

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$

c) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3\alpha + 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha + 6 & \beta & \gamma + 3 \end{vmatrix}$

a)

$$\det(A^4) = (\det A)^4 = 3^4 = 81$$

b)

$$10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 10$$

c)

$$\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3\beta + 4 & 3\gamma + 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 0 = 0$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la recta: $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$, y el punto $P(2, 0, -1)$ se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia del punto P a la recta r

b) (2 puntos). Hallar las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto de la recta r

a) Crearemos un plano π que contenga al punto P y que sea perpendicular a la recta r , su vector director es el de la recta que es perpendicular al vector generador del plano formado por el punto P y el genérico G . Posteriormente hallaremos el punto R de corte del plano π y la recta r , siendo la distancia pedida la que hay entre este punto P y el R

$$\text{Siendo } \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{v}_{\pi} = (-2, 1, 3) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (2, 0, -1) = (x-2, y, z+1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi} \perp \vec{PG} \Rightarrow \vec{v}_{\pi} \cdot \vec{PG} = 0$$

$$(-2, 1, 3) \cdot (x-2, y, z+1) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (x-2) + y + 3 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow -2x + 4 + y + 3z + 3 = 0$$

$$\pi \equiv 2x - y - 3z - 7 = 0$$

Punto de corte R

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (-1 - 2\lambda) - (2 + \lambda) - 3 \cdot (-1 + 3\lambda) - 7 = 0 \Rightarrow -2 + 4\lambda - 2 - \lambda + 3 - 9\lambda - 7 = 0$$

$$-6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow -6\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$R \begin{cases} x = -1 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3} \\ y = 2 + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ z = -1 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -5 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -5\right) \Rightarrow d(P, r) = d(PR) = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + (-1 + 5)^2}$$

$$d(P, r) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{1+4}{9} + 16} = \sqrt{\frac{5+144}{9}} = \frac{\sqrt{149}}{3} u$$

b) El punto hallado es el punto medio entre P y su simétrico P'

$$\begin{cases} \frac{5}{3} = \frac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 6 + 3x_{P'} = 10 \Rightarrow 3x_{P'} = 4 \Rightarrow x_{P'} = \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 3y_{P'} = 4 \Rightarrow y_{P'} = \frac{4}{3} \\ -5 = \frac{-1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow -1 + z_{P'} = -10 \Rightarrow z_{P'} = -9 \Rightarrow z_{P'} = -9 \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -9\right)$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas la rectas: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$, $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, se pide:

a) (2 puntos). Determinar la ecuación de la recta perpendicular a r y s

b) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s

a) Se supone que las rectas se cruzan; toda recta t que se apoya en las dos dadas tiene como vector director la diferencia entre los puntos de ambas. Como además es perpendicular a las dos los productos escalares de esta con los vectores directores de las rectas es, en ambos casos, nulo

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \\ s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 4\mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_t = (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \cdot (2, 3, -1) = 0 \\ (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \cdot (1, 1, 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - 2\mu + 3 + 9\lambda - 3\mu + 4 + \lambda + 4\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu + 1 + 3\lambda - \mu - 16 - 4\lambda - 16\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 14\lambda - \mu + 7 = 0 \\ \lambda - 18\mu - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -252\lambda + 18\mu - 126 = 0 \\ \lambda - 18\mu - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow -251\lambda - 141 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{141}{251}$$

$$\begin{cases} 14\lambda - \mu + 7 = 0 \\ -14\lambda + 252\mu + 210 = 0 \end{cases} \Rightarrow 251\mu + 217 = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{217}{251}$$

$$\vec{v}_t = \left[2 \cdot \left(-\frac{141}{251}\right) - \left(-\frac{217}{251}\right), 1 + 3 \cdot \left(-\frac{141}{251}\right) - \left(-\frac{217}{251}\right), -4 - \left(-\frac{141}{251}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{217}{251}\right) \right]$$

$$\vec{v}_t = \left[\left(-\frac{282}{251}\right) + \frac{217}{251}, 1 + \left(-\frac{423}{251}\right) + \frac{217}{251}, -4 + \frac{141}{251} + \frac{868}{251} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{v}_t = \left[-\frac{65}{251}, \frac{251 - 423 + 217}{251}, \frac{-1004 + 1009}{251} \right] \Rightarrow \vec{v}_t = \left(-\frac{65}{251}, \frac{45}{251}, \frac{5}{251} \right) \equiv (-13, 9, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot \left(-\frac{141}{251}\right) = -\frac{282}{251} \\ y = 1 + 3 \cdot \left(-\frac{141}{251}\right) = -\frac{172}{251} \\ z = -4 - \left(-\frac{141}{251}\right) = -\frac{863}{251} \end{array} \right. \\ S \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{217}{251} \\ y = -\frac{217}{251} \\ z = 4 \cdot \left(-\frac{217}{251}\right) = -\frac{868}{251} \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -\frac{282}{251} - 13\beta \\ y = -\frac{172}{251} + 9\beta \\ z = -\frac{863}{251} + \beta \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

se pide:

$$\text{a) (1 punto). } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25}$$

$$\text{b) (1 punto). } \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3)^{\frac{2}{x^3}}$$

a)

$$\text{Sabiendo que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{8x^3}{x^3}}}{\frac{1}{x} + \frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{x^3} + \frac{5x}{x^2} - 8}}{\frac{1}{x} + 2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{\infty} + \frac{5x}{\infty} - 8}}{\frac{1}{\infty} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} = \frac{\sqrt[3]{0+0-8}}{0+2} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad (1)$$

$$\text{De (1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right)^{25} = (-1)^{25} = -1$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3)^{\frac{2}{x^3}} = (1+4 \cdot 0^3)^{\frac{2}{0^3}} = 1^\infty = \left\{ \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^3) \right]^{\frac{1}{4x^3}} \right\}^{4x^3 \cdot \frac{2}{x^3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3}{x^3}} = e^8$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, donde \ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica

b) (1 punto) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$

a)

$$x^2 + 4x - 5 > 0 \Rightarrow \text{Si } x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{-4+6}{2} = 1 \\ x = \frac{-4-6}{2} = -5 \end{cases} \Rightarrow (x-1) \cdot (x+5) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x+5 > 0 \Rightarrow x > -5 \end{cases}$$

| | | | | |
|------------------|-----------|-----------|----------|----------|
| | $-\infty$ | -5 | 1 | ∞ |
| x > 1 | | (-) | (-) | (+) |
| x > -5 | | (-) | (+) | (+) |
| Solución | | (+) | (-) | (+) |

Dominio de definición

$$D(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (x < -5) \cup (x > 1)$$

b)

$$f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5} = \frac{2 \cdot (x+2)}{(x+5) \cdot (x-1)} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot (x+2)}{(x+5) \cdot (x-1)} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > -2 \\ x+5 > 0 \Rightarrow x > -5 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > -5 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 1 \end{cases}$$

| | | | | |
|------------------|-----------|-----------------|----------|----------|
| | $-\infty$ | -5 | 1 | ∞ |
| x > -5 | | (-) | | (+) |
| 2 > 0 | | (+) | | (+) |
| x > -2 | | (-) | | (+) |
| x > 1 | | (-) | | (+) |
| Solución | | (-) $f'(x) < 0$ | | (+) |

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x > 1$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x < -5$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

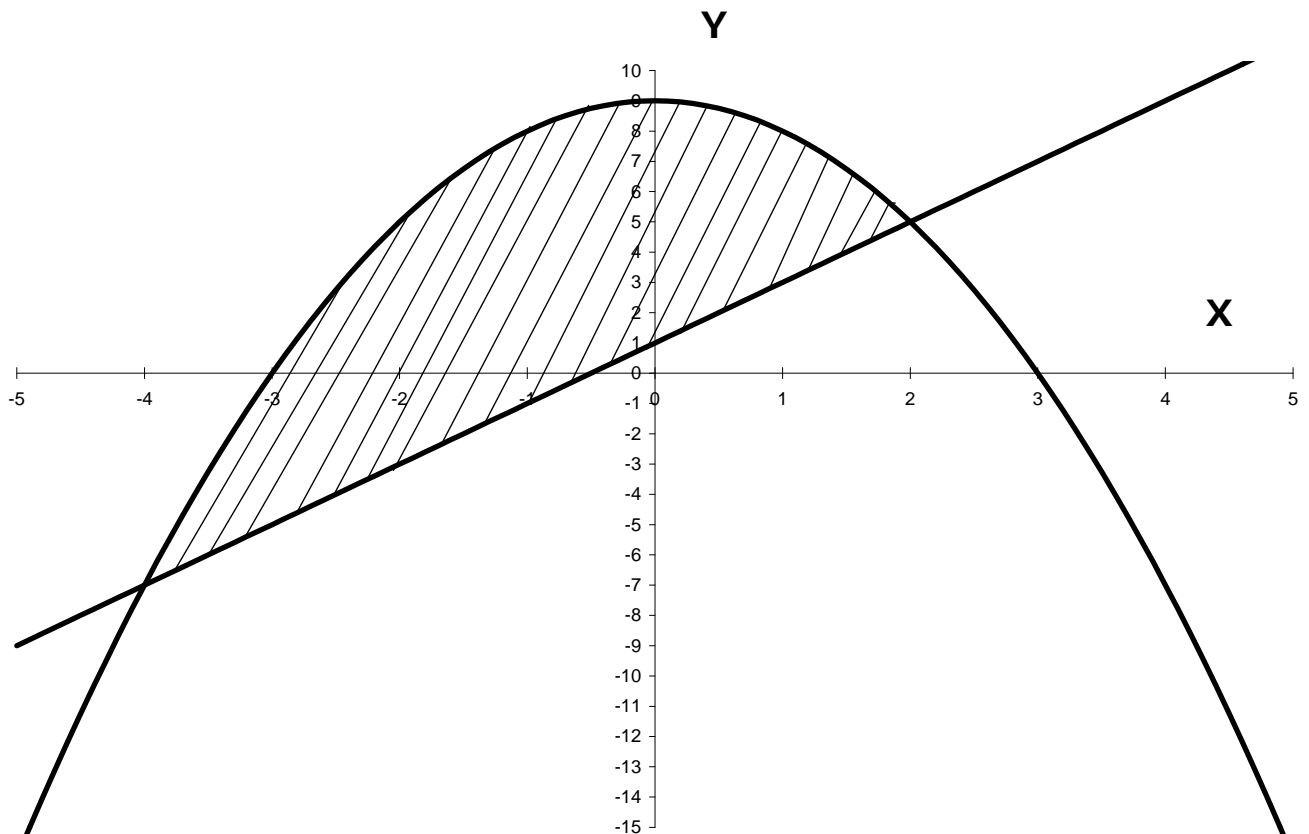
Dada las funciones: $y = 9 - x^2$, $y = 2x + 1$ se pide:

- (1 punto). Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas
- (1 punto). Calcular el área del recinto ocupado
- (1 punto). Hallar el volumen del cuerpo obtenido al hace girar alrededor del eje **OX** el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje **OX**

a) Llamando $f(x) = 9 - x^2$, $g(x) = 2x + 1$. La gráfica de la función **f(x)** es una parábola y la función **g(x)** es una función lineal siendo su gráfica una recta definida por dos puntos.

$$f(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f(0) = 9 - 0^2 = 9 \Rightarrow \text{Máximo en } (0, 9) \\ \text{Corte con OX cuando } y = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} (-3, 0) \\ (3, 0) \end{cases} \\ \text{Corte con OY cuando } x = 0 \Rightarrow f(0) = 9 - 0^2 = 9 \Rightarrow (0, 9) \end{cases}$$

$$g(x) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow g(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1) \\ x = 2 \Rightarrow g(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow (2, 5) \end{cases}$$



Continuación del Ejercicio 1 de la opción B

Puntos de corte de las dos funciones

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 9 - x^2 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-2+6}{2} = 2 \\ x = \frac{-2-6}{2} = -4 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte de las funciones con OX} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \Rightarrow \begin{cases} (-3, 0) \\ (3, 0) \end{cases} \\ g(x) \Rightarrow 0 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-4}^{-3} (2x+1) dx \right| - \left| \int_{-4}^{-3} (9-x^2) dx \right| + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (9-x^2) dx + \left| \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (2x+1) dx \right| + \int_{\frac{1}{2}}^2 (9-x^2) dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x+1) dx \\ A &= \int_{-4}^{-3} (-2x-1) dx - \int_{-4}^{-3} (-9+x^2) dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (9-x^2) dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (-2x-1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (9-x^2) dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x+1) dx \\ A &= \int_{-4}^{-3} (-2x-1) dx + \int_{-4}^{-3} (9-x^2) dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (9-x^2) dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (-2x-1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (9-x^2) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (-2x-1) dx \\ A &= \int_{-4}^{-3} (-2x-1) dx + \int_{-4}^{-3} (9-x^2) dx = \int_{-4}^{-3} (-2x+8-x^2) dx = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-4}^{-3} + 8 \cdot [x]_{-4}^{-3} - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-4}^{-3} \\ A &= -[2^2 - (-4)^2] + 8 \cdot [2 - (-4)] - \frac{1}{3} \cdot [2^3 - (-4)^3] = -(4-16) + 8 \cdot 6 - \frac{1}{3} \cdot [8 - (-64)] = 12 + 48 - \frac{72}{3} \\ A &= 60 - 24 = 36 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

c)

Como es simétrica respecto a OY

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^3 (9-x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^3 (81-18x^2+x^4) dx = 2\pi \cdot \left\{ 81 \cdot [x]_0^3 - 18 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^3 + \frac{1}{5} \cdot [x^5]_0^3 \right\} \\ V &= 2\pi \cdot \left\{ 81 \cdot (3-0) - 6 \cdot (3^3 - 0^3) + \frac{1}{5} \cdot (3^5 - 0^5) \right\} = 2\pi \cdot \left(243 - 162 + \frac{243}{5} \right) = 2\pi \cdot \left(81 + \frac{243}{5} \right) \\ V &= 2\pi \cdot \frac{405 + 243}{5} = 2\pi \cdot \frac{648}{5} = \frac{1286}{5} \pi \text{ u}^3 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el plano $\pi \equiv 2x + ay + 4z + 25 = 0$ y la recta $r \equiv x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{5}$, se pide

- a) (1 punto). Calcular los valores de a para que la recta r esté contenida en el plano π
 b) (1 punto). Para el valor $a = -2$, hallar el punto (o los puntos) que pertenecen a la recta perpendicular a π que pasa por $P\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{11}{2}\right)$, y que dista (o distan) $\sqrt{6}$ unidades de π
 c) (1 punto). Para $a = -2$, halla el seno del ángulo que forman r y π

a) El vector director de la recta r y el del plano tienen que ser perpendiculares, por lo tanto su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 2, 5) \\ \vec{v}_\pi = (2, a, 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (1, 2, 5) \cdot (2, a, 4) = 0 \Rightarrow 2 + 2a + 20 = 0 \Rightarrow 2a = -22 \Rightarrow a = -11 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 11y + 4z + 25 = 0$$

b) La recta s , que hay que hallar, tiene como vector director el del plano ya que es perpendicular a él.

$$\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (2, -2, 4) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -\frac{11}{2} + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6} = \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\lambda\right) - 2 \cdot (-2)\lambda + 4 \cdot \left(-\frac{11}{2} + 4\lambda\right) + 25}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 11^2}} \\ -\sqrt{6} = \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\lambda\right) - 2 \cdot (-2)\lambda + 4 \cdot \left(-\frac{11}{2} + 4\lambda\right) + 25}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 11^2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{6} = \frac{3 + 4\lambda + 4\lambda - 22 + 16\lambda + 25}{\sqrt{4 + 4 + 121}} \\ -\sqrt{6} = \frac{3 + 4\lambda + 4\lambda - 22 + 16\lambda + 25}{\sqrt{4 + 4 + 121}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{6} \cdot 129 = 24\lambda + 6 \\ -\sqrt{6} \cdot 129 = 24\lambda + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{86} = 6 \cdot (4\lambda + 1) \\ -3\sqrt{83} = 6 \cdot (4\lambda + 1) \end{cases} \Rightarrow$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción Bb) *Continuación*

$$\begin{cases} \sqrt{86} = 8\lambda + 2 \\ -\sqrt{86} = 8\lambda + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{86} - 2 = 8\lambda \\ -\sqrt{86} - 2 = 8\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{86} - 2}{8} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{86} + 2}{8} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_1 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{86} - 2}{8} = \frac{\sqrt{86} + 4}{4} \\ y = -2 \cdot \frac{\sqrt{86} - 2}{8} = \frac{2 - \sqrt{86}}{4} \\ z = -\frac{11}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{86} - 2}{8} = \frac{\sqrt{86} - 13}{2} \end{array} \right. \\ P_2 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{86} + 2}{8} = \frac{4 - \sqrt{86}}{4} \\ y = 2 \cdot \frac{\sqrt{86} + 2}{8} = \frac{2 + \sqrt{86}}{4} \\ z = -\frac{11}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{86} + 2}{8} = -\frac{(\sqrt{86} + 13)}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

c)

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 2, 5) \\ \vec{v}_\pi = (2, -2, 4) \equiv (1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_\pi|} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{9}{\sqrt{180}} = \frac{9 \cdot \sqrt{180}}{180} = \frac{\sqrt{180}}{20} = \frac{6\sqrt{5}}{20} = \frac{3\sqrt{5}}{10} = 0,67082039324993690892275210061938 \Rightarrow$$

$$\alpha = 42^\circ 7' 49''$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Se considera el sistema de ecuaciones :
$$\begin{cases} 2x + my + 3z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ 5x + (m+1)y + z = 9 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) (1'5 puntos). Discutir el sistema según los valores de m

b) (0'5 puntos). Resolver el sistema para el caso $m = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & m+1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10m + 3 \cdot (m+1) - 15 + 4 \cdot (m+1) - m = -13 - 11m + 3m + 4m + 3 + 4 = -6 - 4m$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -6 - 4m = 0 \Rightarrow 4m = -6 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

$$\forall m \in -\left\{-\frac{3}{2}\right\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\text{Si } m = -\frac{3}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -\frac{3}{2}+1 & 1 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 1 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 10 & -1 & 2 & 18 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & -8 & 0 \\ 20 & -2 & 4 & 36 \end{array} \right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & -14 & -6 \\ 0 & 13 & -26 & 6 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & -14 & -6 \\ 0 & 91 & -182 & 42 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & -14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 120 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

$$\text{Si } m = 0 \Rightarrow |A| = -6 - 4 \cdot 0 = -6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{3 - 27 + 6}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-30 + 27 + 36 - 3}{-6} = \frac{30}{-6} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{18 + 3 - 15}{-6} = \frac{6}{-6} = -1 \Rightarrow \text{Solución}(3, -5, -1)$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiarla para que valores de a tiene inversa y calcularla

siempre que sea posible

$$\text{Existe } A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} a & 1-a^2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} a & 1-a^2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$