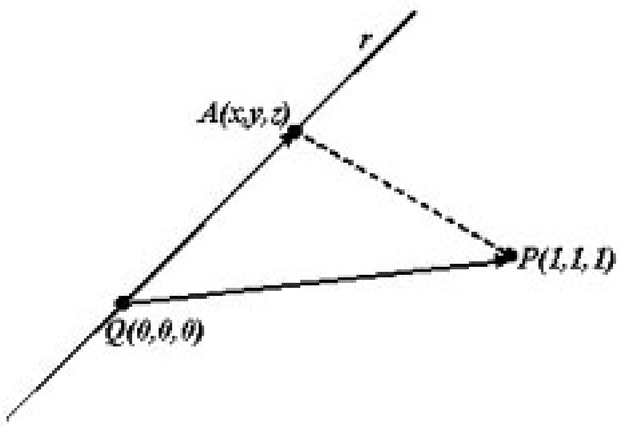
8.1. Modelo 2007 - Opción A

Problema 8.1.1 *(2 puntos)* Se considera la recta $\left\{\begin{array}{c} x-y=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right.$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.

Solución:



Un punto $A(x,y,z)$ de la recta sería

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow A(\lambda,\lambda,-\lambda)$$

$$\overrightarrow{QA}=(\lambda,\lambda,-\lambda), \quad \overrightarrow{QP}=(1,1,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(2\lambda,-2\lambda,0)|=\sqrt{2\lambda^2}=1$$

Luego: $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Problema 8.1.2 *(2 puntos)*

1. (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta
$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$
y es perpendicular al plano $\pi_2: 2x+y-z=2$.

2. (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

1.
$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1\\ 2 & 1 & y+1\\ 1 & -1 & z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow x-y+z-2=0$$

2.
$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z-2=0\\ 2x+y-z-2=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}\\ y=-\frac{2}{3}+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 8.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z= & 1\\ x+ & ky- & kz= & k^2\\ -x+ & ky- & k^2z= & k^2\end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

2. (1 punto) Resolverlo para $k=-1$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array}\right), \quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \quad k = -1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El Rango$(A) = 1$, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).
Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego Rango(A) =Rango$(\overline{A}) <$ nº incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1 \\ -x- & y- & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 8.1.4 *(3 puntos)*

1. (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)\, dt$$

2. (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución:

1. Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si f es una función continua si
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$
Luego $F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$

2. $$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$
$$F(1) = \int_0^1 (f(t)+t^2+t^3)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 t^2\,dt+\int_0^1 t^3\,dt = 1+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}\Big]_0^1 =$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$
$$y - \frac{19}{4} = 3(x-1)$$

8.2. Modelo 2007 - Opción B

Problema 8.2.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

1. (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.
2. (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

Solución:

1. La pendiente de la recta tangente es $m = f'(a) = -15$
$$f'(x) = 12x-3x^2 \Longrightarrow m = f'(a) = 12a-3a^2 = -15 \Longrightarrow a = 5, \quad a = -1$$
Como $a > 0 \Longrightarrow$ la solución buscada es $a = 5$ y, por tanto, como $f(5) = 25 \Longrightarrow (5, 25)$ es el punto buscado.

2. Los puntos de corte con el eje OX son
$$6x^2 - x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 6$$
$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = 2x^3 - \frac{x^4}{4}\Big]_0^6 = 108\,u^2$$

Problema 8.2.2 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = [1^{\infty}] = e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty}(kx+5)\left(\frac{x+3}{x}-1\right) = 3k$$

Luego $3k = 2 \Longrightarrow k = \dfrac{2}{3}$.

Problema 8.2.3 *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1,0,1)$ y la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

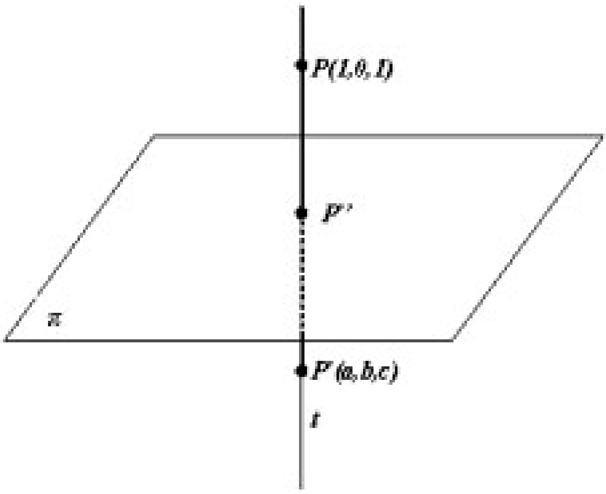
y el plano $\pi : x+y+z = 0$. Se pide:

1. (1,5 puntos) Obtener un punto P', simétrico de P respecto del plano π.

2. (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

Solución:

1. Sería el siguiente dibujo Calculamos primero el punto P'' corte de la



recta t y el plano π, donde t es una recta perpedicular a π y que pasa por P.

$$t : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,1) \\ P_t(1,0,1) \end{array}\right. \qquad t : \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right.$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1+\lambda+\lambda+1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

P'' es el punto medio entre P y P'

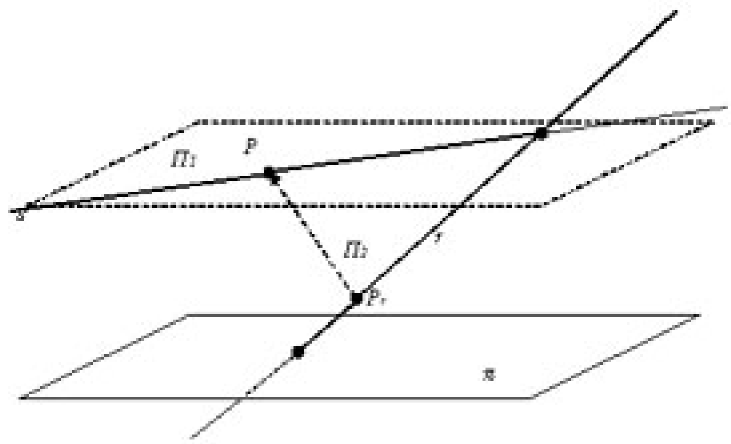
$$\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1+a}{2},\frac{b}{2},\frac{1+c}{2}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3}\\ b=-\frac{4}{3}\\ c=-\frac{1}{3}\end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

2. Encontramos la recta como intersección de dos planos:

   El plano π_1 es paralelo a π y contiene a P

   El plano π_2 contiene a P y a r

   Sería el siguiente dibujo



$\pi_1: x+y+z+\lambda=0$ y como contiene a $P \Longrightarrow 1+0+1+\lambda=0 \Longrightarrow$
$\lambda=-2 \Longrightarrow \pi_1: x+y+z-2=0$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-1)\\ \overrightarrow{PP_r}=(0,0,-2)\\ P(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x-1\\ 2 & 0 & y\\ -1 & -2 & z-1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow 2x-y-2=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{c} x+y+z-2=0\\ 2x-y-2=0\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\lambda\\ y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 8.2.4 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el Rango$(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M) = 2$.

2. Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$