20.9. Julio 2019 (extraordinaria)- Opción A

Problema 20.9.1 *(2,5 puntos)*

Dado el sistema de ecuaciones $A = \left\{ \begin{array}{rrrr} kx+ & (k+1)y+ & z = & 0 \\ -x+ & ky- & z = & 0 \\ (k-1)x- & y & = & -(k+1) \end{array} \right.$;
se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -2k^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ $k = \pm 1$. Luego

- Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº de incógnitas$\Longrightarrow SCD$.
- Si $k = 1$:
  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) =$
  $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema incompatible. (SI)

- Si $k=-1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 0\end{array}\right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema homogéneo y $|A|=0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. (SCI)

b) Si $k=-1$: $\left\{\begin{array}{r} -x+z=0\\ -x-y-z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ \\ y=-2\lambda\\ \\ z=\lambda\end{array}\right.$

Problema 20.9.2 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1)=1,\quad f'(1)=2,\quad g(1)=3,\quad g'(1)=4$$

Dada $h(x)=f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$.
Dada $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1,25 puntos) Calcule la integral $\displaystyle\int(\sin x)^4(\cos x)^3\,dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t=\sin x$.)

Solución:

a) $h(x)=f((x+1)^2) \Longrightarrow h'(x)=2(x+1)f'((x+1)^2) \Longrightarrow$

$$h'(0)=2f'(1)=4$$

$$k(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \Longrightarrow$$

$$k'(1)=\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{(g(1))^2}=\frac{2\cdot 3-1\cdot 4}{3^2}=\frac{2}{9}$$

b)

$$\int(\sin x)^4(\cos x)^3\,dx=\left[\begin{array}{l} t=\sin x\\ dt=\cos x\,dx\\ dx=\frac{dt}{\cos x}\end{array}\right]=\int t^4\cos^3 x\,\frac{dt}{\cos x}=$$

$$\int t^4\cos^2 x\,dt=\int t^4(1-\sin^2 x)\,dt=\int t^4(1-t^2)\,dt=$$

$$\int(t^4-t^6)\,dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C$$

Problema 20.9.3 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0,5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Solución:

a) $$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,2,-4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4,-2,0) \\ A(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x - 2y - z + 2 = 0$$

b) Cualquier punto del plano π nos valdría, por ejemplo: $D(-2,0,0)$.

c) Un punto cualquiera del eje OX puede ser $P(a,0,0)$:
$\overrightarrow{AB} = (0,2,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (-4,-2,0)$ y $\overrightarrow{AP} = (a-1,-1,-1)$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]| = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ a-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|-8(a+2)| = 1 \Longrightarrow$$

$$|-8a-16| = 6 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -8a - 16 = 6 \Longrightarrow a = -\dfrac{11}{4} \Longrightarrow P_1\left(-\dfrac{11}{4}, 0, 0\right) \\ \\ 8a + 16 = 6 \Longrightarrow a = -\dfrac{5}{4} \Longrightarrow P_2\left(-\dfrac{5}{4}, 0, 0\right) \end{array} \right.$$

Problema 20.9.4 *(2,5 puntos)* Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1,25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1,25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media $5,6$ y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es $0,67$, calcule σ.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(8; 0,4)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\left(\begin{array}{c} 8 \\ 0 \end{array} \right) 0,4^0 \cdot 0,6^8 + \left(\begin{array}{c} 8 \\ 1 \end{array} \right) 0,4^1 \cdot 0,6^7 \right) =$$

$$1 - (0,6^8 + 8 \cdot 0,4 \cdot 0,6^7) = 0,8936$$

b) Se trata de una distribución normal $N(5,6; \sigma)$

$$P(X \leq 8,2) = P\left(Z \leq \frac{8,2 - 5,6}{\sigma}\right) = 0,67 \Longrightarrow$$

$$\frac{8,2 - 5,6}{\sigma} = 0,44 \Longrightarrow \sigma = 5,91$$

20.10. Julio 2019 (extraordinaria)- Opción B

Problema 20.10.1 *(2,5 puntos)*

Dadas la matrices $A = \left(\begin{array}{cc} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{array} \right)$ e $I = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$; se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0,75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $A^2 - I = 2A$:

$$\left(\begin{array}{cc} a^2 - 2a + 2 & 2 \\ 2 & a^2 + 2a + 2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2 - 2a & 2 \\ 2 & 2 + 2a \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - 2a + 1 = 2 - 2a \Longrightarrow a = \pm 1 \\ a^2 + 2a + 1 = 2 + 2a \Longrightarrow a = \pm 1 \end{array} \right.$$

b) $|A| = -a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2} \left(\begin{array}{cc} -(a+1) & 1 \\ 1 & a-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} -\frac{a+1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{array} \right)$$

c) $|(AA^t)^2| = |(AA^t)|^2 = |(AA^t)||(AA^t)| = |A||A^t||A||A^t| = |A||A||A||A| = |A|^4 = (-a^2)^4 = a^8$

Problema 20.10.2 *(2,5 puntos)* Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0,5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución:

a) $F(t) = \displaystyle\int (10t^2 - t^3)\, dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$

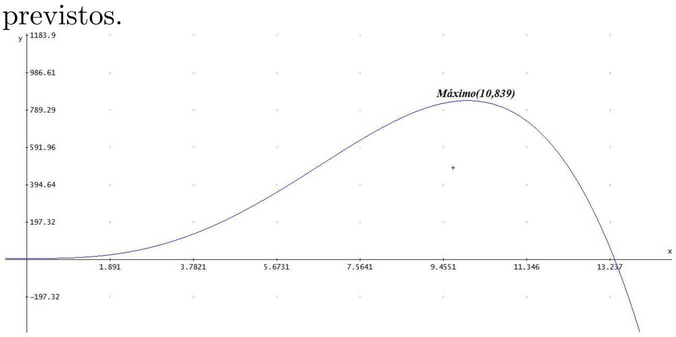
$F(0) = 6 \Longrightarrow C = 6 \Longrightarrow F(t) = \dfrac{10t^3}{3} - \dfrac{t^4}{4} + 6$

b) $F'(t) = t^2(10-t) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 10$

.

	$(0,10)$	$(10,\infty)$
$F'(t)$	$+$	$-$
$F(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego f crece en el intevalo $(0,10)$ y crece en el intervalo $(10,+\infty)$. Tendría un máximo en el punto $(10; 839,33)$. El máximo de enfermos se encuentra en el dia 10 y serán sobre 839 el número de enfermos previstos.



c) la función F es continua y ademá cumple: $F(13) = \frac{2269}{12}$ y $F(14) = -\frac{1354}{3}$ por el teorema de Bolzano $\exists\, c \in (13,14)/F(c) = 0$, Es decir, entre 13 y 14 días.

Problema 20.10.3 *(2,5 puntos)* Dados el plano, $\pi : 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right.$ y $s : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \overline{R}$, se pide

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos la recta $t \perp \pi$ que contiene a $P(1, 2, 3)$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, 3, -1) \\ P_t = P(1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculo P' punto de corte de t con π:

$$2(1+2\lambda)+3(2+3\lambda)-(3-\lambda) = 4 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{14} \Longrightarrow P'\left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right)$$

- Calculo P'':

$$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = 2\left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right) - (1, 2, 3)$$

$$\Longrightarrow P''\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$ sustituimos en r y nos queda:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 1 + \lambda + 2 - (3 + \lambda) = 0 \Longrightarrow 0 = 0 \\ 1 + \lambda + 2 + 3 + \lambda = 2 \Longrightarrow \lambda = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow Q(-1, 2, 1) \text{ punto de corte}$$

$$l : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_l} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, 3, -1) \\ P_l = Q(-1, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow l : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

c) $\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{u_s} = (1, 0, 1)$:

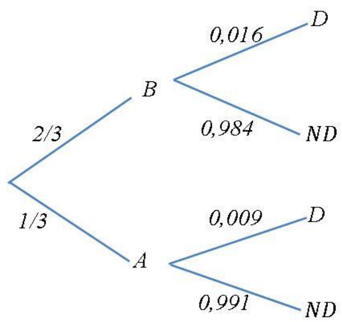
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = 60^{\circ}$$

Problema 20.10.4 *(2,5 puntos)* Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6 %, mientras que para los de alta gama es del 0,9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1,5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución:



a) $P(D) = P(D|B)P(B) + P(D|A)P(A) = 0,016 \cdot \frac{2}{3} + 0,009 \cdot \frac{1}{3} = 0,0137 \Longrightarrow 1,37\,\%$

b) $P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \dfrac{0,016 \cdot \frac{2}{3}}{0,0137} = 0,78 \Longrightarrow 78\,\%$