MATEMÁTICAS II - SOLUCIONES
(Documento de trabajo Orientativo)
OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Para 2000 litros de aire, según los porcentajes indicados, se precisan: 1560 litros de nitrógeno, 420 de oxígeno y 20 litros de argón.
b) Se tomarán x litros de mezcla A, y litros de mezcla B y z litros de mezcla C.
De acuerdo con los datos (x, y, z) debe satisfacer el sistema $\left\{\begin{array}{l} 0.8x + 0.7y + 0.6z = 1560 \\ 0.2x + 0.2y + 0.4z = 420, \\ 0.1y = 20 \end{array}\right.$ cuya solución es $(x = 1700, y = 200, z = 100)$.
Es decir son necesarios $\boxed{\text{1700 litros de mezcla A, 200 litros de mezcla B y 100 litros de mezcla C}}$.

Ejercicio 2

a) La abscisa x del punto buscado debe verificar que $f'(x) = 3/\mathrm{e}$.
$f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-2} = \dfrac{3}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{3x-2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 1/3}$.
Para $x = 1/3$ se tiene $y = \mathrm{e}^{3\cdot 1/3-2} = \mathrm{e}^{-1}$ y en consecuencia, el punto pedido es $\boxed{(1/3, \mathrm{e}^{-1})}$.
La recta tangente tiene por ecuación $\boxed{y - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{3}{\mathrm{e}}\left(x - \dfrac{1}{3}\right)}$.

b) Usando la regla de L'Hôpital se tiene $\displaystyle\lim_{x\to 2/3} \frac{1 - \mathrm{e}^{3x-2}}{6x - 4} = \lim_{x\to 2/3} = \frac{-3\mathrm{e}^{3x-2}}{6} = -1/2.$

c) La abscisa del punto de corte entre la recta $y = 1$ y la curva $y = f(x)$ es $x = 2/3$. Como en $x = 0$ se tiene que $f(0) = \mathrm{e}^{-2} < 1$, el área pedida viene dada por $A = \displaystyle\int_0^{2/3} (1 - \mathrm{e}^{3x-2})\, dx = \left[x - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-2}\right]_0^{2/3} = \boxed{\frac{1}{3}(1 + \mathrm{e}^{-2})}$.

Ejercicio 3

a) El sistema $\left\{\begin{array}{rl} z - 1 = & 4 + 5z \\ 2 - 3z = & 4z - 3 \end{array}\right\}$ es incompatible, luego las rectas no se cortan.
Un vector director de r_1 es $\vec{u} = (1, -3, 1)$ y un vector director de r_2 es $\vec{v} = (5, 4, 1)$. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, luego $\boxed{\text{las rectas se cruzan}}$.
Para hallar la distancia entre ellas obtenemos el plano τ que contiene a r_1 y es paralelo a r_2. Este plano está determinado por el punto $P(-1, 2, 0) \in r_1$ y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Su ecuación implícita es $-7x+4y+19z-15 = 0$.
La distancia entre las rectas es la distancia del punto $Q(4, -3, 0) \in r_2$ al plano τ:

$$d(Q, \tau) = \frac{|-28 - 12 - 15|}{\sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 19^2}}; \quad \boxed{d = \frac{55}{\sqrt{426}} \approx 2.665}.$$

b) Plano π que contiene a r_1 y pasa por el origen: $2x + y + z = 0$. Punto B de intersección de π y r_2 :

$$2(4 + 5\mu) + (-3 + 4\mu) + \mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{7}{3}, \frac{-13}{3}, \frac{-1}{3}\right)}.$$

Ejercicio 4

a) $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.90 = 0.10.$
$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.1}{P(A)} = 0.25 \Rightarrow P(A) = 0.4.$
$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.55 - 0.4 + 0.10 = 0.25.$
$P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0.25 - 0.1}{1 - 0.4} = 0.25.$
b) Como $P(B|\overline{A}) = P(B)$, B es independiente de A. (También se puede argumentar que son independientes porque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.)

SOLUCIONES
OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) La matriz A es equivalente, haciendo operaciones elementales de fila, a

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{Si } t\neq 0\text{: } \operatorname{rg}(A)=2 \text{ y si } t=0\text{: } \operatorname{rg}(A)=1.}$$

b) Para que el sistema $AX=B$ sea compatible determinado, debe ser $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A|B)=2$:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & t & 3 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & t & 3 \\ 0 & 0 & 3t+3 \end{array}\right),$$

de donde se concluye que $\boxed{t=-1}$.

Sustituyendo $t=-1$ se obtiene el sistema $\left\{\begin{array}{r} x+y=3 \\ -y=3 \end{array}\right.$, que tiene por solución $\boxed{(x=6, y=-3)}$.

Ejercicio 2

a) La recta tangente es $y=f(2)+f'(2)(x-2)$. Como $f(2)=1$, $f'(x)=-\dfrac{3}{(x+1)^2}\rightarrow f'(2)=-\dfrac{1}{3}$, la tangente es $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$, que corta al eje OX en $P(5,0)$ y al eje OY en $Q(0,5/3)$. El área del triángulo es $\boxed{A=\dfrac{25}{6}}$.

b) El dominio de f es $D=\mathbb{R}-\{-1\}$ y $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{3}{x+1}=+\infty$. Por tanto la curva $y=f(x)$ tiene una $\boxed{\text{asíntota vertical: } x=-1}$. Por otra parte $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, luego hay una $\boxed{\text{asíntota horizontal: } y=0}$.

Para estudiar el crecimiento vemos que $f'(x)=-\dfrac{3}{(x+1)^2}<0,\ \forall x\in D$, por tanto que f es decreciente en cada uno de los intervalos en que está definida, es decir $\boxed{f \text{ es decreciente en } (-\infty,-1) \text{ y en } (-1,\infty)}$.

c) $\displaystyle\int_0^2 xf(x)\,dx = 3\int_0^2 \frac{x}{x+1}\,dx = 3\int_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = [3(x-\ln(x+1))]_0^2 = \boxed{6-3\ln 3}$

Ejercicio 3

a) Calculamos los vértices del triángulo: El punto medio de A y B es $P(2,0,1)$. La recta que pasa por A y B tiene ecuación implícita $\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ 3x-z=5 \end{array}\right.$ y corta al plano $z=7$ en el punto $Q(4,-2,7)$.

$\boxed{\text{El área del triángulo es } \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\| = \tfrac{1}{2}\|(2,-10,-4)\| = \sqrt{30}}$.

b) Un vector normal al plano pedido es $(3,5,0)$ (vector director de r), por lo que la ecuación implícita del plano es de la forma $3x+5y+0z=d$. Para que pase por el punto A debe ser $d=8$ y queda $\boxed{3x+5y=8}$.

c) Un vector director de r es $\overrightarrow{v_1}=(3,5,0)$ y un vector director de la recta que pasa por A y B es $\overrightarrow{v_2}=(1,-1,3)$.

El coseno del ángulo formado por estos dos vectores es $\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|}=\boxed{\dfrac{2}{\sqrt{374}}\approx 0.1034}$.

Ejercicio 4

Sea $X\sim N(30,5)$ la variable aleatoria "temperatura máxima" y $Z=\dfrac{x-30}{5}$ la variable normalizada asociada.

a) $P(28<X<32)=P(-0.4<Z<0.4)=2P(Z<0.4)-1=0.3108$.

b) $P(X>36)=P(Z>1.2)=1-P(Z<1.2)=0.1151$. El número esperado de días es $30\cdot 0.1151\approx 3.45$. $\boxed{\text{Cabe esperar que entre 3 y 4 días del mes se superen los 36º}}$.

c) Se trata de hallar a tal que $P(X>a)=0.5$ y esto es justamente el valor medio de la variable. Luego $\boxed{\text{el día 10 de junio se alcanzaron } 30º}$.