $x = 4$, un máximo.

039 **Determina los máximos y mínimos de estas funciones utilizando la derivada segunda.**

a) $y = x^3 - 24x - 6$ c) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ e) $y = \ln(x^2 + 1)$

b) $y = 8x + 6x^2 - x^4$ d) $y = \frac{x^2+4}{x}$ f) $y = (x^2 + 4)e^x$

a) $y' = 3x^2 - 24 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

$y'' = 6x$

$y''\left(\sqrt{8}\right) > 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt{8}$ alcanza un mínimo.

$y''\left(-\sqrt{8}\right) < 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{8}$ alcanza un máximo.

b) $y' = 8 + 12x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$

$y'' = 12 - 12x^2$

$y''(2) < 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un máximo.

$y''(-1) = 0$

$y'''(x) = -24x \rightarrow y'''(-1) \neq 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un punto de inflexión.

c) $y' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$y'' = \dfrac{-4x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(1) > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ alcanza un mínimo.

$y''(-1) < 0 \rightarrow$ En $x = -1$ alcanza un máximo.

d) $y' = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2$

$y'' = \dfrac{8}{x^3}$

$y''(-2) < 0 \rightarrow$ En $x = -2$ alcanza un máximo.

$y''(2) > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un mínimo.

e) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$

$y'' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow y''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ alcanza un mínimo.

f) $y' = (x^2 + 2x + 4)e^x \neq 0 \rightarrow$ No tiene extremos relativos.

040 **Dada $g(x) = ax^4 + bx + c$, calcula los valores de a, b y c para que $g(x)$ tenga en el punto $(1, -1)$ un mínimo relativo y la recta tangente a la gráfica de $g(x)$, en $x = 0$, sea paralela a la recta $y = 4x$.**

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Opción 1)

$g'(x) = 4ax^3 + b$

$(1, -1)$ pertenece a la gráfica $\rightarrow g(1) = -1 \rightarrow a + b + c = -1$

$(1, -1)$ es un mínimo $\rightarrow g'(1) = 4a + b = 0$

Además, $g'(0) = 4 \rightarrow b = 4$ por ser la gráfica de $g(x)$ en $x = 0$ paralela a la recta $y = 4x$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} a + b + c = -1 \\ 4a + b = 0 \\ b = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{array}\right.$

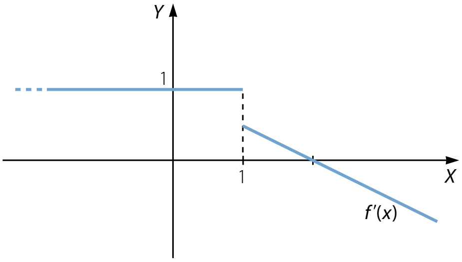
041 La función derivada de cierta función continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función definida a trozos formada por las semirrectas del dibujo.

a) Diga si $f(x)$ es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ y por qué.

b) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de $f(x)$.

c) Encuentre si $f(x)$ tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de x y de qué tipo.

d) Sabiendo que $f(0) = 1$, calcule el valor de $f(1)$.



(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 2)

a) No es derivable en $x = 1$ ya que las derivadas laterales son diferentes.

b) f es creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ ya que la derivada es positiva. Es decreciente en $(2, +\infty)$ pues, la derivada es negativa.

c) En $x = 2$ la función tiene un máximo ya que la derivada se anula y la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

d) En $(-\infty, 1)$ la derivada vale 1, así la función será de la forma $f(x) = x + k$ con k constante.
$f(0) = 1 \to k = 1$. Como la función es continua, $f(1) = 1 + 1 = 2$.

042 Se considera la función:

$$f(x) = ae^{x^2+bx+c} \qquad a > 0$$

Calcula los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un mínimo relativo en el punto $(1, a)$ y $f(0) = 1$.

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 1)

$f(x) = ae^{x^2+bx+c}$

$f'(x) = (2x + b)ae^{x^2+bx+c}$

$(1, a)$ es un mínimo $\to f(1) = a$ y $f'(1) = 0$.

Así, $ae^{1+b+c} = a \to e^{1+b+c} = 1 \to e^{1+b+c} = e^0 \to 1 + b + c = 0 \to b + c = -1$

$(2 + b)ae^{1+b+c} = 0 \to 2 + b = 0 \to b = -2$, así sustituyendo en la condición de arriba tenemos que $c = 1$.

Por otra parte, $f(0) = 1 \to ae^c = 1 \to e^c = \frac{1}{a} \to e = \frac{1}{a} \to a = \frac{1}{e}$

Así, $a = \frac{1}{e}$, $b = -2$, $c = 1$.

043 Sea $f(x) = x^2 + mx$ (donde m es un parámetro real). Hallar el valor del parámetro m para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -\frac{3}{4}$.

(C. Valenciana. Septiembre 2004. Ejercicio A. Problema 3)

$f'(x) = 2x + m$. Como f tiene un mínimo en $x = \frac{-3}{4}$ se cumple que:

$f'\left(\frac{-3}{4}\right) = 0 \to \frac{-3}{2} + m = 0 \to m = \frac{3}{2}$

044 **Comprueba que la derivada en el punto $x = -1$ de la función $f(x) = (x + 1)^3$ es nula y, sin embargo, no tiene un extremo relativo.**
¿Contradice esto algún teorema?

$f'(x) = 3(x + 1)^2 \rightarrow f'(-1) = 0$, sin embargo, $f'(x) > 0$ para todo valor real de x, por tanto, f es siempre creciente y no puede tener ningún extremo relativo en $x = -1$.

Esto no contradice el teorema: «Si una función es derivable en un punto y tiene en él un extremo, entonces la derivada es cero», ya que el recíproco no tiene por qué ser cierto, es decir, si la derivada en un punto es cero, no tenemos garantizado que la función en ese punto tenga un extremo.

045 **Comprueba que la siguiente función tiene un extremo relativo en el punto $x = 0$ y su derivada en ese punto no es nula.**
¿Contradice esto algún teorema?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como f es positiva en $\mathbb{R} - \{0\}$ y vale -1 en $x = 0 \rightarrow$ En este punto alcanza un mínimo. Por otra parte, f no es derivable en $x = 0$.

Esto no contradice el teorema enunciado en el ejercicio anterior ya que al no ser la función derivable, no podemos aplicar el teorema.

046 **Demuestra que la gráfica de la función $y = 2x^3 + x^2 + x - 1$ corta al eje de abscisas en un solo punto.**

$f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ es continua en $\mathbb{R}$.

$f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 3 > 0 \rightarrow$ Por el teorema de Bolzano, la función corta al eje de abscisas en un punto de este intervalo.

f es derivable en $(0, 1)$ con $f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$ y además $f'(x) > 0$ para todo x real por lo que f es siempre creciente.

Así, el único punto de corte con el eje de abscisas está en el intervalo $(0, 1)$.

047 **Determina los intervalos de concavidad y de convexidad, así como los puntos de inflexión, de las siguientes funciones.**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

b) $y = x^4 + 2x^3 - 3$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x^2}$

e) $y = \sqrt{9 + x^2}$

f) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

Así, en $x = 1$ alcanza un punto de inflexión.

b) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 + 6x^2$

$y'' = 12x^2 + 12x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -1$

- En $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

Así, en $x = -1$ y $x = 0$ alcanza puntos de inflexión.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$y' = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No tiene puntos de inflexión.}$$

Así, los intervalos en los que hay que estudiar la curvatura son:
$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

d) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$y' = \frac{x^3+16}{x^3}$$

$$y'' = \frac{-48}{x^4} < 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

e) La función está definida en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$y'' = \frac{9}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}} > 0 \text{ en } \mathbb{R} \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No tiene puntos de inflexión.

f) Esta función está definida en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$y'' = \frac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}} < 0 \text{ en todo su dominio} \rightarrow \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

048 **Estudia en qué intervalos estas funciones son cóncavas y en cuáles son convexas. Calcula también los puntos de inflexión que tenga cada una de ellas.**

a) $y = (x-3)e^x$

b) $y = \dfrac{\ln x}{2x}$

c) $y = \cos x - \cos 2x$

d) $y = \ln(x^2 - x)$

e) $y = \dfrac{x^2}{2^x}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = (x-2)e^x$ $\qquad\qquad y'' = (x-1)e^x = 0 \to x = 1$

- En $(-\infty, 1) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = 1$ alcanza un punto de inflexión.

b) La función es continua en $(0, +\infty)$.

$$y' = \frac{1 - \ln x}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{2\ln x - 3}{2x^3} = 0 \to \ln x = \frac{3}{2} \to x = e^{\frac{3}{2}} \to x = \sqrt{e^3}$$

- En $\left(0, \sqrt{e^3}\right) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = \sqrt{e^3}$ alcanza un punto de inflexión.

c) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$y' = -sen\, x + 2\, sen\, 2x$

$y'' = -cos\, x + 4\, cos\, 2x = -cos\, x + 4(cos^2 x - sen^2 x) =$

$= -cos\, x + 4(cos^2 x - 1 + cos^2 x) = 8\, cos^2 x - cos\, x - 4 = 0$

Las soluciones aproximadas son:

$cos\, x = 0{,}77 \to x = 0{,}69 + 2k\pi;\ x = 5{,}59 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{R}$

$cos\, x = -0{,}65 \to x = 2{,}28 + 2k\pi;\ x = 3{,}79 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{R}$

Estudiamos la concavidad en $(0, 2\pi)$ ya que la función es periódica:

- En $(0;\ 0{,}69) \cup (2{,}28;\ 3{,}79) \cup (5{,}59;\ 2\pi) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava
- En $(0{,}69;\ 2{,}28) \cup (3{,}79;\ 5{,}59) \to y'' < 0 \to$ Función convexa

Por tanto, todos los puntos que anulan y'' son puntos de inflexión.

d) La función está definida en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

$$y'' = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2} < 0 \text{ en todo su dominio} \to \text{Función convexa}$$

No tiene puntos de inflexión.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$$

$$y'' = \frac{2 - 4x\ln 2 + x^2 \ln^2 2}{2^x} = 0 \to x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{\ln 2}$$

- En $\left(-\infty, \frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}, +\infty\right) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava
- En $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}, \frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}\right) \to y'' < 0 \to$ Función convexa

En $x = \frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}$ y $x = \frac{2+\sqrt{2}}{\ln 2}$ alcanza dos puntos de inflexión.

049 **Comprueba que la función $f(x) = x^4$ tiene nula la derivada segunda en el punto $x = 0$ y, sin embargo, no tiene un punto de inflexión. ¿Contradice esto algún teorema?**

$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2 \to f''(0) = 0$

En $x = 0$ no se alcanza un punto de inflexión porque $f''(x) > 0$ para todo valor de x real. Por tanto, f es siempre cóncava.

Esto no contradice el teorema: «Si una función es derivable en un punto y tiene en él un punto de inflexión, entonces la segunda derivada es cero», ya que el recíproco no tiene por qué cumplirse, es decir, si la derivada segunda en un punto es cero, no tenemos garantizado que en él haya un punto de inflexión.

050 **Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función:**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 1. Pregunta A)

Si pasa por el origen de coordenadas: $f(0) = 0 \to c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Como la recta tangente en $x = 1$ tiene pendiente 3, se cumple que:

$f'(1) = 3 \to 3 + 2a + b = 3 \to 2a + b = 0$

$f''(x) = 6x + 2a$

Como tiene un punto de inflexión en $x = -1$ se cumple que:

$f''(-1) = 0 \to -6 + 2a = 0 \to a = 3$

Sustituyendo en la condición anterior: $b = -6$

051 **Calcula para $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.**

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 1)

$f'(x) = e^{-x} - (x + 1)e^{-x} = -xe^{-x} = 0 \to x = 0$

Como f es continua en $\mathbb{R}$, estudiamos el crecimiento en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

- En $(-\infty, 0) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(0, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

Así, en $x = 0$ alcanza un máximo, $(0, 1)$.

$f''(x) = (x - 1)e^{-x} = 0 \to x = 1$

- En $(-\infty, 1) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En $(1, +\infty) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

Así, en $x = 1$ alcanza un punto de inflexión, cuyas coordenadas son $\left(1, \dfrac{2}{e}\right)$.

052 **Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:**

$$f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$$

(Madrid. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 4)

$$f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0\to x=\pm 1$$

$$f''(x)=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=0\to x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$$

$f''(-1)>0\to$ En $x=-1$ alcanza un mínimo.

$f''(1)<0\to$ En $x=1$ alcanza un máximo.

$$f'''(x)=\frac{-6x^4+36x^2-6}{(x^2+1)^4}$$

$f'''\left(-\sqrt{3}\right)\neq 0$ y $f'''\left(\sqrt{3}\right)\neq 0\to$ En $x=-\sqrt{3}$ y $x=\sqrt{3}$ alcanza dos puntos de inflexión.

$f'''(0)\neq 0\to$ En $x=0$ alcanza otro punto de inflexión.

053 **Demuestra que la curva de ecuación $y=x^4-x^3+x^2-x+1$ no tiene ningún punto de inflexión.**

(Baleares. Junio 2006. Opción A. Cuestión 3)

$y'=4x^3-3x^2+2x-1$

$y''=12x^2-6x+2=0$ no tiene soluciones reales $\to$ No tiene puntos de inflexión.

054 **Dada la función $f(x)=9x+6x^2-x^4$, calcula los puntos de inflexión de $f(x)$.**

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta B)

$y'=9+12x-4x^3$

$y''=12-12x^2=0\to x=-1,\ x=1$

$y'''=-24x\to y'''(-1)\neq 0,\ y'''(1)\neq 0\to$ En $x=-1$ y $x=1$ alcanza dos puntos de inflexión. Sus coordenadas son: $(-1,\ -4)$ y $(1,14)$.

055 **Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por:**

$$f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$$

Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y=2x+3$.

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 1)

$f'(x)=6x^2+24x+a$

$f''(x)=12x+24=0\to x=-2$

$f'''(x)=12\neq 0\to$ En $x=-2$ alcanza un punto de inflexión.

Como la recta tangente a la gráfica de f en este punto tiene pendiente 2:
$f'(-2)=2\to 24-48+a=2\to a=26$.

El punto de inflexión pertenece a la curva y a la recta tangente por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=-16+48-2a+b=-20+b \\ y=-4+3=-1 \end{array}\right\}\to -20+b=-1\to b=19$$

056 Calcule los valores del parámetro a, $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1.512$ en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 3)

$y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a$

$y'' = 12ax^2 + 12ax = 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x = 0, x = -1$

Como las tangentes en estos puntos deben ser perpendiculares, las pendientes deben cumplir:

$$y'(0) = \frac{-1}{y'(-1)} \rightarrow -a = \frac{-1}{-4a + 6a - a} \rightarrow -a = \frac{-1}{a} \rightarrow a = \pm 1$$

057 Se considera la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son parámetros reales.

a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje X.

b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje X.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 2)

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Una recta paralela al eje X tiene pendiente nula, por lo que debe cumplirse:

$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

$f'(4) = 0 \rightarrow 48 + 8a + b = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por estas dos condiciones obtenemos:

$a = -9, b = 24 \rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + c$

b) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

$f'''(x) = 6 \neq 0 \rightarrow$ En $x = 3$ alcanza un punto de inflexión.

Para que el punto de inflexión $x = 3$ de la gráfica de f esté en el eje X, se debe verificar que: $f(3) = 0 \rightarrow 27 - 81 + 72 + c = 0 \rightarrow c = -18$

058 Demuestra que la curva $f(x) = x - 2\cos x$ tiene un punto de inflexión en el interior del intervalo $[0, \pi]$ y halla la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.

Haz un dibujo en un entorno del punto hallado.

(Baleares. Junio 2007. Opción A. Cuestión 3)

$f'(x) = 1 + 2\operatorname{sen} x$

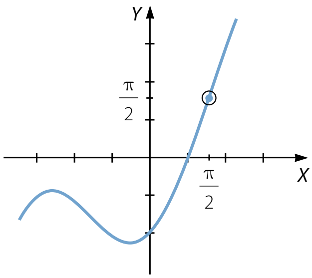
$f''(x) = 2\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ en $[0, \pi]$

$f'''(x) = -2\ sen\ x \rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \rightarrow$ En $x = \frac{\pi}{2}$ alcanza un punto de inflexión.

Ecuación de la recta tangente en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \rightarrow y - \frac{\pi}{2} = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = 3x - \pi$$

Gráfico en un entorno del punto:



059 **Hallar una función polinómica de tercer grado tal que tenga un extremo relativo en (1, 1) y un punto de inflexión en (0, 3). ¿Es (1, 1) el único extremo de la función? Determinar los máximos y mínimos relativos de *f*.**

(Canarias. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

La función que buscamos tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Como los puntos (1, 1) y (0, 3) pertenecen a la función:
$f(1) = 1 \rightarrow a + b + c + d = 1$

$f(0) = 3 \rightarrow d = 3$

Hay un extremo relativo en (1, 1), por tanto: $f'(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Como hay un punto de inflexión en (0, 3), $f''(0) = 0$.

$f''(x) = 6ax + 2b \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ d = 3 \\ b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 3 \end{array}\right.$$

Así, tenemos que: $f(x) = x^3 - 3x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$

Por tanto, (1, 1) no es el único extremo.

$f''(x) = 6x$

$f''(1) > 0 \qquad f''(-1) < 0$

Así, en (1, 1) alcanza un mínimo, y en (−1, 5), un máximo.

060 **Queremos añadir a una casa una nueva habitación rectangular de 12 m^2 de superficie. ¿Qué longitud debemos dar a sus paredes para que el perímetro sea el menor posible y minimizar la cantidad de ladrillos utilizados en esa ampliación?**

Si x e y son las dimensiones tenemos que: $xy = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$

Como la nueva habitación va a ser un añadido de la casa, una de sus paredes debe coincidir, de esa forma no necesitamos ningún ladrillo, puesto que ya está construida.

Así, debemos minimizar: $P(x, y) = 2x + y \rightarrow P(x) = 2x + \frac{12}{x}$

$P'(x) = 2 - \frac{12}{x^2} = \frac{2x^2 - 12}{x^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

Como una longitud no puede ser negativa, tenemos que: $x = \sqrt{6} \rightarrow y = 2\sqrt{6}$

Comprobamos que en este punto se alcanza un mínimo:

$P''(x) = \frac{24}{x^3} \rightarrow P''\left(\sqrt{6}\right) > 0 \rightarrow$ Se trata de un mínimo.

Las dimensiones de la habitación son $x = \sqrt{6}$ m e $y = 2\sqrt{6}$ m.

061 **Se desea delimitar una parcela rectangular, pegada a la pared de una nave. Si se dispone de 200 m de tela metálica para cercarla, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela que tiene la mayor superficie?**

Llamamos x e y a las dimensiones de la parcela. Como va a estar pegada a la pared de la nave, se va a verificar que: $2x + y = 200 \rightarrow y = 200 - 2x$

Se trata maximizar la función superficie dada por:

$S(x) = xy \rightarrow S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

$S'(x) = 200 - 4x = 0 \rightarrow x = 50$

$S''(x) = -4 < 0$ en $\mathbb{R} \rightarrow$ En $x = 50$ alcanza un máximo.

Las dimensiones de la parcela son $x = 50$ m e $y = 100$ m.

062 **¿Qué dimensiones debe tener un paragüero con forma de prisma cuadrado de 20 dm^3 de volumen, para que en su fabricación se gaste la menor cantidad posible de material?**

Llamamos x a la arista de la base e y a la altura del prisma cuadrangular.

Entonces, se debe cumplir que: $x^2y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{x^2}$

Como un paragüero no tiene base superior, tenemos que minimizar la función superficie que viene dada por:

$S(x, y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x\frac{20}{x^2} = x^2 + \frac{80}{x}$

$S'(x) = 2x - \frac{80}{x^2} = \frac{2x^3 - 80}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{40}$

$S''(x) = 2 + \frac{160}{x^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{40}\right) > 0 \rightarrow$ Se alcanza un mínimo.

Las dimensiones del paragüero son:

Arista de la base $x = \sqrt[3]{40}$ dm Altura $y = \frac{20}{\left(\sqrt[3]{40}\right)^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{1.600}}$ dm

063 **¿Todos los cilindros con igual volumen tienen la misma superficie total? ¿Cuál tiene la menor superficie?**

Sean r y h las dimensiones del radio de la base y de la altura del cilindro.

Si $V(r, h)$ es el volumen:

$$V(r, h) = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{V(r, h)}{\pi r^2}$$

La superficie del cilindro que debemos minimizar viene dada por:

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V(r, h)}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V(r, h)}{r}$$

Como el volumen siempre es el mismo, derivamos respecto de r:

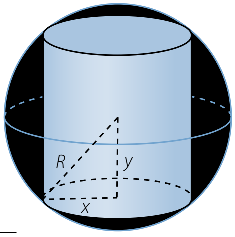
$$S'(r, h) = 4\pi r - \frac{2V(r, h)}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V(r, h)}{r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}}$$

$$S''(r, h) = 4\pi + \frac{4V(r, h)}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}}\right) > 0 \rightarrow \text{Se alcanza un mínimo.}$$

Así, no todos los cilindros con el mismo volumen tienen la misma superficie total y el de menor superficie tiene estas dimensiones:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{4V(r, h)}{\pi}}$$

064 **De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**



Llamamos x al radio de la base del cilindro e y a la mitad de su altura, así, $R = 9$.

Se verifica que:

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 81 \rightarrow y = \sqrt{81^2 - x^2}$$

La función que debemos maximizar es:

$V(x, y) = \pi x^2 h$ donde $h = 2y$.

$$V(x, y) = 2\pi x^2 y \rightarrow V(x) = 2\pi x^2\sqrt{81 - x^2} = 2\pi\sqrt{81x^4 - x^6}$$

$$V'(x) = \frac{2\pi(324x^3 - 6x^5)}{2\sqrt{81x^4 - x^6}} = \frac{\pi(324x^3 - 6x^5)}{\sqrt{81x^4 - x^6}} = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt{54}$$

- En $\left(0, \sqrt{54}\right) \rightarrow V'(x) > 0 \rightarrow V(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{54}, +\infty\right) \rightarrow V'(x) < 0 \rightarrow V(x)$ decreciente

Por tanto, en $x = \sqrt{54}$ alcanza un máximo.

Así, la altura y el radio del cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio 9 cm es:

Radio: $\sqrt{54}$ cm

Altura: $2\sqrt{81 - 54} = 2\sqrt{27}$ cm

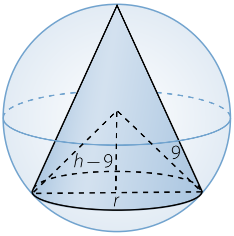
065 **De todos los conos que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**

Llamamos r y h al radio y la altura del cono.

Se cumple que:

$r^2 + (h - 9)^2 = 81$

$r^2 = 81 - (h - 9)^2 = -h^2 + 18h$



La función que debemos optimizar es:

$$V(r, h) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi(-h^2 + 18h)h = \frac{1}{3} \cdot \pi(-h^3 + 18h^2)$$

$$V'(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi(-3h^2 + 36h) = \pi(-h^2 + 12h) = 0 \rightarrow h = 0,\ h = 12$$

$$V''(h) = \pi(-2h + 12)$$

$V''(0) > 0 \rightarrow$ Para $h = 0$ alcanza un mínimo.

$V''(12) < 0 \rightarrow$ Para $h = 12$ alcanza un máximo.

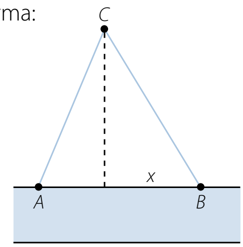
Así, el cono que tiene mayor volumen es el que tiene altura 12 cm y radio de la base $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.

066 **Se quiere organizar una competición deportiva que consiste en nadar desde un lugar *A*, situado en la orilla de un río, hasta otro lugar *B* situado en la misma orilla; allí se sale del río y corriendo hay que llegar hasta otro lugar *C*, desde el cual se regresa de nuevo a *B*, donde se acaba la competición. Se supone que todos los trayectos son rectilíneos.**

La distancia de *A* a *B* mide 0,2 km y la de *C* al río mide 0,5 km.

Determina a qué distancia de *A* hay que situar el punto *C* para que el recorrido completo sea el menor posible.

Podemos expresar la distancia recorrida de la siguiente forma:



$E(x) = 0{,}2 + 2\sqrt{0{,}5^2 + x^2}$

$E'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{0{,}5^2 + x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow E'(x) < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow E'(x) > 0 \rightarrow$ Función creciente

Así, en $x = 0$ alcanza un mínimo.

Por tanto, para que el trayecto sea lo mínimo posible, $x = 0$.

Así, la distancia de C a A es: $d = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}04 + 0{,}25} = 0{,}54$ km

067 **Descomponer el número 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.**

(Aragón. Junio 2006. Opción B. Cuestión 3)

Si llamamos x y $8 - x$ a los sumandos debemos minimizar esta función:

$f(x) = x^3 + (8 - x)^2$

$f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) = 6x + 2 \rightarrow f''(2) = 14 > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un mínimo.

Así, los dos sumandos que buscamos son 2 y 6.

068 **Con un trozo de alambre de 12 cm de longitud se pueden formar distintos rectángulos. ¿Cuál de ellos tiene la superficie máxima?**

Sean x e y las dimensiones del rectángulo de modo que:

$2x + 2y = 12 \rightarrow x + y = 6$

Así, la función que debemos maximizar es: $S(x) = x(6 - x) = 6x - x^2$

$S'(x) = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$

$S''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del rectángulo de superficie máxima son 3 y 3, es decir, un cuadrado de lado 3 cm.

069 **Se desea fabricar con hoja de lata una papelera cilíndrica, sin tapa, de 10 dm³ de capacidad. ¿Qué dimensiones deberá tener para que en su fabricación se utilice la menor cantidad de hoja de lata?**

Si r y h son el radio y la altura del cilindro: $\pi r^2 h = 10 \rightarrow h = \dfrac{10}{\pi r^2}$

La función a optimizar es: $S(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{10}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{20}{r}$

$S'(r) = 2\pi r - \dfrac{20}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 20 = 0 \rightarrow \pi r^3 - 10 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$

$S''(r) = 2\pi + \dfrac{40}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}\right) > 0 \rightarrow$ En $r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ alcanza un mínimo.

Por lo tanto, para utilizar la menor cantidad de hoja de lata, las dimensiones de la papelera cilíndrica serán $r = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ dm y $h = \sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}$ dm.

070 **¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?**

La función del enunciado representa una parábola con vértice en el eje Y, por lo que habrá dos soluciones simétricas con respecto a este eje, una en el primer cuadrante y otra en el segundo. Sea $(a, 4 - a^2)$ un punto de la parábola del primer cuadrante.

$y' = -2x \to y'(a) = -2a \to$ La ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(a,\ 4 - a^2)$ es: $y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \to y = -2ax + a^2 + 4$

Los puntos de intersección de esta recta con los ejes son: $(0, a^2 + 4)$ y $\left(\dfrac{a^2+4}{2a}, 0\right)$.

El área del triángulo que se forma con estos puntos y el punto (0, 0) es:

$A(a) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2+4}{2a}(a^2+4) = \dfrac{(a^2+4)^2}{4a}$ que es la función que debemos optimizar

$$A'(a) = \frac{16a^2(a^2+4) - 4(a^2+4)^2}{16a^2} = \frac{3a^4 + 8a^2 - 16}{4a^2} = 0 \to a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ es la solución del primer cuadrante.

$$A''(a) = \frac{4a^2(12a^3 + 16a) - 8a(3a^4 + 8a^2 - 16)}{16a^4} = \frac{3a^4 + 16}{2a^3} \to A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

En $\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$ la tangente forma con los ejes un triángulo de área mínima.

071 **Determina el punto de la parábola $y = x^2$ que está más próximo al punto (3, 0).**

Sea (x, y) el punto de la parábola que buscamos. La distancia de este punto al punto (3, 0) viene dada por: $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$

La función a optimizar es: $D = d^2 = (x-3)^2 + y^2 \to D(x) = (x-3)^2 + x^4$

$D'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 0 \to x = 1$ es la única solución real.

$D''(x) = 2 + 12x^2 \to D''(1) > 0 \to$ En $x = 1$ alcanza un mínimo.

Así, el punto buscado es (1, 1).

072 **Entre todos los rectángulos de 3 m^2 de área, halla las dimensiones del que tenga mínimo el producto de las diagonales.**

Sean x e y las dimensiones del rectángulo de modo que: $xy = 3$

La función a optimizar viene dada por:

$$P = d \cdot d = d^2 = x^2 + y^2 \to P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$$

$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} = 0 \to 2x^4 - 18 = 0 \to x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$$

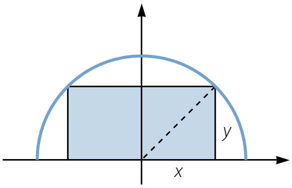
La solución válida es: $x = \sqrt{3}$

$P''(x) = 2 + \dfrac{54}{x^4} \to P''\left(\sqrt{3}\right) > 0 \to$ En este punto alcanza un mínimo.

Las dimensiones son $x = \sqrt{3}$ e $y = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, es decir, un cuadrado de lado $\sqrt{3}$ metros.

073 **Determina las dimensiones de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 5 cm de radio, teniendo uno de los lados sobre el diámetro de ella.**

Sea x la mitad de la base del rectángulo e y su altura. Se cumple que:



$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$

La función a optimizar es:

$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} = 2\sqrt{25x^2 - x^4}$

$$A'(x) = \frac{50x - 4x^3}{\sqrt{25x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 50x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

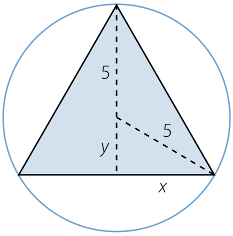
En $\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow A'(x) > 0$ y en $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(x) < 0$

Por tanto, en $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones del rectángulo de área máxima son: $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, es decir, se trata de un cuadrado.

074 **De todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de 5 cm de radio, halla las dimensiones del que tiene mayor área.**

Llamamos x a la mitad de la base del triángulo, $y + 5$ a la altura. Se verifica que:



$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$

La función que hay que optimizar viene dada por:

$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{25 - y^2}\,(y + 5) = (y + 5)\sqrt{25 - y^2}$

$$A'(y) = \sqrt{25 - y^2} + (y + 5) \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{25 - y^2}} = \frac{25 - y^2 - y^2 - 5y}{\sqrt{25 - y^2}} = 0$$

$$\rightarrow -2y^2 - 5y + 25 = 0 \rightarrow y = -5,\ y = \frac{5}{2}$$

La solución válida es la positiva.

- En $\left(-5, \frac{5}{2}\right) \rightarrow A'(y) > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(y) < 0 \rightarrow$ Función decreciente

Así, en $y = \frac{5}{2}$ alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del triángulo de mayor área son:

Base: $2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{75}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Altura: $y + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$

075 **Considera la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esta función que tiene máxima pendiente en el intervalo [1, *e*].

Como necesitamos que la pendiente sea máxima, la función que tenemos que optimizar es la función derivada primera: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$

$f''(x) = \frac{2-x}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

$f'''(x) = \frac{2x-6}{x^4} \rightarrow f'''(2) < 0 \rightarrow$ En $x = 2$ alcanza un máximo.

$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en el punto $\left(2, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$ con pendiente $f'(2) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ es:

$$y - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}(x-2)$$

076 **Halla las dimensiones de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado, genera un cilindro de volumen máximo.**

Tenemos que optimizar la función $V(r, h) = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura del cilindro. La cartulina rectangular, por las condiciones del enunciado, tendrá dimensiones h, r, por lo que se cumplirá que:

$2h + 2r = 60 \rightarrow h + r = 30 \rightarrow h = 30 - r$

Así, $V(r) = \pi r^2(30 - r) = 30\pi r^2 - \pi r^3$

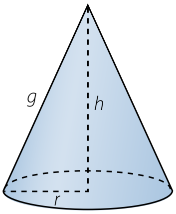
$V'(r) = 60\pi r - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r = 0,\ r = 20$

La solución válida es $r = 20$.

$V''(r) = 60\pi - 6\pi r \rightarrow V''(20) < 0 \rightarrow$ En $r = 20$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones de la cartulina para conseguir el cilindro de volumen máximo son: $r = 20$ cm y $h = 10$ cm.

077 **El perímetro de un triángulo isósceles mide 10 m. Si gira alrededor de la altura correspondiente al lado desigual, engendra un cono. Calcula los lados del triángulo para que el volumen del cono sea máximo.**



Por el teorema de Pitágoras:

$r^2 + h^2 = g^2 \rightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2}$

Como el perímetro del triángulo es 10 m, tenemos que:

$2g + 2r = 10 \rightarrow g + r = 5 \rightarrow g = 5 - r$

Así, sustituyendo en la expresión de la altura, tenemos:

$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{(5-r)^2 - r^2} = \sqrt{25 + r^2 - 10r - r^2} = \sqrt{25 - 10r}$

La función a optimizar es:

$$V(r,\, h) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \rightarrow V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \sqrt{25 - 10r} = \frac{\pi}{3}\sqrt{25r^4 - 10r^5}$$

$$V'(r) = \frac{\pi(100r^3 - 50r^4)}{6\sqrt{25r^4 - 10r^5}} = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \end{cases}$$

La solución válida es $r = 2$.

Así, las dimensiones del triángulo son:

Base: 4 m Lados: 3 m

078 **Determina un punto de la curva de ecuación $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

(Andalucía. Junio 2006. Opción A. Ejercicio 1)

$$y' = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

Como tenemos que maximizar la pendiente, se trata de maximizar la función derivada, por lo que volvemos a derivar:

$$y'' = e^{-x^2}(-2x)(1 - 2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = e^{-x^2}(4x^3 - 6x) = 0 \rightarrow x = 0,\, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y''' = e^{-x^2}(-8x^4 + 24x^2 - 6)$$

$$y'''(0) < 0 \qquad y'''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) > 0 \qquad y'''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) > 0$$

La pendiente de la recta tangente será máxima en el punto (0, 0).

079 **Considérense las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = -e^{-x}$.**

Para cada recta r perpendicular al eje X, sean A y B los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de f y g respectivamente. Determínese la recta r para la cual el segmento AB es de longitud mínima.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba A. Problema 2)

Sea A el punto de corte de la recta con la función $f(x) = e^x \rightarrow A(x,\, e^x)$

Sea B el punto de corte de la recta con la función $f(x) = -e^{-x} \rightarrow B(x,\, -e^{-x})$

La longitud del segmento que determinan estos dos puntos viene dada por la expresión:

$$l(x) = \sqrt{(x - x)^2 + (-e^{-x} - e^x)^2}$$

La función que debemos optimizar es:

$$L(x) = l^2(x) = (e^{-x} + e^x)$$

$$L'(x) = -e^{-x} + e^x = 0 \rightarrow \frac{-1}{e^x} + e^x = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = \ln 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$L''(x) = e^{-x} + e^x \rightarrow L''(0) = 2 > 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ alcanza un mínimo.}$$

Así, la longitud es mínima para $x = 0$.

080 **El coste del marco de una ventana rectangular es 12,50 € por metro lineal de los lados verticales y 8 € por metro lineal de los lados horizontales.**

a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible.

b) Calcular, además, el coste de ese marco.

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 4)

a) Sea x metros la longitud de un lado vertical y sea y metros la longitud de un lado horizontal. Se cumple que: $xy = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x}$

La función a optimizar es:

$$C(x, y) = 2 \cdot 12{,}50x + 2 \cdot 8y = 25x + 16y \rightarrow C(x) = 25x + \frac{16}{x}$$

$$C'(x) = 25 - \frac{16}{x^2} = 0 \rightarrow 25x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = 0{,}8$$

$$C''(x) = \frac{32}{x^3} \rightarrow C''(0{,}8) > 0 \rightarrow \text{Para } x = 0{,}8 \text{ alcanza un mínimo.}$$

Para que el coste sea lo más económico posible, la longitud del lado vertical debe ser de 0,8 metros y la longitud del lado horizontal debe ser de 1,25 metros.

b) El marco va a costar $25 \cdot 0{,}8 + 16 \cdot 1{,}25 = 20 + 20 = 40$ euros.

081 **De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa 10 cm, calcula las longitudes de los catetos que corresponden al de área máxima.**

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 2)

Sean x e y las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo.

Se cumple que: $x^2 + y^2 = 10^2 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

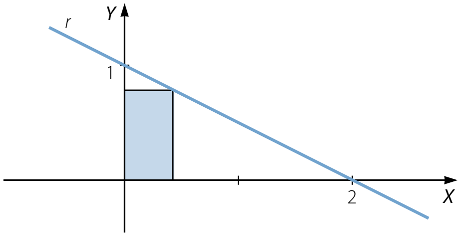
La función a optimizar es: $A(x) = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{100 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100x^2 - x^4}$

$$A'(x) = \frac{200x - 4x^3}{4\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 50x - x^3 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{50}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } \left(0, \sqrt{50}\right) \rightarrow A'(x) > 0 \\ \text{En } \left(\sqrt{50}, +\infty\right) \rightarrow A'(x) < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{En } x = \sqrt{50} \text{ alcanza un máximo.}$$

Así, los catetos del triángulo rectángulo de hipotenusa 10 cm y área máxima miden $x = \sqrt{50}$ e $y = \sqrt{50}$.

082 **De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta *r* de ecuación $\frac{x}{2} + y = 1$, determina el que tiene mayor área.**



(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

$\frac{x}{2} + y = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{x}{2}$

El rectángulo va a tener estas dimensiones: Ancho x Alto $1 - \frac{x}{2}$

La función a optimizar es: $A(x) = x\left(1 - \frac{x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2}$

$A'(x) = 1 - \frac{2x}{2} = 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

$A''(x) = -1 < 0 \rightarrow$ Para $x = 1$ alcanza un máximo.

Así, el rectángulo que tiene mayor área mide 1 de ancho y $\frac{1}{2}$ de alto.

083 **Queremos hacer un envase con tapa y forma de prisma regular con base cuadrada y cuya capacidad sea 10.000 cm³. Sabiendo que cada cm² del material de la base sale un 50 % más caro que cada cm² del material empleado para el resto del prisma, halla las dimensiones del envase para que su precio sea el menor posible.**

(Cantabria. Junio 2007. Bloque 2. Opción B)

Sea x la arista de la base e y la altura del prisma regular. Se cumple que:

$x^2y = 10.000 \rightarrow y = \frac{10.000}{x^2}$

Como el área del prisma es $x^2 + 4xy + x^2 \rightarrow$ La función a optimizar es:

$P(x, y) = 1{,}5x^2 + 4xy + x^2 \rightarrow P(x) = 1{,}5x^2 + 4x \cdot \frac{10.000}{x^2} + x^2 = 2{,}5x^2 + \frac{40.000}{x}$

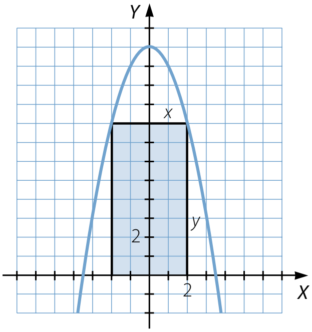
$P'(x) = 5x - \frac{40.000}{x^2} = 0 \rightarrow 5x^3 - 40.000 = 0 \rightarrow x = 20$

$P''(x) = 5 + \frac{80.000}{x^3} \rightarrow P''(20) > 0 \rightarrow$ En $x = 20$ alcanza un mínimo.

Las dimensiones del prisma, para que su precio sea el menor posible son:
Arista de la base 20 cm Altura 25 cm

084 **Halla las dimensiones de un cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros dos vértices están situados sobre el eje X.**

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 4. Problema 2)



La función representa una parábola cuyo vértice está en el eje Y, por lo que el rectángulo será simétrico con respecto a este eje. Así, las medidas serán, $2x$, $12 - x^2$ (tomamos x positivo para señalar la longitud y no la coordenada).

La función a optimizar es:

$A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$

$A'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{24}{6} = 4$
$\rightarrow x = \pm 2$

$A''(x) = -12x \rightarrow A''(2) < 0 \rightarrow$ Para $x = 2$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones del cártel de área máxima en forma de rectángulo son: 4 de ancho y 8 de alto.

085 Hallar, de entre los puntos de la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$, los que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba A. Problema 2)

Sea (x, y) el punto de la parábola que buscamos. La distancia de este punto al punto $A\left(-2, \frac{-1}{2}\right)$ viene dada por la expresión:

$$d(x, y) = \sqrt{(x+2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2}\right)^2}$$

La función a optimizar es: $D(x,y) = d^2(x,y) \rightarrow D(x) = (x+2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$

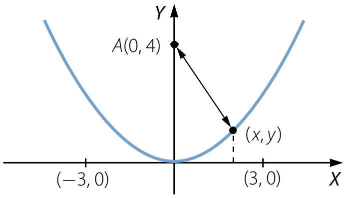
$D'(x) = 2(x+2) + 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)2x = 4x^3 + 4 = 0 \rightarrow x = -1$

$D''(x) = 12x^2 \rightarrow D''(-1) > 0 \rightarrow$ En $x = -1$ alcanza un mínimo.

Así, el punto de la parábola que se encuentra a distancia mínima del punto A es $(-1, 0)$.

086 Un río describe la curva $y = \frac{1}{4}x^2$ con $x \in [-3, 3]$.

En el punto $A(0, 4)$ hay un pueblo.



a) Expresa la función distancia entre un punto cualquiera del río y el pueblo en función de la abscisa x.

b) ¿Cuáles son los puntos de este tramo del río que están más alejados y más cercanos al pueblo? (Sugerencia: estudia los extremos del cuadrado de la función hallada en el apartado anterior).

c) ¿Hay algún punto del río que esté a una distancia menor que 2 del pueblo?

(Asturias. Junio 2007. Bloque 6)

a) $d(x, y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \rightarrow d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}$

b) $D(x, y) = d^2(x, y) \rightarrow D(x) = \frac{x^4}{16} - x^2 + 16$

$D'(x) = \frac{4}{16}x^3 - 2x = 0 \rightarrow x = -\sqrt{8}, x = 0, x = \sqrt{8}$

$D''(x) = \frac{12}{16}x^2 - 2 = \frac{3}{4}x^2 - 2$

$D''(0) < 0$ $\qquad D''\left(-\sqrt{8}\right) = D''\left(\sqrt{8}\right) > 0$

El máximo se alcanza en $x = 0$ y el punto más alejado es el $(0, 0)$.

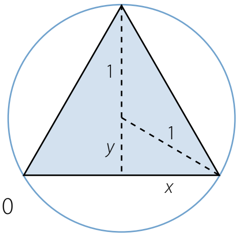
Los puntos más cercanos son: $\left(-\sqrt{8}, 2\right)$ y $\left(\sqrt{8}, 2\right)$

c) La mínima distancia se alcanza en $x = \sqrt{8}$ y es:

$$d = \sqrt{8 + \left(\frac{8}{4} - 4\right)^2} = \sqrt{12} > 2 \rightarrow$$ No hay ningún punto del río que esté a una distancia menor que 2 del pueblo.

087 **Calcula las dimensiones del triángulo isósceles, inscrito en una circunferencia de radio 1, que tiene área máxima.**

(La Rioja. Septiembre 2003. Propuesta A. Ejercicio 6)



Llamamos x a la mitad de la base del triángulo e $y + 1$ a la altura. Se verifica: $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1 - y^2}$

La función que hay que optimizar viene dada por:

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - y^2}\,(y + 1) = (y + 1)\sqrt{1 - y^2}$$

$$A'(y) = \sqrt{1 - y^2} + (y + 1)\frac{-2y}{2\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1 - y^2 - y^2 - y}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$$

$$\rightarrow -2y^2 - y + 1 = 0 \rightarrow y = -1,\ y = \frac{1}{2}$$

La solución válida es: $y = \frac{1}{2}$

- En $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \rightarrow A'(y) > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow A'(y) < 0 \rightarrow$ Función decreciente

Así, en $y = \frac{1}{2}$ alcanza un máximo.

Las dimensiones del triángulo de mayor área son:

Base: $2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ Altura: $y + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

088 **Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40 - 5x}{10 - x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 € y el de alta calidad 250 €, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo.**

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 4. Problema 1)

La función producción viene dada por la expresión: $P(x) = 100x + \frac{250(40 - 5x)}{10 - x}$

Calculamos el valor de x que hace que $P(x)$ sea máximo.

$$P'(x) = 100 - \frac{2.500}{(10 - x)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 15 \end{cases}$$

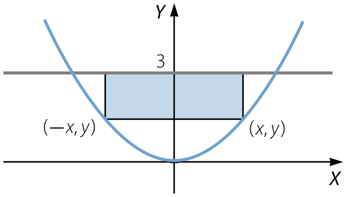
Como $x \leq 8$, la única solución válida es $x = 5$.

$$P''(x) = \frac{-5.000}{(10 - x)^3} \rightarrow P''(5) < 0 \rightarrow$$ Se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo.

089 Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$.

De entre los rectángulos situados como el de la figura, determinar el que tiene área máxima.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 2. Opción B)



Longitud de la base del rectángulo: $2x$

Longitud de la altura del rectángulo: $3 - y = 3 - x^2$

La función que debemos optimizar es: $A(x) = 2x(3 - x^2) = 6x - 2x^3$

$A'(x) = 6 - 6x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$A''(x) = -12x \rightarrow A''(1) < 0 \rightarrow$ Para $x = 1$ alcanza un máximo.

Las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

Base: 2 Altura: 2

090 Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m³. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes es de 100 unidades por m², mientras que a través del techo es de 300 unidades por m². La pérdida por el suelo es muy pequeña y se puede considerar nula. Calcule las dimensiones del almacén para que la pérdida de calor total sea mínima.

(Cataluña. Junio 2007. Problema 5)

Arista de la base del prisma: x

Altura del prisma: y

Se cumple que: $V(x, y) = x^2y = 768 \rightarrow y = \dfrac{768}{x^2}$

La función a minimizar es: $S(x, y) = 300x^2 + 400xy \rightarrow S(x) = 300x^2 + \dfrac{307.200}{x}$

$S'(x) = 600x - \dfrac{307.200}{x^2} = 0 \rightarrow 600x^3 - 307.200 = 0 \rightarrow x^3 = 512 \rightarrow x = 8$

$S''(x) = 600 + \dfrac{614.400}{x^3} \rightarrow S''(8) > 0 \rightarrow$ Alcanza un mínimo.

Así, para que la pérdida de calor total sea mínima, el almacén debe tener 8 metros de lado de la base y 12 metros de altura.

091 Un trozo de alambre de longitud 20 se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de dichos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.

(País Vasco. Julio 2007. Bloque C. Problema C)

Consideramos un rectángulo de base $2x$ y altura x, y un cuadrado de lado y.

$4y + 6x = 20 \rightarrow y = \dfrac{20 - 6x}{4}$

La función que debemos optimizar es:

$A(x, y) = 2x^2 + y^2 \rightarrow A(x) = 2x^2 + \left(\dfrac{20 - 6x}{4}\right)^2$

$$A'(x) = 4x + 2\left(\frac{20-6x}{4}\right)\left(\frac{-6}{4}\right) = 4x + \frac{36x-120}{8} = 0 \rightarrow 68x - 120 = 0$$
$$\rightarrow x = \frac{120}{68} = \frac{30}{17} = 1{,}76$$

$A''(x) = 4 + \dfrac{36}{8} > 0 \rightarrow$ En $x = 1{,}76$ alcanza un mínimo.

Así, para que la suma de ambas áreas sea mínima se tiene que cumplir que:

- El trozo de alambre que forma el rectángulo tenga longitud $6x = 6 \cdot 1{,}76 = 10{,}56$.
- El trozo que forma el cuadrado tenga longitud $4 \cdot \dfrac{20 - 6 \cdot 1{,}76}{4} = 9{,}44$.

092 **En agosto de 1548 el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: «Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8 de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo». Obtén las soluciones de este problema con dos decimales de aproximación.**

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 1. Pregunta A)

Llamamos x e y a los dos números reales. Se debe verificar que:
$x, y \geq 0;\ x + y = 8 \rightarrow y = 8 - x$

La función que hay que optimizar es:

$$P(x, y) = xy(x - y) \rightarrow P(x) = x(8 - x)(x - (8 - x)) = -2x^3 + 24x^2 - 64x$$
$$P'(x) = -6x^2 + 48x - 64 \rightarrow x = 1{,}69;\ x = 6{,}31$$

$P''(x) = -12x^2 + 48 \rightarrow P(6{,}31) < 0$

El máximo se alcanza cuando los dos números son:

$x = 6{,}31;\ y = 8 - 6{,}31 = 1{,}69$

093 **Una cartulina tiene forma rectangular con 30 cm de base y 20 cm de altura. Se quiere construir un cajón (sin tapadera) con la forma resultante tras recortar cuatro cuadrados de lado *x* en cada esquina de la cartulina.**

Calcule *x* para que el volumen del cajón resultante sea máximo. Calcule dicho volumen.

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 3. Cuestión B)

Si la cartulina tiene 30 cm en la base y quitamos dos cuadrados de longitud x, queda $30 - 2x$.

Si en la altura hacemos lo mismo, resulta $20 - 2x$.

Así, la nueva base tendrá una superficie de $(30 - 2x)(20 - 2x)$.

Por tanto, al formar el cajón sin tapadera, su volumen vendrá dado por la función:

$V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x) = 600x - 100x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 600 - 200x + 12x^2 = 0 \rightarrow 150 - 50x + 3x^2 = 0 \rightarrow x = 12{,}74;\ x = 3{,}92$

$V''(x) = -200 + 24x \rightarrow V''(3{,}92) < 0$

El volumen del cajón es máximo si $x = 3{,}92$ cm y es de $273{,}39\ \text{cm}^3$.

094 **Estudia si se puede aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = 2\ tg\ x$ en el intervalo $[0, \pi]$ y, si es posible, determina el punto donde la derivada se anula.**

f no es continua en $x = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow$ No podemos aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = 2\ tg\ x$ en $[0, \pi]$.

095 **Razona si se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ en el intervalo [0, 4].**

f es continua en [0, 4].

$f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}} \rightarrow f$ no es derivable en $x = 2 \rightarrow$ No podemos aplicar el teorema de Rolle.

096 **Aplica el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo [−4, 2] e interprétalo geométricamente.**

f es una función continua en [−4, 2] y derivable en (−4, 2) con $f'(x) = 2x + 2$.

Además, $f(-4) = 16 - 8 - 3 = 5$; $f(2) = 4 + 4 - 3 = 5 \rightarrow f(-4) = f(2)$

Por el teorema de Rolle, existe $c \in (-4, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Así, $f'(c) = 2c + 2 = 0 \rightarrow c = -1$

Geométricamente, en este punto la función tiene una tangente horizontal.

097 **Cada una de las funciones siguientes toma el mismo valor en los extremos del intervalo [−2, 2], pero no hay ningún valor $c \in (-2, 2)$ en el que la derivada se anule. Justifica en cada caso por qué no contradicen el teorema de Rolle:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ b) $g(x) = 2 - |x|$

a) No se puede aplicar el teorema de Rolle porque *f* no es continua en $x = 0$.

b) No se puede aplicar el teorema de Rolle porque *g* no es derivable en $x = 0$.

098 **Considera la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{16 - x^2} & \text{si } -4 \le x < 0 \\ -x^2 + 4 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Analiza si cumple las hipótesis del teorema de Rolle en [−4, 2]. En caso afirmativo, halla el punto que indica la tesis del citado teorema e interpreta geométricamente el resultado.

f no es continua en el intervalo [−4, 2], ya que para $x = 0$ no está definida, por lo que no cumple las condiciones del teorema de Rolle.

099 **Prueba que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [−1, 1] y calcula un punto del intervalo abierto (−1, 1) cuya existencia asegura el teorema.**

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 1)

f es continua en el intervalo [−1, 1] y derivable en (−1, 1) por ser una función polinómica. Además, $f(-1) = 0 = f(1)$.

Por el teorema de Rolle, existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \rightarrow f'(c) = 3c^2 + 2c - 1 = 0 \rightarrow c = -1,\ c = \dfrac{1}{3}$

El valor de *c* válido es $\dfrac{1}{3}$.

100 **Demuestra que la ecuación $x + 1 = e^x$ solamente tiene una solución.**

Consideramos la función $f(x) = e^x - x - 1$. Se cumple que $f(0) = 0$.
Si existe $a > 0$ tal que $f(a) = 0$, entonces, como f es continua en $[0, a]$ y derivable en $(0, a)$, por el teorema de Rolle existe $c \in (0, a)$ tal que $f'(c) = 0$.

Por otra parte, para $f'(x) = e^x - 1$, que solo se anula para $x = 0$, se contradice el teorema de Rolle, de donde deducimos que a no existe. Para $a < 0$ se razona de manera análoga, por lo que concluimos que la ecuación del enunciado solo tiene una solución.

101 **Demuestra que la ecuación $x^2 = x \cos x - \operatorname{sen} x$ se verifica para un único valor de x.**

Sea la función $f(x) = x^2 - x \cos x - \operatorname{sen} x$. Se cumple que $f(0) = 0$. Supongamos que existe $a > 0$ tal que $f(a) = 0$. Entonces, como f es continua en $[0, a]$ y derivable en $(0, a)$, aplicando el teorema de Rolle tenemos que existe $c \in (0, a)$ tal que $f'(c) = 0$.

Por otra parte, para $f'(x) = 2x - (\cos x - x \operatorname{sen} x) + \cos x = x(2 + \operatorname{sen} x)$, que solo se anula para $x = 0$, se contradice el teorema de Rolle, de donde deducimos que a no existe. Para $a < 0$ se razona de manera análoga, por lo que concluimos que la ecuación del enunciado se verifica para un solo valor de x.

102 **Demuestra que la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ solo corta al eje X en un punto en el intervalo $[0, 1]$.**

f es una función continua en $[0, 1]$ tal que $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -1 < 0$.
Por el teorema de Bolzano, f tiene al menos una raíz real en el intervalo $(0, 1)$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$ es una función cuya gráfica corta al eje X en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, lo que significa que no cambia de signo en el intervalo $(0, 1)$.

Como $f'(x) < 0$ en $(0, 1)$, la función f es siempre decreciente, por lo que la raíz que nos garantizaba el teorema de Bolzano en ese intervalo es única.

103 **Demuestra que la ecuación $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ solo tiene una solución real.**

Sea la función $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$.

f es una función continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 3 > 0$.
Por el teorema de Bolzano, f tiene al menos una raíz real en el intervalo $(0, 1)$.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$ no corta al eje X y es positiva para cualquier valor real.
Así, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, por lo que la raíz real encontrada es única.

104 **Dado el intervalo $I = [0, 5]$ y dadas las funciones $f(x) = x^2 - Ax$, encontrar el valor de A para que se pueda aplicar el teorema de Rolle al intervalo I, y aplicar el teorema en ese caso.**

(País Vasco. Julio 2005. Bloque C. Cuestión C)

f es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$.

$f(0) = 0$; $f(5) = 25 - 5A \rightarrow$ Para poder aplicar el teorema de Rolle necesitamos que: $f(0) = f(5) \rightarrow 0 = 25 - 5A \rightarrow A = 5$

Así, si $f(x) = x^2 - 5x$ se cumplen las condiciones del teorema en $[0, 5]$.

Por tanto, existe $c \in (0, 5)$ tal que: $f'(c) = 0 \rightarrow 2c - 5 = 0 \rightarrow c = \dfrac{5}{2}$

105 **Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demuestra que las curvas $y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un único punto.**

(Baleares. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 4)

$y = \cos x$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en un punto si $\cos x = \sqrt{x}$ tiene una única solución.

Si tiene solución estará en el intervalo (0, 1), ya que el dominio de $y = \sqrt{x}$ es $(0, +\infty)$.

Si $x > 1 \rightarrow \sqrt{x} > 1$, pero $|\cos x| \leq 1 \rightarrow$ La solución si existe será menor que 1.

Definamos $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ en el intervalo [0, 1], que es continua en este intervalo por ser diferencia de dos funciones continuas en [0, 1].

Como $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0 \rightarrow$ Por el teorema de Bolzano existe al menos un $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Comprobemos que este valor es único:

La función f es derivable en (0, 1). Si existieran dos valores a, b pertenecientes al intervalo (0, 1) tal que $f(a) = f(b) = 0$. Por el teorema de Rolle existiría un punto intermedio que anularía la derivada.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \operatorname{sen} x > 0$ en (0, 1), ya que en este intervalo $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ y también, $\operatorname{sen} x > 0$.

Por tanto, no existe el punto que nos da el teorema de Rolle, por lo que no es cierta la hipótesis de la cual partíamos.

Así, no pueden existir dos raíces de la función en el intervalo (0, 1), y por tanto hay un único punto de corte para las dos curvas del enunciado.

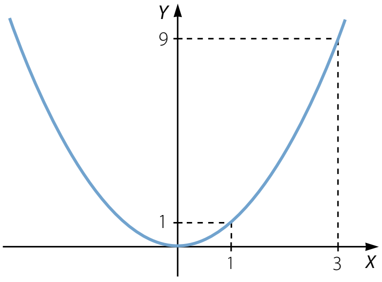
106 **Comprueba que la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [1, 8], y halla el punto que verifica la igualdad del teorema.**

f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ con $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt{x}}$.

En particular es continua en [1, 8] y derivable en (1, 8). Como se cumplen las condiciones del teorema del valor medio existe $c \in (1, 8)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} \rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{4 - 1}{7} = \frac{3}{7} \rightarrow c = \left(\frac{14}{9}\right)^3$$

107 **En el segmento comprendido entre los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 9)$ de la parábola $y = x^2$, halla un punto en el cual la tangente sea paralela a la cuerda AB.**



f es continua y derivable en $\mathbb{R} \rightarrow$ En particular es continua en [1, 3] y derivable en (1, 3). Como se cumplen las condiciones del teorema del valor medio existe $c \in (1, 3)$ tal que:

$$f'(c) = 2c = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow c = 2$$

Así, el punto que buscamos es (2, 4).

108 **Demuestra que se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en el intervalo [0, 4], y halla el punto que verifica la igualdad del teorema.**

f es continua en [0, 4] y derivable en (0, 4) con $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

Por tanto, podemos aplicar el teorema del valor medio.

Existe $c \in (0, 4)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9}} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow c = \sqrt{3}$$

109 **Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x) = -x^2 + 2x - 8$ en el intervalo [−3, 3], e interprétalo geométricamente.**

f es continua en [−3, 3] y derivable en (−3, 3).

Se puede aplicar el teorema del valor medio $\rightarrow$ Existe $c \in (-3, 3)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} \rightarrow -2c + 2 = \frac{-11 - (-23)}{6} \rightarrow c = 0$$

Geométricamente, la recta tangente a la parábola en el punto (0, −8) es paralela a la cuerda que une los extremos del segmento (−3, −11) y (3, −23).

110 **Razona si es aplicable el teorema del valor medio a la función $f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en el intervalo [0, e]. En caso afirmativo, halla el valor al que se refiere el teorema.**

f es continua en (0, e], estudiamos la continuidad de f en 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0) \rightarrow f$ es continua en [0, e].

$f'(x) = 1 + \ln x \rightarrow f$ es derivable en (0, e).

Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio $\rightarrow$ Existe $c \in (0, e)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(0)}{e - 0} = \frac{e - 0}{e} = 1 \rightarrow 1 + \ln c = 1 \rightarrow \ln c = 0 \rightarrow c = e^0 \rightarrow c = 1$$

111 **Dada la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo cerrado $[1, e]$, siendo $e = 2{,}718281\ldots$, razonar que existe un punto P de la gráfica de esa función en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.**

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 3)

Ecuación de la recta que pasa por $A(1, 0)$, $B(e, 1)$:

$$y = mx + n \rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = m + n \\ 1 = me + n \end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{1}{e-1},\ n = \frac{1}{1-e}$$

$$y = \frac{1}{e-1}x + \frac{1}{1-e}$$

Por otro lado, tenemos que: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Como la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente, y las rectas paralelas tienen la misma pendiente, resulta:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \rightarrow x = e - 1 \in [1, e]$$

Así, el punto que buscamos es: $(e - 1,\ \ln(e - 1))$

112 **Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + x - 1$, demuestra que existen $\alpha, \beta \in (1, 2)$ tales que $f(\alpha) = 0$ y $f'(\beta) = 3$. Di qué teoremas utilizas.**

(Navarra. Junio 2006. Grupo 2. Opción C)

$f(x) = x^x - 2^x + x - 1$ es continua en $[1, 2]$ con:

$f(1) = 1 - 2 + 1 - 1 = -1 < 0$; $f(2) = 4 - 4 + 2 - 1 = 1 > 0$

Por el teorema de Bolzano existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

$f'(x) = x^x(1 + \ln x) - 2^x \ln 2 + 1$ es continua en $[1, 2]$ con:

$$f'(1) = 1^1(1 + \ln 1) - 2^1 \ln 2 + 1 = 2(1 - \ln 2)$$
$$f'(2) = 2^2(1 + \ln 2) - 2^2 \ln 2 + 1 = 4(1 + \ln 2) - 4 \ln 2 + 1 = 5$$

Por el teorema de Weierstrass, la función f' tiene que tomar todos los valores entre $f'(1)$ y $f'(2)$. Por tanto, existe $\beta \in (1, 2)$ tal que $f'(\beta) = 3$.

113 **Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$ y sea I el intervalo $I = [0, 2]$. Aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo I, hallando el punto de dicho intervalo para el cual se verifica el resultado del teorema.**

(País Vasco. Julio 2007. Bloque C. Cuestión C)

f es una función continua en $[1, 2]$ y derivable en $(1, 2)$.

Por el teorema del valor medio existe $c \in (0, 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8 + 4 - 1 - (-1)}{2} = 6$$

$$f'(c) = 3c^2 + 2 = 6 \rightarrow c^2 = \frac{4}{3} \rightarrow c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0, 2)$$

114 Dada la función $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -2$.
Menciona los resultados teóricos que utilices.

(Navarra. Junio 2008. Grupo 2. Opción D)

f es continua en [1, 2] y derivable en (1, 2). Por el teorema del valor medio, existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que: $f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 2 \cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} = -2 - 0 = -2$

115 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3}$

d) $\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x + 3}$

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 2} \frac{2x - 4}{2x} = \frac{0}{4} = 0$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \operatorname{sen} x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x} = \frac{1+1}{2} = 1$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (\cos x - x \operatorname{sen} x)}{3x^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{3}$

d) $\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x + 3} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to -3} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}}{1} = \lim_{x\to -3} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}} = -\frac{3}{2}$

116 Halla el resultado de estos límites.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x}{2 \cos 2x} = \frac{2}{2} = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} 2x}{-\operatorname{sen} x} \to \frac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} 4x^2 + e^{x^2} 2}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = -2$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \to \frac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$

117 Calcula los límites de las siguientes funciones cuando x tiende a 0.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{\text{cotg } x}$

d) $i(x) = \dfrac{\text{sen}^2 2x}{x^3 + x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{1}{1+x}} = \lim\limits_{x \to 0} (1+x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\text{sen } x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{\cos x} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\text{cotg } x} \to \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1/x}{-1/\text{sen}^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\text{sen}^2 x}{x} \to \dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-2 \text{ sen } x \cos x}{1} = \lim\limits_{x \to 0} (-\text{sen } 2x) = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^2 2x}{x^3 + x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 \text{ sen } 2x \cos 2x}{3x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{3x^2 + 1} = \dfrac{0}{1} = 0$

118 Calcula los límites de estas funciones cuando x tiende a 0.

a) $f(x) = x \text{ cotg } x$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x} - \text{cotg } x$

c) $h(x) = (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \text{ cotg } x \to 0 \cdot \infty \to \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{tg } x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \text{cotg } x \right) \to \infty - \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\text{sen } x - x \cos x}{x \text{ sen } x} \right) \to \dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - (\cos x - x \text{ sen } x)}{\text{sen } x + x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \text{ sen } x}{\text{sen } x + x \cos x} \to \dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x + x \cos x}{2 \cos x - x \text{ sen } x} = \dfrac{0}{2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} \to 1^{\infty}$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln (e^x - x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (e^x - x)}{x} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$

$\to \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{e^x - x} \cdot (e^x - 1) \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = \dfrac{0}{1} = 0 \to \lim\limits_{x \to 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

119 Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-e^x}{sen^2\, x}$.

(Extremadura. Junio 2006. Repertorio A. Ejercicio 1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{sen^2\, x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2\, sen\, x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{sen\, 2x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{sen\, 2x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2\cos 2x} = \frac{-1}{2}$$

120 Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 2)

a) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 3} \frac{2x}{2\sqrt{x^2-5}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x \to 1^\infty$$

$$\ln\left(\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(x \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)}{\dfrac{1}{x}} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\dfrac{x^2}{x^2-1}\cdot\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x}{x^2-1} = 0 \to \lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1$$

121 Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\, sen\, x - x}{2x^2+x^4}$.

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 3. Opción 1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x sen\, x - x}{2x^2+x^4} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x\, sen\, x + e^x \cos x - 1}{4x+4x^3} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x(sen\, x + \cos x) + e^x(\cos x - sen\, x)}{4+12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos x}{4+12x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

122 Resuelve el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - sen\, x}{tg\, x - sen\, x}$

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 2. Pregunta B)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen\, x}{tg\, x - sen\, x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+tg^2\, x - \cos x} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{2\, tg\, x(1+tg^2\, x) + sen\, x} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2(1+tg^2\, x) + 4\, tg\, x(1+tg^2\, x) + \cos x} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

123 Calcula $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 1)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) \to \infty - \infty \to \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

124 Calcula los límites de las siguientes funciones cuando x tiende a $+\infty$.

a) $f(x) = (\ln x)^{e^{-x}}$ b) $g(x) = \left(1 + tg\,\frac{1}{x}\right)^x$

a) $$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{e^{-x}} \to \infty^0$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{e^{-x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\ln(\ln x)) \to 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(\ln(\ln x)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x\ln x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x e^x} = 0 \to \lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{e^{-x}} = e^0 = 1$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+tg\frac{1}{x}\right)^x \to 1^\infty$$

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+tg\frac{1}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+tg\frac{1}{x}\right) \to \infty\cdot 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+tg\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+tg\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\left(1+tg\dfrac{1}{x}\right)}\cdot\left(1+tg^2\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+tg^2\dfrac{1}{x}}{1+tg\dfrac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\to \lim_{x\to+\infty}\left(1+tg\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

125 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

Se pide calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(Baleares. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 3)

- Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ teniendo en cuenta que si aparecen indeterminaciones podemos utilizar la regla de L'Hôpital para resolver el límite.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

- Calculamos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

126 Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(arc\ tg\ e^x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 3)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right) \to \infty - \infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(arc\ tg\ e^x - \dfrac{\pi}{2}\right) \to \infty \cdot 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{arc\ tg\ e^x - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}} \to \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x x^2}{1+e^{2x}} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x x^2 - e^x 2x}{e^{2x} \cdot 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 - 2x}{2e^x} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x - 2}{2e^x} \to \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{2e^x} = 0$$

127 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)}$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 2. Opción C)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} \to \dfrac{\infty-\infty}{\infty-\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{x+2-(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)(x+1-(x-1))}{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = \frac{2\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}\,\sqrt{1-\cos x}}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}} = \dfrac{1}{2}$

128 Calcula, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$ c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ (con $a>0$)

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta A. Ejercicio 5)

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \to 0^0$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x\cdot\ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{-1}{\cos^2 x\cdot \operatorname{tg}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-\cos x\cdot\operatorname{sen} x) = 0 \to \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|} \to \dfrac{0}{0}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x<0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\cos x}{1} = -1 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{1} = 1 \end{array}\right\} \to \text{No existe el límite.}$$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

129 Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{n\to +\infty} \left(\dfrac{2^n-8}{2^{n+1}}\right)$

(Asturias. Junio 2007. Bloque 4)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \to \dfrac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to +\infty} \dfrac{2^n-8}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to +\infty} \left(\dfrac{2^n}{2^{n+1}} - \dfrac{8}{2^{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to +\infty} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{8}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}$

130 Calcular los valores del número real a sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1-ax}{x^2} = 8$.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Cuestión 3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-ax}{x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax}-a}{2x} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$$

$$\to \lim_{x\to 0} \frac{a^2e^{ax}}{2} = \frac{a^2}{2} \to \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-ax}{x^2} = \frac{a^2}{2} = 8 \to a^2 = 16 \to a = \pm 4$$

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Dada la función $y = x^4e^{-x}$:

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

(Asturias. Septiembre 2007. Bloque 5)

a) f es continua en todo $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = e^{-x}(4x^3 - x^4) = 0 \to 4x^3 - x^4 = 0 \to x = 0, x = 4$

- En $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $(0, 4) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

b) $f''(x) = e^{-x}(x^4 - 8x^3 + 12x^2) = 0 \to x = 0, x = 2, x = 6$

$f''(4) < 0 \to$ En $x = 4$ alcanza un máximo.

$f'''(x) = e^{-x}(-x^4 + 12x^3 - 36x^2 + 24x)$

$f'''(2) \neq 0 \to$ En $x = 2$ alcanza un punto de inflexión.

$f'''(6) \neq 0 \to$ En $x = 6$ alcanza un punto de inflexión.

$f'''(0) = 0$

$f^{IV)}(x) = e^{-x}(x^4 - 16x^3 + 72x^3 - 96x + 24) \to f^{IV)}(0) > 0$, como la primera derivada en este punto es de orden par y positiva, la función alcanza un mínimo en $x = 0$.

2 **Determina a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 2$ tenga un mínimo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = \frac{1}{3}$.**

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta A. Ejercicio 1)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 1 \qquad f''(x) = 6ax + 2b$

Como la función tiene un mínimo en $x = 2$ se cumple que:
$f'(2) = 0 \rightarrow 12a + 4b - 1 = 0$

Como la función tiene un punto de inflexión en $x = \frac{1}{3}$ se cumple que:

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \rightarrow 2a + 2b = 0 \rightarrow a = -b$

Así, sustituyendo en la otra condición:

$-12b + 4b - 1 = 0 \rightarrow -8b - 1 = 0 \rightarrow b = \frac{-1}{8} \rightarrow a = \frac{1}{8}$

3 **De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en $x = -1$, que su gráfica corta al eje X en el punto de abscisa $x = -2$ y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene pendiente 9.**

(Andalucía. Año 2005. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 1)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$

Como tiene un máximo en $x = -1$ $f'(-1) = 0 \rightarrow 3a - 2b + c = 0$

La gráfica pasa por el punto $(-2, 0) \rightarrow f(-2) = 0 \rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0 \rightarrow f''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0$

La tangente en $x = 2$ tiene pendiente $9 \rightarrow f'(2) = 9 \rightarrow 12a + 4b + c = 9$

Sustituimos $b = 0$ y resolvemos el sistema: $\left.\begin{aligned} 3a + c &= 0 \\ -8a - 2c + d &= 0 \\ 12a + c &= 9 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{cases}$

Así, la función es: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

4 **La potencia $f(x)$ en watios consumida por cierto aparato eléctrico, en función de su resistencia (x) en ohmios, viene dada por la expresión: $f(x) = \frac{4x}{(x + 12)^2}$ Hallar la potencia máxima y el correspondiente valor de x.**

(Canarias. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

$f'(x) = \frac{-4x + 48}{(x + 12)^3} = 0 \rightarrow x = 12$

$f''(x) = \frac{8x - 192}{(x + 12)^4} \rightarrow f''(12) < 0 \rightarrow$ En $x = 12$ alcanza un máximo.

$f(12) = \frac{48}{576} = \frac{1}{12}$

La potencia máxima es $\frac{1}{12} = 0{,}08\widehat{3}$ watios y el valor de x es 12.

5 Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.

b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados.

c) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.

(Madrid. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 4)

a) $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

La ecuación de la tangente es: $y - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(x - a)$

b) Puntos de corte:

Eje X: $-\frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(x - a) \rightarrow x - a = a \rightarrow x = 2a \rightarrow$ Punto $(2a, 0)$

Eje Y: $y - \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}(-a) \rightarrow y = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \rightarrow y = \frac{2}{a} \rightarrow$ Punto $\left(0, \frac{2}{a}\right)$

c) La distancia entre los dos puntos hallados viene dada por:

$$d(a) = \sqrt{(-2a)^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}}$$

La función que vamos a minimizar viene dada por: $D(a) = d^2(a) = 4a^2 + \frac{4}{a^2}$

$$D'(a) = 8a - \frac{8}{a^3} = 0 \rightarrow a = \pm 1$$

Como $a > 0$ solo es válida $a = 1$.

$D''(a) = 8 + \frac{24}{a^4} \rightarrow D''(1) > 0 \rightarrow$ Para $a = 1$ la distancia es mínima.

6 **Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima que se puede construir de modo que su base esté en el eje X y los vértices del lado opuesto sobre la parábola $y = -x^2 + 12$.**

(Galicia. Septiembre 2007. Bloque 3. Opción 1)

La función representa una parábola cuyo vértice está en el eje Y, por lo que el rectángulo será simétrico con respecto a este eje.
Así, las medidas serán, $2x$, $-x^2 + 12$ (tomamos x positivo para señalar la longitud y no la coordenada).

La función que debemos optimizar es: $A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x$

$$A'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{24}{6} = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$A''(x) = -12x \rightarrow A''(2) < 0 \rightarrow$ Para $x = 2$ alcanza un máximo.

Así, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:
4 de ancho y 8 de alto.

7 **Demostrar que la función $f(x) = x^3 - x + a$ cumple la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 1] cualquiera que sea el valor de a. Encontrar el punto en el cual se cumple la tesis.**

(Baleares. Septiembre 2005. Opción A. Cuestión 4)

f es continua en [0, 1] y derivable en (0, 1).

Además, $f(0) = a = f(1) \rightarrow$ Por el teorema de Rolle existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow 3c^2 - 1 = 0 \rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

8 **Utiliza el teorema del valor medio del cálculo diferencial para demostrar que para cualesquiera números reales $x < y$ se verifica que $\cos y - \cos x \leq y - x$.**

(Extremadura. Septiembre 2005. Repertorio A. Ejercicio 1)

Consideremos la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[x, y]$ con $x < y$.

Como esta función es continua en $[x, y]$ y derivable en $(x, y) \rightarrow$ Por el teorema del valor medio existe $c \in (x, y)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\cos y - \cos x}{y - x} \rightarrow -\operatorname{sen} c = \frac{\cos y - \cos x}{y - x}$$

$$-1 \leq -\operatorname{sen} c \leq 1 \rightarrow \frac{\cos y - \cos x}{y - x} \leq 1 \rightarrow \cos y - \cos x \leq y - x$$

9 **Halla los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1 - tg\left(\dfrac{\pi}{2} x\right)}{\ln 4x^2}$

(Navarra. Septiembre 2008. Grupo 2. Opción D)

a) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}} \rightarrow 1^{\infty}$

$$\ln\left[\left(\lim_{x\to 0} \cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x^2} \ln(\cos 2x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\operatorname{sen} x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x\to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{2x \cos 2x \cdot \cos x^2} \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-4 \cos 2x}{2 \cos 2x \cos x^2 - 4x \operatorname{sen} 2x \cos x^2 - 4x^2 \cos 2x \operatorname{sen} x^2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}} = e^{-2}$$

b) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{1 - tg\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{\ln 4x^2} \to \dfrac{0}{0}$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{-\left(1 + tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{8x}{4x^2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{-\pi x\left(1 + tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)}{4} = \frac{-\dfrac{\pi}{2} \cdot 2}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

10 Determínense los valores de a y b para los cuales $\lim_{x \to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Cuestión 4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} \to \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \to 0} \frac{2ax + b + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2} \to \frac{b}{0}$$

Si $b \neq 0$ el límite no existiría, así que $b = 0 \xrightarrow{\text{L'Hôpital}}$

$$\to \lim_{x \to 0} \frac{2ax + \operatorname{sen} x}{2x \cos x^2} \to \frac{0}{0} \to \lim_{x \to 0} \frac{2a + \cos x}{2 \cos x^2 - 4x^2 \operatorname{sen} x^2} = \frac{2a + 1}{2 - 0} = \frac{2a + 1}{2}$$

Así, $\dfrac{2a + 1}{2} = 1 \to 2a + 1 = 2 \to 2a = 1 \to a = \dfrac{1}{2}$

Por tanto: $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$