Junio 2017 - Opción A

Problema 18.3.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{array}\right.$,

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \quad |A| = a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0; \left|\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{array}\right| = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \ \ |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right| = -16 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) <$ y el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0; \left|\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{array}\right| = -10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ x-4y+2z=1 \\ 4y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1/3 \\ y=1/3 \\ z=4/3 \end{array}\right.$$

c) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+2y+z=2 \\ 4y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda/2 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 18.3.2 *(3 puntos)* Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0,-3,0)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.

c) (1 punto). Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Solución:

a)

$$\pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-5,2,0) \\ \overrightarrow{PR} = (-4,3,1) \\ P(1,-2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 2x+5y-7z+15 = 0$$

b)

$$r : \pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PQ} = (-5,2,0) \\ P_r = P(1,-2,1) \end{array} \right. \quad r : \pi : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{RS} = (3,-4,-2) \\ P_s = S(0,-3,0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (1,1,1)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \text{ y Rango} \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan}$$

c)

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{array} \right| | = \frac{1}{2}|(2,5,7)| = \frac{\sqrt{78}}{2} \; u$$

Problema 18.3.3 *(2 puntos)* Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

Solución:
$c'(t) = e^{-t/2}\left(1 - \dfrac{t}{2}\right) = 0 \Longrightarrow t = 2$:

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$c'(t)$	$+$	$-$
$c(t)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$.

La función es decreciente en el intervalo $(2,\infty)$.

La función tiene un máximo en el punto $(2,2/e)=(2,0,736)$. El paciente no llega a estar en riesgo, ya que en el máximo la concentración está por debajo de 1 mg/ml.

Problema 18.3.4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) (0,5 puntos). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$, la única asíntota vertical es $x=2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{x^2+x+6}{x-2}=\left[\frac{12}{0^-}\right]=-\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow 2^+}\frac{x^2+x+6}{x-2}=\left[\frac{12}{0^+}\right]=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x+6}{x^2-2x}=1$

c) $\displaystyle\int_3^5\frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx=\int_3^5\left(x+3+\frac{12}{x-2}\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}+3x+12\ln|x-2|\right]_3^5=$ $14+12\ln 3\simeq 27,18$

18.4. Junio 2017 - Opción B

Problema 18.4.1 *(3 puntos)* Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2}{x}$ y $g(x)=\sin x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(f(x)-\dfrac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0,75 puntos). Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2},4\right)$.

c) (1,25 puntos). Calcular el área delimitada por la curva $y=f(x)$ y la recta $y=-x+3$.

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{\sin x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2\sin x-2x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2\cos x-2}{\sin x+x\cos x}=$ $\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-2\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0$

b) $f(x)=\frac{2}{x}\Longrightarrow f'(x)=-\frac{2}{x^2}\Longrightarrow m=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-8$ luego la ecuación de la recta en su forma punto pendiente es: $y-4=-8\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

c) $\frac{2}{x}=-x+3\Longrightarrow x^2-3x+2=0\Longrightarrow x=1,\ \ x=2$:

$$S_1=\int_1^2\left(\frac{2}{x}+x-3\right)\,dx=2\ln x+\frac{x^2}{2}-3x\Big]_1^2=-\frac{3}{2}+2\ln 2\simeq -0,114$$

$$S=|S_1|=\frac{3}{2}-2\ln 2\simeq 0,114\ u^2$$

Problema 18.4.2 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto). Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B=P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A=PJP^{-1}$.

Solución:

a) $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&0&-1\\-5&-1&4\end{pmatrix}$

b) $B=P^{-1}J^{-1}=(JP)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\6&4&4\\2&3&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1/2&-2\\-2&0&-1\\5&-1/2&4\end{pmatrix}$

c) $|A|=|PJP^{-1}|=|P||J||P^{-1}|=|P||J|\frac{1}{|P|}=|J|=-2$. Luego $|A^2|=|A|^2=(-2)^2=4$.

Problema 18.4.3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine la distancia entre las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z \ \text{ y } \ r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

Solución:

a) $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,1,1) \\ P_{r_1}(0,0,0) \end{array} \right. \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1,-1,1) \\ P_{r_2}(-1,2,0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-1,2,0)$

$$|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]| = \left| \begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = |-2| = 2$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = | \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| | = |(2,0,2)| = 2\sqrt{2}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ u$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(0,2,1) \end{array} \right.$, un plano $\pi \perp s$ tal que $O \in \pi \Longrightarrow \pi : x - y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x - y + z = 0$

El punto de corte de π con s:

$\lambda - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3} \right)$

Problema 18.4.4 *(2 puntos)* El 40 % de los sábados Marta va al cine, el 30 % va de compras y el 30 % restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60 % de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20 % de las veces que va de compras, y el 80 % de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

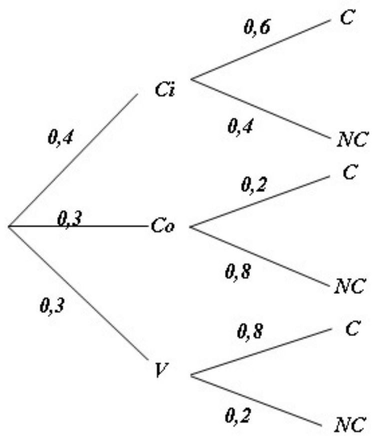
a) (1 punto). Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) (1 punto). Si se sabe que Marta ha quedado con los compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?

Solución:

a) $P(NC) = P(Ci)P(NC|Ci) + P(Co)P(NC|Co) + P(V)P(NC|V) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,2 = 0,46$

b) $P(Ci|C) = \dfrac{P(C|Ci)P(Ci)}{P(C)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,4}{1 - 0,46} = 0,44$



0,4
0,3
0,3
Ci
Co
V
0,6
0,4
0,2
0,8
0,8
0,2
C
NC
C
NC
C
NC