

OPCIÓN A

1.A.- Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos:

$$\begin{cases} \pi_1 : x + z = \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda - 2 & \lambda + 2 \\ 2(\lambda + 1) & 0 & -(\lambda + 6) \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda + 6) - 2(\lambda - 2)(\lambda + 1) = -(\lambda - 2)(\lambda + 6 + 2\lambda + 2)$$

$$|A| = -(\lambda - 2)(3\lambda + 8) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(3\lambda + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ 3\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{8}{3}, 2 \right\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \text{Los tres planos se cortan en un punto (Comp. Determinado)}$

Si $\lambda = 2$

$$\begin{cases} \pi_1 : x + z = 2 \\ \pi_2 : 4x + 4z = 4 \\ \pi_3 : 6x - 8z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 : x + z = 2 \\ \pi_2 : x + z = 1 \\ \pi_3 : 6x - 8z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Entre } \pi_1 \text{ y } \pi_2 \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \text{Planos paralelos} \\ \text{Entre } \pi_1 \text{ y } \pi_3 \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{0}{0} \neq \frac{1}{-8} \neq \frac{2}{-2} \Rightarrow r : \begin{cases} x + z = 2 \\ 6x - 8z = -2 \end{cases} \\ \text{Entre } \pi_2 \text{ y } \pi_3 \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{0}{0} \neq \frac{1}{-8} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow s : \begin{cases} x + z = 1 \\ 6x - 8z = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Corolario

Cuando $\lambda = 2$ los planos π_1 y π_2 son paralelos, formando la recta r π_1 y π_3 y s π_2 y π_3

Continuación del problema 1.A.-

$$\text{Si } \lambda = -\frac{8}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : x + z = -\frac{8}{3} \\ \pi_2 : 4x + \left(-\frac{8}{3} - 2\right)y + \left(-\frac{8}{3} + 2\right)z = -\frac{8}{3} + 2 \\ \pi_3 : 2\left(-\frac{8}{3} + 1\right)x - \left(-\frac{8}{3} + 6\right)z = -\left(-\frac{8}{3}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : 3x + 3z = -8 \\ \pi_2 : 4x + \left(-\frac{14}{3}\right)y + \left(-\frac{2}{3}\right)z = -\frac{2}{3} \\ \pi_3 : 2\left(-\frac{5}{3}\right)x - \left(\frac{10}{3}\right)z = \frac{8}{3} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : 3x + 3z = -8 \\ \pi_2 : 12x - 14y - 2z = -2 \\ \pi_3 : -10x - 10z = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : 3x + 3z = -8 \\ \pi_2 : 6x - 7y - z = -1 \\ \pi_3 : 5x + 5z = -4 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Entre } \pi_1 \text{ y } \pi_2 \Rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{0}{-7} \Rightarrow t : \begin{cases} 3x + 3z = -8 \\ 6x - 7y - z = -1 \end{cases} \\ \text{Entre } \pi_1 \text{ y } \pi_3 \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{0}{0} = \frac{3}{5} \neq \frac{-8}{-4} \Rightarrow \text{Planos paralelos} \\ \text{Entre } \pi_2 \text{ y } \pi_3 \Rightarrow \frac{6}{5} \neq \frac{-7}{0} \Rightarrow u : \begin{cases} 6x - 7y - z = -1 \\ 5x + 5z = -4 \end{cases} \end{array} \right.$$

Corolario

Cuando $\lambda = -\frac{8}{3}$ los planos π_1 y π_3 son paralelos, formando la recta **t** π_1 y π_2 y **u** π_2 y π_3

2.A.- Se consideran las rectas: $r: \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$

a) (1 punto). Hallar la recta **t**, perpendicular a **r** y **s**, que pasa por el origen

b) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta **s** con la recta **t** obtenida en el apartado a)

a) El vector director de la recta **t**, que arranca de puntos generales de **r** y **s**, es perpendicular a estas, por ello los productos escalares de los vectores directores (el de **t** con cada uno de los de **r** y **s**) son nulos.

$$\left\{ \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = y + 3 \\ y + 3 + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = [3 + \lambda - (4 + \mu), \lambda - (1 + 2\mu), 3 + 2\lambda - \mu] \\ \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 1) \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 4 + z \\ 8 + 2z - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t = (\lambda - \mu - 1, \lambda - 2\mu - 1, 2\lambda - \mu + 3) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda - \mu - 1, \lambda - 2\mu - 1, 2\lambda - \mu + 3) \cdot (1, 1, 2) = 0 \\ (\lambda - \mu - 1, \lambda - 2\mu - 1, 2\lambda - \mu + 3) \cdot (1, 2, 1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu - 1 + \lambda - 2\mu - 1 + 4\lambda - 2\mu + 6 = 0 \\ \lambda - \mu - 1 + 2\lambda - 4\mu - 2 + 2\lambda - \mu + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6\lambda - 5\mu + 4 = 0 \\ 5\lambda - 6\mu = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -5 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -5 & -4 \\ 0 & -11 & 20 \end{array} \right) \Rightarrow -11\mu = 20 \Rightarrow \mu = -\frac{20}{11} \Rightarrow 5\lambda = 6 \cdot \left(-\frac{20}{11}\right) =$$

$$\lambda = -\frac{120}{55} = -\frac{24}{11} \Rightarrow \vec{v}_t = \left[\left(-\frac{24}{11}\right) - \left(-\frac{20}{11}\right) - 1, \left(-\frac{24}{11}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{20}{11}\right) - 1, 2 \cdot \left(-\frac{24}{11}\right) - \left(-\frac{20}{11}\right) + 3 \right]$$

$$\vec{v}_t = \left[\left(-\frac{15}{11}\right), \frac{5}{11}, \frac{5}{11} \right] \equiv (-15, 5, 5) \equiv (-3, 1, 1) \Rightarrow t: \begin{cases} x = 0 - 3\alpha = -3\alpha \\ y = 0 + \alpha = \alpha \\ z = 0 + \alpha = \alpha \end{cases}$$

b) El punto de corte **S** de **s** y **t** se busca sustituyendo el parámetro correspondiente (en este caso μ) en la ecuación paramétrica que corresponde o sea en la de la recta **s**

$$\mu = -\frac{20}{11} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + \left(-\frac{20}{11}\right) = \frac{24}{11} \\ y = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{20}{11}\right) = -\frac{29}{11} \\ z = -\frac{20}{11} \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{24}{11}, -\frac{29}{11}, -\frac{20}{11}\right)$$

3.A.- Dada las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar las constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$

b) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior

c) Hallar las matrices X que satisfacen: $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$

a)

$$A^2 = \alpha A + \beta I \left\{ \begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$A^2 = 2A - I$$

b)

$$\text{Sabido que } \begin{cases} I^2 = I \\ AI = IA = A \end{cases}$$

$$A^5 = (A^2)^2 A = (2A - I)^2 A = (4A^2 - 4AI + I^2)A = [4(2A - I) - 4AI + I^2]A = (8A - 4I - 4A + I)A$$

$$A^5 = (4A - 3I)A = 4A^2 - 3IA = 4(2A - I) - 3A = 8A - 4I - 3A = 5A - 4I$$

$$A^5 = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$A - X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1-a & 2-b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} \quad A + X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1+a & 2+b \\ c & 1+d \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A - X)(A + X) = \begin{pmatrix} 1-a & 2-b \\ -c & 1-d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+a & 2+b \\ c & 1+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)(1+a) + (2-b)c & (1-a)(2+b) + (2-b)(1+d) \\ -c(1+a) + (1-d)c & -c(2+b) + (1-d)(1+d) \end{pmatrix} \\ A^2 - X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a^2 - bc & 4 - ab - bd \\ -ac - cd & 1 - bc - d^2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$(A - X)(A + X) = \begin{pmatrix} 1 - a^2 - bc + 2c & 2 + b - 2a - ab + 2 + 2d - b - bd \\ -c - ca + c - cd & -2c - bc + 1 - d^2 \end{pmatrix}$$

$$(A - X)(A + X) = \begin{pmatrix} 1 - a^2 - bc + 2c & 4 - 2a - ab + 2d - bd \\ -ca - cd & -2c - bc + 1 - d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a^2 - bc + 2c = 1 - a^2 - bc \\ 4 - 2a - ab + 2d - bd = 4 - ab - bd \\ -ca - cd = -ac - cd \\ -2c - bc + 1 - d^2 = 1 - bc - d^2 \end{cases} \Rightarrow$$

Continuación del problema 3.A.-*c)Continuación*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ -2a + 2d = 0 \Rightarrow a - d = 0 \Rightarrow a = d \\ 0 = 0 \\ -2c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{array} \right. \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \forall a \in \mathfrak{R} \\ \forall b \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

4.A.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de su recta tangente a su gráfica en el punto $[a, f(a)]$ para $a > 0$

b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados

c) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en b) sea mínima.

a)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f(a) = \frac{1}{a} \\ f'(a) = -\frac{1}{a^2} \end{cases} \Rightarrow y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \cdot (x - a) \Rightarrow a^2 y - a = -x + a \Rightarrow x + a^2 y - 2a = 0$$

b)

$$\begin{cases} \text{Con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x + a^2 \cdot 0 - 2a = 0 \Rightarrow x - 2a = 0 \Rightarrow x = 2a \Rightarrow (2a, 0) \\ \text{Con } OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 0 + a^2 \cdot y - 2a = 0 \Rightarrow a^2 \cdot y - 2a = 0 \Rightarrow a^2 \cdot y = 2a \Rightarrow y = \frac{2}{a} \Rightarrow \left(0, \frac{2}{a}\right) \end{cases}$$

c)

$$d = \sqrt{(2a - 0)^2 + \left(0 - \frac{2}{a}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}} = \sqrt{\frac{4a^4 + 4}{a^2}} = \frac{2}{a} \sqrt{a^4 + 1} \Rightarrow$$

$$d' = 2 \cdot \frac{\frac{4a^3 \cdot a}{2\sqrt{a^4 + 1}} - \sqrt{a^4 + 1}}{a^2} = 2 \cdot \frac{2a^4 - (a^4 + 1)}{a^2 \sqrt{a^4 + 1}} = 2 \cdot \frac{a^4 - 1}{a^2 \sqrt{a^4 + 1}}$$

$$\text{Si } d' = 0 \Rightarrow a^4 - 1 = 0 \Rightarrow (a^2 - 1)(a^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow \forall a \notin \mathbb{R} \\ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Como $a > 0 \Rightarrow a = 1$

Comprobación

$$d'' = 4 \cdot \frac{3a^4 + 1}{a^3(1 + a^4)\sqrt{1 + a^4}} \Rightarrow d''(1) = 4 \cdot \frac{3 \cdot 1^4 + 1}{1^3(1 + 1^4)\sqrt{1 + 1^4}} = \frac{16}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

OPCIÓN B

1.B.-Dada la función $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-1}$ donde *ln* significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$,

hallar un punto **[a , f(a)]** tal que la recta tangente a la gráfica de **f(x)** en ese punto sea paralela al eje OX

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)}{x^2} \cdot \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{x^2(x-1)} = \frac{(x-2)x}{x^2(x-1)} = \frac{x-2}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = \ln \frac{2^2}{2-1} = \ln 4 \Rightarrow y - \ln 4 = 0(x - 2) \Rightarrow y - \ln 4 = 0$$

2.B.- Se considera la función $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

a) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$

b) Determinar el valor del parámetro a tal que : $\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{4}$

a)

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2(1+e^x)e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{[(1+e^x) - 2e^x](1+e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(1-e^x)e^x}{1+e^x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1-e^x)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow x \ln e = \ln 0 \Rightarrow \nexists \forall x \in \mathbb{R} \\ 1-e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x \ln e = \ln 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{2^2} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{[(1-e^x)e^x - e^{2x}](1+e^x) - (1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1-2e^x)(1+e^x) - (1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x[1+e^x - 2e^x(1+e^x)] - (1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x - 2e^x - 2e^{2x}) - (1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2} =$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1-e^x - 2e^{2x} - 1 + e^x)}{(1+e^x)^2} = -\frac{2e^{3x}}{(1+e^x)^2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{2e^{3 \cdot 0}}{(1+e^0)^2} = -\frac{2e^0}{(1+1)^2} = -\frac{2 \cdot 1}{2^2} = -\frac{1}{2}$$

En el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ hay un Máximo relativo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Utilizando L'Hopital}}{\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(1+e^x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x \left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{e^x(e^x + 1)^2}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = 0$$

b)

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt = \frac{1}{(-1)} t^{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{1+e^x}$$

$$1+e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$$

$$\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^a = \frac{1}{4} \Rightarrow -\left(\frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{1+e^0}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1+e^a = 4 \Rightarrow e^a = 3 \Rightarrow a \cdot \ln e = \ln 3 \Rightarrow a \cdot 1 = \ln 3 \Rightarrow a = \ln 3$$

3.B.- Se considera la familia de planos: $mx + (m - 2)y + 3(m + 1)z + (m + 1) = 0$, siendo m un parámetro real.

Se pide:

a) Determinar la recta común a todos los planos de la familia

b) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$

c) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta: $r: \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases}$

a)

$$\begin{cases} \text{Con } m = 2 \Rightarrow 2x + 9z + 3 = 0 \\ \text{Con } m = 3 \Rightarrow 3x + y + 12z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-9z - 3}{2} \Rightarrow 3 \cdot \frac{-9z - 3}{2} + y + 12z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{27z + 9}{2} - 12z - 4 \Rightarrow y = \frac{27z - 24z + 9 - 8}{2} \Rightarrow y = \frac{3z + 1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} r: \begin{cases} x = -\frac{3}{2} - 9\lambda \\ y = \frac{1}{2} + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

b)

$$m \cdot 1 + (m - 2) \cdot 1 + 3(m + 1) \cdot 0 + m + 1 = 0 \Rightarrow m + m - 2 + m + 1 = 0 \Rightarrow 3m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} - 2\right)y + 3\left(\frac{1}{3} + 1\right)z + \frac{1}{3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y + 4z + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x - 5y + 12z + 4 = 0$$

c)

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow [m, m - 2, 3(m + 1)](2, 1, 1) = 0 \Rightarrow 2m + m - 2 + 3m + 3 = 0 \Rightarrow 6m = 1$$

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow [m, m - 2, 3(m + 1)](2, 1, 1) = 0 \Rightarrow 2m + m - 2 + 3m + 3 = 0 \Rightarrow 6m = 1$$

$$m = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{6} - 2\right)y + 3\left(\frac{1}{6} + 1\right)z + \frac{1}{6} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}x - \frac{11}{6}y + \frac{7}{2}z + \frac{7}{6} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - 11y + 21z + 7 = 0$$

4.B.- Dada las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar A^{10}

b) Hallar la matriz inversa de B

c) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^8 = A^4 A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{10} = A^8 A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{adj}(B^t) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ t & k & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^8 = B^4 \cdot B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^{10} = B^8 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$